KYBERNETIKA ČÍSLO 5, ROČNÍK 4/1968

Stanovení podmínek stability při návrzích metodou geometrického místa kořenů

MIROSLAV ROSENBAUM

Je navržena grafickoalgebraická metoda návrhu zpětnovazebního obvodu využívající funkčních vlastností trajektorií geometrického místa kořenů. Fyzikální názornost podmínek stability umožňuje návrh případných opatření vedoucích ke stabilizaci zpětnovazební smyčky. Metoda je použitelná i pro rozvětvené obvody, kde jsou číselně známy póly přenosů všech smyček.

ÚVOD

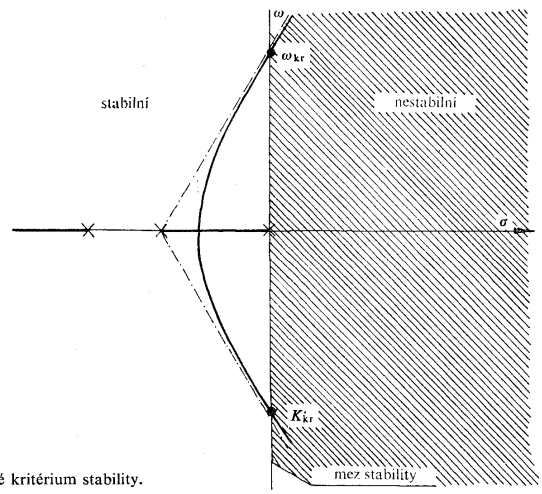
Nedílnou součástí návrhů regulačních a korekčních obvodů je stanovení podmínek stability hlavní smyčky, která se dotýká reziduální přímé cesty signálu *vstup — výstup*. Byla navržena řada kritérií, z nichž některá, vycházející např. z prací Ljapunova [1], [2], mají obecnou platnost. V technické praxi je nejčastěji užíváno z algebraických kriterií Routhovo a Hurwitzovo, z frekvenčních Michajlovovo-Leonhardovo a Nyquistovo. Hurwitzovo kritérium vyžaduje u soustav vyšších řádů řešení řady determinantů, což znesnadňuje průběžnou numerickou kontrolu výpočtu a nestanoví způsob zásahu do zpětnovazebního obvodu, který vyloučí kořeny s kladnou reálnou částí. Obdobné vlastnosti má i modifikace kritéria navržená Hájkem [3]. Z algebraických kritérií má největší praktický význam kritérium Routhovo, jehož algoritmus se jeví časově nejméně náročný [4].

Frekvenční kritéria vyžadují určování kořenů algebraických rovnic pro stanovení průsečíků Michajlovova-Leonhardova hodografu, resp. frekvenční charakteristiky s osami Gaussovy roviny. Grafická interpretace Michajlovova-Leonhardova kritéria [5] se užívá jen zřídka, obvykle postačí splnění podmínek stability stanovených Hellerem a Veverkou [6]. Nyquistovo kritérium, jako jediné, upřesňuje fyzikální názor na vlastnosti uzavřené smyčky a tak naznačuje opatření vedoucí k její případné stabilizaci. Kritérium nedává však představu o poloze kořenů s kladnou reálnou částí v rovině p.

Společným jmenovatelem všech kritérií je splnění určitých podmínek stability

bez výpočtu kořenů charakteristické rovnice uzavřeného obvodu, to znamená bez přímého určení všech kořenů s kladnou reálnou částí.

Využijeme-li funkčních vlastností trajektorií geometrického místa kořenů [9] (dále GM), můžeme stanovit určité podmínky, jejichž splněním zaručíme stabilní chování zpětnovazebního obvodu. Tyto podmínky zobecňují pravidla formulovaná Evansem [7] a Chuem [8] (obr. 1).



Obr. 1. Grafické kritérium stability.

Přenos otevřené smyčky $KG(p)$ vyjádřený obvykle podílem dvou polynomů $M(p)$ a $N(p)$ stupně m a n $(m \leqq n)$ a činitelem zesílení K

$$KG(p) = K \frac{M(p)}{N(p)} \tag{1}$$

můžeme využít k definici analytického vyjádření větví GM (2), resp. geometrického místa bodů $K = \text{konst}$ (3) [9] v Gaussově rovině:

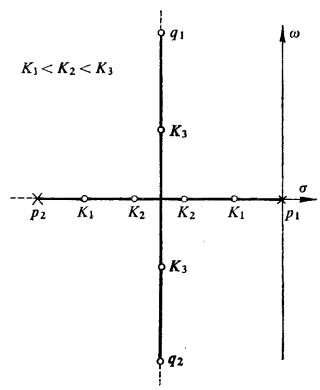
$$\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Im} M(p) - \operatorname{Re}(Mp) \operatorname{Im} N(p) = 0\,, \tag{2}$$

$$K = \pm \frac{\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Re} M(p) + \operatorname{Im} N(p) \operatorname{Im} M(p)}{\operatorname{Re}^2 M(p) + \operatorname{Im}^2 M(p)}\,. \tag{3}$$

Horní znaménko v (3) platí pro kladnou zpětnou vazbu, považujeme-li činitel K za kladné číslo. Oba výrazy (2), (3) jsou zpravidla implicitní funkce dvou proměnných σ a ω, které pro určité číselné hodnoty K vytvářejí v rovině σ, ω geometrické pole čar, které se vzájemně protínají a v průsečících definují množiny kořenů charakteristické rovnice uzavřeného obvodu [10].

