

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ В АЛГОРИТМАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

ИВАН А. МОЧАЛОВ, ЛЕОНИД Б. ПРИГОЖИН

Рассмотрена дискретная задача оптимизации измерений при параметрической идентификации и управлении различными объектами и ее непрерывный аналог, представляющий собой вариационную задачу с ограничениями. Доказана их асимптотическая эквивалентность. В качестве примеров решены задачи оптимизации моментов измерений при начальной настройке стана холодной прокатки, управлении замедлением полосы и экстремальном управлении инерционными объектами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Качество управления в значительной степени определяется точностью поступающей о состоянии управляемого объекта информации. При наличии помех в канале измерения возникает необходимость фильтрации получаемых измерений с использованием модели объекта. В рамках выбранного алгоритма обработки оптимизация процесса измерений может достигаться, например, за счет выбора оптимальной математической модели объекта, оптимального мерного промежутка или наилучшего распределения моментов измерений внутри заданного промежутка. Ниже рассматривается последняя из этих задач в предположении, что частота и общее количество измерений ограничены.

Подобные задачи оптимизации траекторных измерений для определения параметров орбиты искусственного спутника и скорости движения локомотива решены в [1, 2]. Целью настоящей работы является обоснование используемого при решении перехода от дискретной оптимизационной задачи к вариационной, а также решение некоторых новых задач, возникающих при автоматизации объектов черной металлургии, представляющих практический интерес: обработка измерений при начальной настройке стана холодной прокатки, их распределение при управлении замедлением полосы при размотке рулона с неизвестной общей длиной, оптимизация измерений при экстремальном управлении инерционными объектами.

2. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Предположим, что при постоянной настройке входных величин модель объекта управления может быть записана в виде

$$y(t) = G(\beta, t) + \xi(t), \quad t \in [0, T].$$

Здесь t — время, G — известная функция, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ — вектор неизвестных параметров модели поведения выхода, в качестве которых могут выступать, например, неизвестные начальные данные в описывающем поведении объекта дифференциальном уравнении или неизвестные параметры модели объекта, а действующее в канале измерений выхода $y(t)$ возмущение $\xi(t)$ является аддитивным центрированным стационарным случайным процессом с неизвестным законом распределения и ограниченной дисперсией.

В соответствии с алгоритмом управления, изменяющее состояние объекта управляющее воздействие выдается на основании анализа поведения объекта в течение заданного временного промежутка длиной T в зависимости от найденного значения характеристики состояния $\chi = \chi(\beta)$. При этом качество управления зависит от точности получаемой оценки $\hat{\chi}$ этой характеристики.

Оценку параметров состояния β будем находить по измерениям $y = (y_1, \dots, y_p)$, сделанным в моменты $t = (t_1, \dots, t_p)$ с помощью равноточного метода наименьших квадратов (МНК), используемого в качестве алгоритма фильтрации и параметрически зависящего от моментов измерения. Предполагается, что общее число производимых на $[0, T]$ измерений ограничено, $p \leq n$, а интервал между соседними измерениями не может быть меньше некоторой заданной величины τ , представляющей собой суммарное время корреляции помехи и обработки измерения (масштабирования, нормализации и т. п.).

Если функции $G(\beta, t)$ и $\chi(\beta)$ линейно зависят от β или могут быть линеаризованы в окрестности точки $\beta_0 = E\beta$ (E — оператор математического ожидания) с малой, по сравнению с величиной случайного возмущения, погрешностью, в качестве несмещенной оценки характеристики χ можно использовать величину $\hat{\chi} = \chi(\hat{\beta})$, где $\hat{\beta}$ — оценка МНК. Точность оценки $\hat{\chi}$ определяется ее дисперсией

$$D\hat{\chi} = c D\hat{\beta} c^T,$$

где

$$c = (\partial\chi/\partial\beta_1, \dots, \partial\chi/\partial\beta_m)_{\beta=\beta_0}, \quad \text{“Т” — знак транспонирования,}$$

а $D\hat{\beta}$ — дисперсионная матрица оценки $\hat{\beta}$.