STABILITA UZAVŘENÉHO OBVODU

Při rozboru zpětnovazebních obvodů obvykle stačí vyznačit v Gaussově rovině soustavu křivek (2), na kterých jsou vyznačeny průsečíky se soustavou (3), činitel



Obr. 2. Posloupnosti činitelů zesílení na trajektoriích GM.

zesílení K je možno považovat za parametr GM (2) (obdobně jako ω je parametrem frekvenční charakteristiky). Větve geometrického místa se tak stanou orientovanými čarami Gaussovy roviny, ve smyslu rostoucího K (obr. 2). Větev tudíž začíná v pólu přenosu rozpojené smyčky [7] ($K_1 < K_2 < K_3 \ldots$). Bod roviny, kde větve GM se sbíhají, rozbíhají nebo protínají, nazveme bodem rozvětvení nebo zkráceně *uzel*. Uzel je vždy násobným bodem GM, kde násobnost budeme uvažovat stejnou s počtem větví, které do uzlu přicházejí. Je třeba zdůraznit, že orientovaná čára také vychází z libovolného svého vnitřního bodu, tudíž i z uzlu. Tato vlastnost z topologie grafů je oprávněná i v našem případě.

Rozborem rovnice (3) zjistíme, že činitel zesílení K je možno uvažovat jako funkci dvou proměnných σ a ω. Tuto skutečnost symbolicky vyznačíme obvyklým způsobem

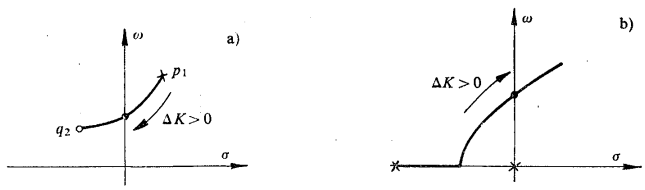
$$K = K(\sigma, \omega)\,. \tag{4}$$

Symbolem GM(σ, ω) označíme rovnici geometrického místa (2). Znaky (4) budou tudíž jednoznačně určovat libovolný bod GM(σ, ω) (2), tudíž i uzel. Např. průsečík

$\mathrm{GM}(\sigma, \omega)$ s přímkou $\sigma = 0$ symbolicky zapíšeme $K_{kr}(0, \omega_{kr})$ v souhlase s označením kritického činitele zesílení.

Průsečíky $\mathrm{GM}(\sigma, \omega)$ (2) s osou ω mají zásadní význam pro formulaci podmínek stability. Zavedeme proto další úmluvu. Osu ω, přímku $\sigma = 0$ označíme jako kritickou přímku. Protíná-li orientovaná větev GM kritickou přímku zprava (obr. 3a), vyznačíme tuto skutečnost znaménkem proměnné σ pravé poloviny p v symbolickém označení průsečíku (5)

$$K_{\mathrm{kr}}^{+} = K_{\mathrm{kr}}(+0, \omega_{\mathrm{kr}})\,; \tag{5}$$



Obr. 3. Průchod orientované trajektorie kritickou přímkou.

průsečík případu (obr. 3b), kde větev protíná přímku zleva, vyznačíme podle (6)

$$K_{\mathrm{kr}}^{-} = K_{\mathrm{kr}}(-0, \omega_{\mathrm{kr}})\,. \tag{6}$$

Pomocí Gaussovy věty [11] je možno dokázat, že počet pólů přenosu rozpojené smyčky (se započítanou násobností) je stejný jako počet větví GM, resp. počet pólů celkového přenosu uzavřeného obvodu.

Návrh stabilního obvodu algebraicky vychází z množiny kritických frekvencí $[\omega_i] = \Omega$ definované průsečíky větví $\mathrm{GM}(\sigma, \omega)$ s kritickou přímkou.

$$\mathrm{GM}(\sigma, \omega) = 0\,, \tag{7}$$

$$\sigma = 0\,.$$

Tyto kritické frekvence jsou dvojího druhu, ω_i^+ a ω_j^- přísluší kladné a záporné vazbě regulační smyčky. (Zbývající kořeny charakteristického polynomu jsou komplexně sdružené a není je proto možno považovat za kritické frekvence ve smyslu definice.) Po dosazení $\sigma = 0$, $\omega = \omega_{kr}$ do rovnice (3) souhlasí druh vazby se znaménkem $+$ nebo $-$, které je nutno použít, aby činitel zesílení K vycházel kladný. Studujeme-li stabilitu regulačního obvodu, druh vazby je jednoznačný, pracujeme proto pouze s jediným souborem kritických frekvencí z množiny Ω, např. ω_i^+. Způsob numerického řešení soustavy (7) je zjednodušen skutečností, že hledáme pouze reálné (resp. kladné) frekvence.

Větve GM protínají v obecném případě kritickou přímku několikrát. Přiřadíme proto každé větvi množinu činitelů zesílení K_{kr} (která může být i prázdná) definovanou posloupností

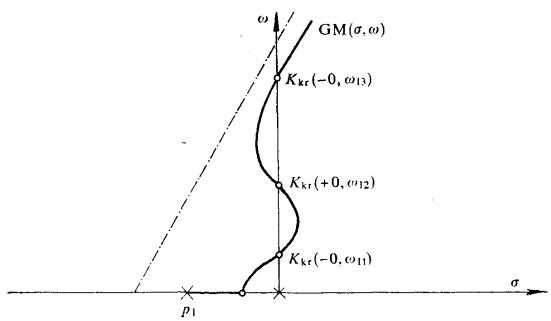
$$(8) \qquad {}_kK_{kr}(+0, \omega_{k1}), \; {}_kK_{kr}(-0, \omega_{k2}), \; {}_kK_{kr}(+0, \omega_{k3}), \; \ldots$$

Větev GM nemůže dvakrát po sobě protnout kritickou přímku z téže strany, takže se znaménka nul v jednotlivých posloupnostech střídají. Člen ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{k1})$ pro větev vycházející z k-tého pólu *v levé* polovině roviny p je roven nule (větev musí mít první průsečík zleva a ω_{k1} neexistuje). Členy posloupnosti (8) jsou kladné, rostoucí, nebo rovny nule. Končí-li větev v nekonečně vzdáleném bodu, přiřadíme k příslušné posloupnosti (8) poslední člen rovný nekonečnu:

$$(9) \qquad {}_kK_{kr}(\pm 0, \omega_{ki}) \in \langle 0, \infty) \, .$$

Počet posloupností je stejný jako počet pólů přenosu rozpojené smyčky n.

Větev GM mezi body ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{ki})$, ${}_kK_{kr}(-0, \omega_{k,i+1})$ leží v levé polovině roviny p, mezi body ${}_kK_{kr}(-0, \omega_{kj})$, ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{k,j+1})$ v pravé polovině (obr. 4).



Obr. 4. Umístění množiny kritických zesilovacích činitelů na trajektoriích GM.

Tudíž interval mezi body ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{ki})$, ${}_kK_{kr}(-0, \omega_{k,i+1})$ určuje činitele zesílení K, které odpovídají stabilnímu chování uzavřeného obvodu. Užijeme-li pojmů definovaných v předešlých odstavcích, formulujeme podmínky stability takto:

Uzavřený regulační obvod je stabilní, jestliže:

1. každé větvi geometrického místa kořenů vycházející z pólů, resp. uzlů v pravé polovině roviny p je přiřazeno nejméně jedno konečné číslo K_{kr}^{+}, odpovídající průsečíku větve s kritickou přímkou,

2. činitel zesílení rozpojené smyčky K leží uvnitř intervalu

$$(10) \qquad {}_kK_{kr}(+0, \omega_{ki}) < K < {}_kK_{kr}(-0, \omega_{k,i+1})$$

pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ přičemž ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{k,i})$ může být rovno nule a ${}_kK_{kr}(-0, \omega_{k,i+1})$ nekonečnu.

Ve speciálním případě, kdy větve protínají kritickou přímku jen jednou, druhou podmínku stačí napsat ve tvaru

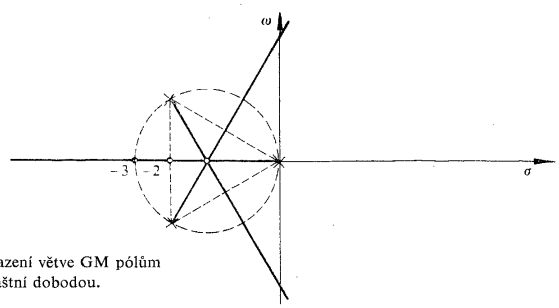
$$K^{+}_{kr,\,max} < K < K^{-}_{kr,\,min}\,, \tag{11}$$

kde $K^{+}_{kr,max}$ je nejvyšší hodnota ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{k1})$ a $K^{-}_{kr,\,min}$ je nejmenší hodnota ${}_kK_{kr}\,.\,(-0, \omega_{k1})$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Názorné použití kritéria bude demonstrováno na typických příkladech v dalším.

DŮKAZ PODMÍNEK STABILITY

Vybereme-li ze všech řešení soustavy (7) pouze reálné a kladné kořeny $+\omega_{kr}$, můžeme je pomocí rovnice (3) roztřídit na kritické frekvence kladné a záporné vazby. Druh vazby pro frekvence záporné bude vzhledem k symetrii trajektorií GM stejný. Kritické frekvence označíme dvěma indexy. Prvý bude určovací, totožný s pořadovým indexem pólu přenosu, ke kterému je trajektorie přiřazena. Druhý index bude pořadový a poroste s velikostí kritického zesílení uvažované větve.

Podmínkou nutnou, ale nikoli dostačující, pro stabilitu uzavřeného obvodu je průchod větví GM vycházejících z pólů a uzlů v pravé polovině roviny p také levou polovinou roviny. V tom případě mohou mít kořeny uzavřeného obvodu zápornou reálnou část. Zvětšujeme-li K od nuly do nekonečna, potom průsečíky (2) a (3) se posunují po větvích GM směrem od pólů. Má-li větev GM přejít z pravé poloviny roviny p do levé, musí protnout kritickou přímku.

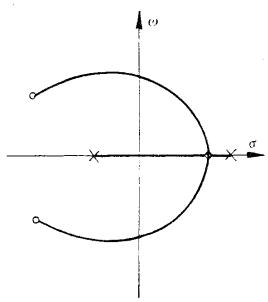


Obr. 5. Přiřazení větve GM pólům zvláštní dobodou.

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu $H(p)$ má konečné koeficienty, kořeny musí proto mít konečnou absolutní hodnotu. Činitel zesílení, který ovlivňuje až m koeficientů charakteristické rovnice, musí být konečný:

$$\begin{aligned} H(p) = p^n + a_{n-1}\,p^{n-1} + \ldots\ldots + (a_m + K)\,p^m + (a_{m-1} + K\,b_{m-1})\,p^{m-1} + \\ + \sim \ldots + (a_1 + Kb_1)\,p + (a_0 + Kb_0)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Činitel zesílení průsečíku GM s kritickou přímkou musí tudíž mít také konečnou hodnotu. Přiřazení větve GM pólu ležícím na ose σ není jednoznačné (obr. 2). Domluvíme se, že části nad osou σ budeme přiřazovat pólům vlevo od bodu rozvětvení, pokud případ nebude vyžadovat zvláštní opatření (obr. 5). S přihlédnutím k této úmluvě nestačí podmínka, aby větve vycházející z pólů v pravé polovině protínaly kritickou přímku, některá větev by mohla přebývat (obr. 6).



Obr. 6. Případ GM, kdy počet průsečíků kritické přímky zprava je větší než počet pólů s kladnou reálnou částí.

Doplníme-li postačující podmínku dovětkem o uzlech v pravé polovině, zahrneme do podmínek stability všechny případy.

Vlastní důkaz kritéria provedeme sporem. Předpokládejme, že pro vybranou k-tou větev GM činitel zesílení K neleží uvnitř intervalu (10) a uzavřená smyčka je stabilní. Potom to znamená, že bod $K(\sigma_0, \omega_0)$ splňuje některou z podmínek (13), (14):

$$K < {}_kK_{kr}(+0, \omega_{k,j}), \tag{13}$$

$$K > {}_kK_{kr}(-0, \omega_{k,i+1}). \tag{14}$$

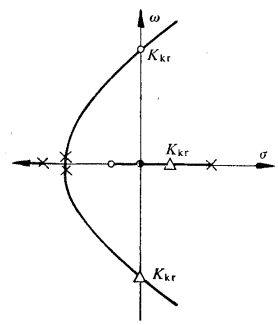
Číslo ${}_kK_{kr}(+0, \omega_{ki})$ podle úmluvy zastupuje bod $K(\sigma_i, \omega_{ki})$, kterým prochází orientovaná větev GM zprava. Bod $K(\sigma_0, \omega_0)$ charakterizovaný činitelem zesílení K menším než toto číslo musí proto mít souřadnici σ_0 větší než σ_i. Vzhledem k tomu, že σ_i je rovno nule, bod $K(\sigma_0, \omega_0)$ leží v pravé polovině roviny p a příslušný kořen charakteristické rovnice vytvoří nestabilní složku přechodového děje. Rozbor podmínky (14) je analogický. Nestabilní složka přechodového děje je však ve sporu s předpokladem stabilního chování uzavřené smyčky. Případ, kdy část GM leží v ose ω, nesplňuje první podmínku stability, takže není třeba jej do výše uvedeného důkazu sporem zahrnout.

Při analýze GM se může stát, že některá větev vycházející z pólu v levé polovině roviny protne kritickou přímku v bodě, kde činitel zesílení je K_{kr}. Bod ležící na jiné

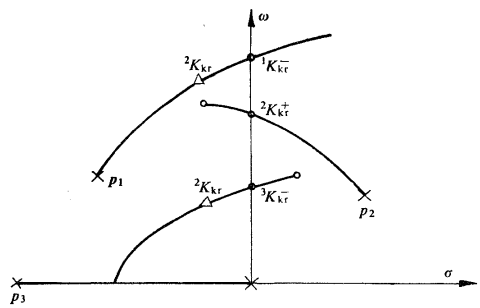
větvi protínající přímku zprava s tímto činitelem zesílení je dosud vpravo od osy ω (obr. 7). Jakoukoli změnou K není možno nalézt případ, kdy všechny kořeny $H(p)$ (12) leží vlevo od kritické přímky. Z této úvahy vyplývá, ze první podmínka stability je nutná, nikoli však dostačující.

Kořeny uzavřeného obvodu ležící na GM podle (obr. 8) musí být charakterizovány podmínkou

$$K_{kr}^{+} < K < K_{kr}^{-}\,, \tag{15}$$



Obr. 7. Příklad nestabilní soustavy s libovolným činitelem zesílení K z intervalu $(0, \infty)$.



Obr. 8. Grafický důkaz druhé podmínky stability.

aby soustava mohla být stabilní. Jsou-li všechny větve nejvýše s jediným průsečíkem, potom podmínka (15) se zpřísňuje na (11)

$$K_{kr,max}^{+} < K < K_{kr,min}^{-}\,. \tag{11}$$

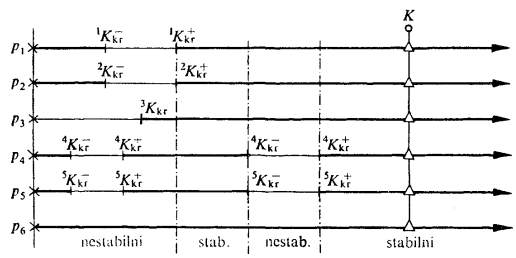
Je možno dokázat [9], že k rozhodnutí o smyslu průchodu větve GM kritickou

přímkou je možno užít vzorce (16)

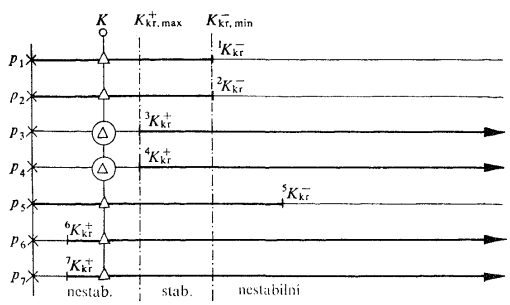
$$\mathrm{d}K(0, \omega) = \left[\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}\, \mathrm{d}\sigma\,(1 + \omega'^2)\right]; \tag{16}$$

$$\omega = \omega_{k,i}\,, \quad \sigma = 0\,,$$

pokud derivace ω' větve GM v okolí kritické přímky neroste nade všechny meze. Smysl průchodu větve kritickou přímkou má smysl přírůstku $\mathrm{d}\sigma$, který je nutno dosadit do (16), aby diferenciál $\mathrm{d}K(\sigma, \omega)$ byl kladný. Druhá mocnina ω' znaménko neovlivní. Je to v souhlase s dohodou o orientaci GM ve smyslu rostoucího parametru K. Je výhodné vyznačovat intervaly činitele K, pro které je soustava stabilní, do diagramu. Pro obecný případ způsobem podle obr. 9, pro případ (11) podle obr. 10, ze kterého je zřejmý i grafický důkaz podmínek stability.



Obr. 9. Obecný diagram stability.



Obr. 10. Diagram stability trajektorií GM s jediným průsečíkem kritické přímky.

ZÁVĚR

Užití podmínek stability redukuje se obvykle na stanovení kritických frekvencí užité vazby a rozhodnutí o smyslu průchodu větví GM kritickou přímkou. O průběhu větví GM rovinou p rozhodujeme obvykle pomocí tabulek GM uvedených např. v [12], [13], takže přiřazení pólů nulám je jednoznačné.

Některé numerické metody uvedené např. v [14] vedou k rychlému určení kritických frekvencí s požadovanou přesností.

Stanovíme stabilitu soustav popsaných typickými přenosy, které doplníme rozborem speciálního případu s průsečíkem větve GM v okolí nekonečně vzdáleného bodu.

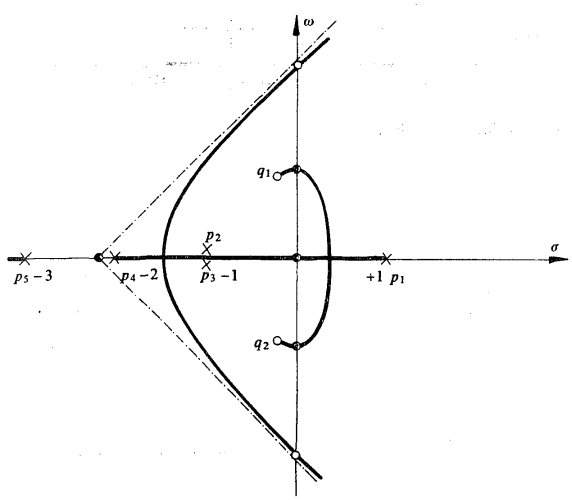
Příklad 1.

Přenos otevřené smyčky $KG(p)$ má jeden kladný pól, je proto nestabilní. Máme vyšetřit stabilitu uzavřené smyčky se zápornou zpětnou vazbou pro tři případy umístění komplexních nul:

$$KG(p) = \frac{25(p - q_1)(p - q_2)}{[(p + 1)^2 (p + 2)(p + 3)(p - 1)]}. \tag{17}$$

a) Nuly přenosu otevřené smyčky jsou určeny čísly $q_1 = -0{,}25 + \mathrm{j}$, $q_2 = -0{,}25 - \mathrm{j}$. Dosazením polynomů $M(p)$ a $N(p)$ do (2) a řešením průsečíků s přímkou $\sigma = 0$ vycházejí kritické frekvence [9] takto:

$$\omega_0 = 0\,, \quad \omega_1 = \sqrt{8}\,, \quad \omega_2 = -\sqrt{8}\,, \quad \omega_3 = 1\,, \quad \omega_4 = -1\,, \quad \omega_5 = \mathrm{j}\,, \quad \omega_6 = -\mathrm{j}\,.$$



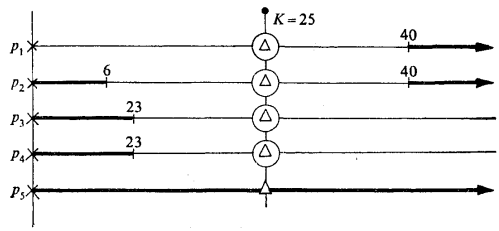
Obr. 11. Skica GM příkladu 1.

Frekvence ω_0 až ω_4 jsou reálné průsečíky s kritickou přímkou splňující podmínku záporné zpětné vazby. Odhadnutý průběh větví GM je na obr. 11, takže posloupnosti kritických frekvencí přiřazených pólům jsou

$$p_1\colon \omega_{11} = -1\,, \quad p_2\colon \omega_{21} = 0\,;\ \omega_{22} = +1\,,$$
$$p_3\colon \omega_{31} = -\sqrt{8}\,, \quad p_4\colon \omega_{41} = \sqrt{8}\,.$$

Posloupnosti kritických zesílení pomocí vztahů (3) a (16):

$$p_1\colon {}_1K(+0, \omega_{11}) = 40\,, \quad p_2\colon {}_2K(-0, \omega_{21}) = 6\,;\ {}_2K(+0, \omega_{22}) = 40\,,$$
$$p_3\colon {}_3K(-0, \omega_{31}) = 7{,}3\,, \quad p_4\colon {}_4K(-0, \omega_{41}) = 7{,}3\,.$$



Obr. 12. Diagram stability se čtyřmi kořeny v pravé polovině roviny p.

Počet kritických frekvencí odpovídá odhadnutému průběhu podle obr. 11, takže je první podmínka stabilita splněna. Diagram stabilních intervalů je na obr. 12, druhý podmínka stability splněna není. Uzavřený obvod má čtyři póly s kladnou reálnou částí.

b) Posuneme-li však nulami doleva, například do bodů $q_1 = -0{,}5 + \mathrm{j}$, $q_2 = -0{,}5 - \mathrm{j}$, potom vychází množina kritických frekvencí

$$[\omega_{\mathrm{kr}}] = [0, -1, 1, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\mathrm{j}, \mathrm{j}]\,,$$

ze které všechny reálné frekvence přísluší záporné zpětné vazbě. Množiny kritických zesílení jsou:

$$p_1\colon {}_1K(+0, \omega_{11}) = 20\,, \quad p_2\colon {}_2K(-0, \omega_{21}) = 6\,;\ {}_2K(+0, \omega_{22}) = 20\,,$$
$$p_3\colon {}_3K(-0, \omega_{31}) = 36\,, \quad p_4\colon {}_4K(-0, \omega_{41}) = 36\,.$$

Diagram stabilních intervalů je na obr. 13, ze kterého vyplývá, že uzavřený obvod je stabilní (nemá póly s kladnou reálnou částí).

c) Volíme-li nuly $q_1 = -0{,}5 + 2\mathrm{j}$; $q_2 = -0{,}5 - 2\mathrm{j}$, potom kořeny rovnice $\mathrm{GM}(\sigma, \omega)$ vycházejí kromě $\omega = 0$ imaginární nebo komplexně sdružené a soustava nesplňuje ani první podmínku. Odhadnutý průběh větví GM je na obr. 14.

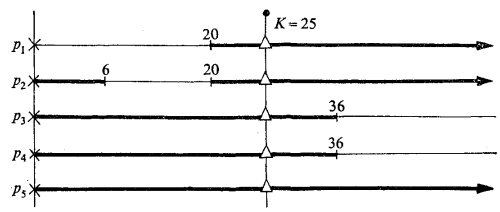
Příklad 2.

Vyšetříme stabilitu obvodu se zápornou zpětnou vazbou, který má přenos rozpojené smyčky

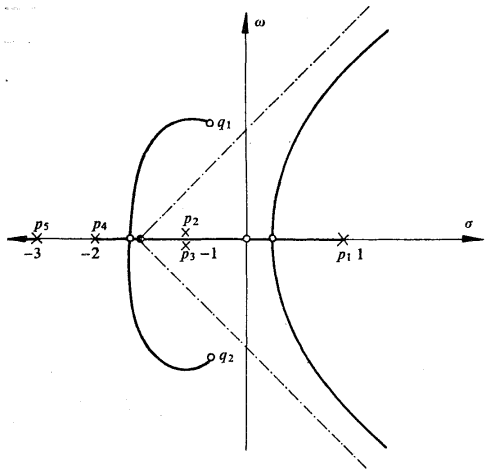
$$KG(p) = \frac{1{,}5(p+1)^2}{[p(p+2)(p+0{,}2)^2]}\,. \tag{18}$$

V tomto příkladě výpočet bude naznačen podrobněji. Polynomy přenosu vycházejí ve tvaru

(19) $$N(p) = p^4 + 2{,}4p^3 + 0{,}84p^2 + 0{,}08p\,,$$
$$M(p) = p^2 + 2p + 1\,.$$



Obr. 13. Diagram stabilní soustavy.



Obr. 14. Průběh trajektorií GM nesplňujících první podmínku stability.

Reálné a imaginární části polynomů [9] vycházejí ve tvaru

(20) $$\mathrm{Re}\ N(p) = (\sigma^4 + 2{,}4\sigma^3 + 0{,}84\sigma^2 + 0{,}08\sigma) - \omega^2(12\sigma^2 + 14{,}4\sigma + 1{,}68)/2! + 24\omega^4/4!$$
$$\mathrm{Im}\ N(p) = \omega(4\sigma^3 + 7{,}2\sigma^2 + 1{,}68\sigma + 0{,}08)/1! - \omega^3(24\sigma + 14{,}4)/3!\,,$$
$$\mathrm{Re}\ M(p) = (\sigma^2 + 2\sigma + 1) - 2\omega^2/2!\,,$$
$$\mathrm{Im}\ M(p) = \omega(2\sigma + 2)/1!\,.$$

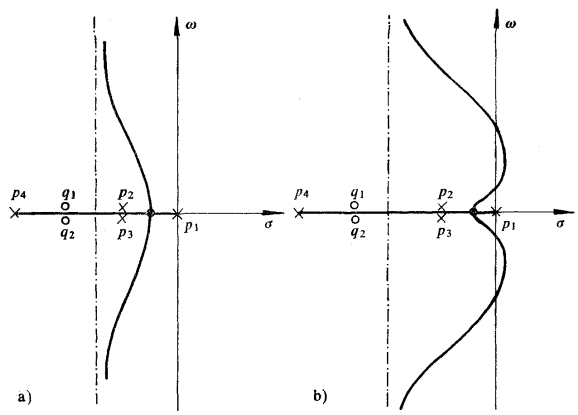
Dosazením $\sigma = 0$ do rovnice (2) počítáme kritické frekvence ze vztahu

(21) $$(\omega^4 - 0{,}84\omega^2)(2\omega) - (0{,}08\omega - 14{,}4\omega^3/6)(1 - \omega^2) = 0\,.$$

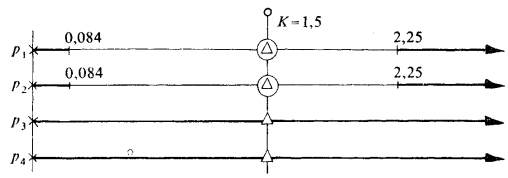
Kritické frekvence

$$[\omega_{kr}] = [0; -0{,}324, +0{,}324, -1{,}38, +1{,}38]$$

pomocí (3) odpovídají záporné zpětné vazbě.



Obr. 15. Skica průběhů větví GM příkladu 2.



Obr. 16. Diagram stability příkladu 2.

Kritická zesílení a parciální derivace podle σ vycházejí číselně takto:

$$K(0, 0) = 0\,; \quad K(0; \pm 0{,}324) = 0{,}084\,;$$

(22) $$\partial K(\sigma, \omega)/\partial\sigma = 0{,}015 \quad \text{pro} \quad \left\{\begin{matrix}\sigma = 0\,, \\ \omega = \pm\, 0{,}324\end{matrix}\right\}\,;$$

$$K(0; \pm 1{,}38) = 2{,}23\,;$$

(23) $$\partial K(\sigma, \omega)/\partial\sigma = -5{,}9 \quad \text{pro} \quad \begin{Bmatrix} \sigma = 0\,, \\ \omega = \pm 1{,}38 \end{Bmatrix}.$$

Pomocí vzorce (16) vidíme, že platí

$$K(-0, \pm 0{,}324) = K_1^-\,,$$
$$K(+0, \pm 1{,}38) = K_2^+\,.$$

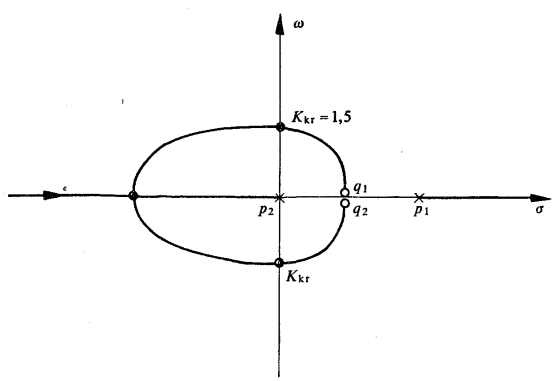
Empiricky navržený průběh větví GM (obr. 15a) je nepřesný. Náčrt skutečného průběhu bude podle obr. 15b. Diagram intervalů stability K na obr. 16 ukazuje, že uzavřený obvod má dva póly s kladnou reálnou částí. Obvod můžeme stabilizovat buď zmenšením činitele zesílení pod 0,084, nebo zvětšením nad 2,23.

Příklad 3.

Při návrhu regulátoru metodou optimálního modulu přenosu [15] se stává, že parametry ústředního členu vycházejí s různými znaménky. Vyšetříme stabilitu soustavy řízení PID regulátorem, kde parametry r_1 a r_{-1} jsou opačného znaménka než r_0. Přenosy bloků a rozpojená smyčky budou definovány rovnicemi

$$F_s(p) = k/(pT - 1)\,; \quad F_r(p) = (-r_1 p^2 + r_0 p - r_{-1})/p\,; \quad T = 1/3\,;$$

(24) $$KG(p) = -\frac{kr_1}{T}\,\frac{p^2 - (r_0/r_1)\,p + (r_{-1}/r_1)}{p(p - 1/T)} = -K\,\frac{(p - q_1)\,(p - q_2)}{p(p - 1/T)}\,.$$



Obr. 17. Průběh větví GM příkladu 3

Předpokládejme, že nuly přenosu q_1 a q_2 jsou stejné, reálné a kladné. Skica větví GM bude podle obr. 17. Vidíme, že vazba je kladná, takže jedna větev GM prochází nekonečně vzdáleným bodem. Limitací výrazu (3) pro $\sigma \to \infty$ vychází kritické zesílení konečné, rovné 1. Odpovídá průsečíku větve GM s kritickou přímkou „zprava".

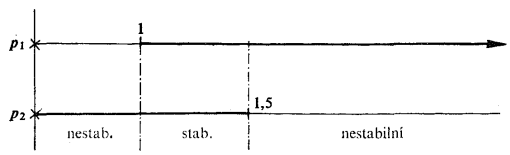
Volíme-li $r_{-1} = r_1$, potom rovnice GM bude

(25) $$\mathrm{GM}(\sigma, \omega) = \omega[\omega^2 + (\sigma + 1)^2 - 4]\,,$$

odkud kritické frekvence stanovíme takto:

$$[\omega_{kr}] = [0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}] .$$

$K(0, 0)$ je rovno nule, takže kritické frekvence kladné vazby zůstávají pouze $\pm\sqrt{3}$. Kritická zesílení $K(0, \pm\sqrt{3})$ jsou rovna 1,5. Diagram stabilních činitelů zesílení je na obr. 18. Z diagramu vyplývá, že musí platit nerovnost $1 < kr_1/T < 1{,}5$, aby soustava byla stabilní.



Obr. 18. Diagram stability příkladu 3

Popsaná metoda využívající funkčních vlastností GM udává jednak počet kořenů uzavřeného obvodu s kladnou reálnou částí, jednak naznačuje opatření, která vedou ke stabilizaci soustavy. Pracnost výpočtů je srovnatelná s kritériem Michajlovovým-Leonhardovým. Postup návrhu zpětnovazebního obvodu nevyžaduje přímý výpočet pólů celkového přenosu. Potřebné schéma průběhu větví GM v rovině p nezmenšuje obecné použití v praxi.

(Došlo dne 14. dubna 1967.)

LITERATURA

[1] W. Hahn: Theory and Application of Liapunov's Direct Method. Prentice Hall, N. Y. 1963.
[2] E. P. Popov: Dynamik automatischer Regelsysteme. Ak. Verl. Berlin 1958, str. 463.
[3] J. Hájek: Jednoduché algebraické podmínky stability. Slaboproudý obzor *20* (1959), 3, 176.
[4] M. F. Gardner, J. L. Barnes: Transients in Linear Systems. John Wiley, N. Y. 1942, str. 197.
[5] A. B. Михайлов: Метод гармонического анализа.... Автоматика и Телемеханика *3* (1938).
[6] B. Heller, A. Veverka: Michajlov-Leonhardovo kritérium stability. Elektrotechnický obzor *42* (1953), 9, 467.
[7] W. R. Evans: Control-system Dynamics. McGraw-Hill, N. Y. 1954, str. 96.
[8] Y. Chu: Synthesis of Feedback Control Systems by Root Locus Method. ISA Journal *1* (1954), 1, 18.
[9] M. Rosenbaum: Funkční vlastnosti trajektorií geometrického místa kořenů. Kybernetika *4* (1968), 1, 63.
[10] O. J. M. Smith: Feedback Control Systems. McGraw-Hill, N. Y. 1958, str. 26.
[11] Š. Schwarz: O rovnicích. JČSMF, Praha 1947, str. 31.
[12] W. Oppelt: Příručka regulační techniky. SNTL, Praha 1958, str. 252.
[13] J. Štěpán: Základy navrhování regulace tepelných energetických zařízení. SNTL, Praha 1963, str. 54.
[14] B. P. Děmidovič, I. A. Maron: Základy numerické matematiky. SNTL, Praha 1966, str. 125.
[15] V. Strejc, M. Šalamon, Z. Kotek, M. Balda: Základy teorie samočinné regulace. SNTL, Praha 1958, str. 98.

Determination of Stability Conditions for Designs by the Method of the Root Locus

MIROSLAV ROSENBAUM

A graphico-algebraic method of the design of a feedback circuit is proposed. This method makes use of functional properties of trajectories of the root locus. The physical objectivity of stability conditions enables the design of eventual measures leading to the stabilization of the feedback loop. The method is applicable even to multiple circuits where the transfer poles of all loops are numerically known. The proposed procedures require the determination of the real positive roots of a polynomial of degree at most $(m + n)/2$, where m is the degree of the polynomial in the numerator and n the degree of the polynomial in the denominator of the transfer of the disconnected loop $KG(p)$. The procedures makes use of topological and empirical properties of trajectories of the root locus.

Dr. Miroslav Rosenbaum, CSc., Vysoká škola chemicko-technologická, katedra automatizace chemických výrob, Technická 1905, Praha 6.