Известно [2], что оптимальное число измерений p равно их максимальному числу n , а дисперсионная матрица оценки $\hat{\beta}$ при предположении, что $\xi(t_i)$ и $\xi(t_j)$, $i \neq j$, некоррелированы, выражается через матрицу $Q(t)$ системы нормальных уравнений, возникающих при применении МНК:

$$D\hat{\beta} = \tau\sigma^2 Q^{-1}(t).$$

Здесь σ^2 — дисперсия единичного измерения $\xi(t)$, элементы матрицы $Q(t)$ имеют вид

$$Q_{ij}(t) = \tau \sum_{k=1}^n \psi_i(t_k) \psi_j(t_k), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

где $\psi_i(t) = (\partial G(\beta, t) / \partial \beta_i)_{\beta=\beta_0}$, а параметр τ введен в качестве нормирующего множителя, удобного при переходе к вариационной задаче.

Задачу распределения измерений с целью получения наиболее точной оценки характеристики $\chi(\beta)$ можно записать в виде

$$(1) \quad \max_{t \in \Delta_{n,\tau}} I(Q(t)),$$

где $I(Q(t)) = (cQ^{-1}(t)c^T)^{-1}$, а множество

$$\Delta_{n,\tau} = \{t \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \leq T, t_{i+1} - t_i \geq \tau\}$$

есть множество допустимых совокупностей моментов измерений. Будем предполагать, что функции $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, аналитические и линейно независимые на $[0, T]$, а вектор c отличен от нуля.

Теорема 1. Задача оптимального распределения измерений (1) имеет решение, если $0 < \tau \leq T/(n-1)$ и n достаточно велико.

Доказательство. При $\tau \leq T/(n-1)$ допустимое множество $\Delta_{n,\tau}$ не пусто. Так как оно компактно, достаточно доказать, что функция $I(Q(t))$ непрерывна на этом множестве. С точностью до множителя τ матрица $Q(t)$ является матрицей Грама системы векторов $\Psi_i(t) = (\psi_i(t_1), \dots, \psi_i(t_n))$, $i = 1, \dots, m$. Если показать, что векторы $\Psi_i(t)$ линейно независимы при всех $t \in \Delta_{n,\tau}$ начиная с некоторого n , то матрицы $Q(t)$ будут положительно определены. При этом обратные матрицы $Q^{-1}(t)$ существуют, положительно определены и их элементы, как легко видеть, зависят от t непрерывно на множестве $\Delta_{n,\tau}$.

Из положительной определенности матриц $Q^{-1}(t)$ следует, что $cQ^{-1}(t)c^T > 0$ при всех $t \in \Delta_{n,\tau}$, $c \neq 0$, поэтому функция $I(Q(t))$ корректно определена и непрерывна на $\Delta_{n,\tau}$. Поскольку $\tau > 0$, все координаты векторов $t \in \Delta_{n,\tau}$ различны, и нужное для завершения доказательства утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма. Существует число n_0 такое, что если $n > n_0$ и $t \in \mathbb{R}^n$, причем $0 \leq t_i \leq T$ и $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, то вектора $\Psi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ линейно независимы.

Предположим, что лемма неверна. Тогда для любого n найдутся коэффициенты $\gamma^n = (\gamma_1^n, \dots, \gamma_m^n)$ такие, что $\|\gamma^n\| = 1$ и функция $\psi^n(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i^n \psi_i(t)$ имеет на отрезке $[0, T]$ не менее n нулей. Из последовательности γ^n можно выбрать подпоследовательность, также обозначаемую γ^n , такую, что $\gamma^n \rightarrow \gamma$ в $\mathbb{R}^m$ при $n \rightarrow \infty$.

Аналитическая функция $\psi(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \psi_i(t)$ не равна тождественно нулю, т. к. $\|\gamma\| = 1$, а функции $\psi_i(t)$ линейно независимы. Поэтому она может иметь только изолированные нули внутри своей области регулярности. Выберем внутри области регулярности функций $\psi_i(t)$ ограниченную область Ω , содержащую отрезок $[0, T]$ действительной оси и не имеющую нулей $\psi(t)$ на своей границе $\partial\Omega$. Функции $\psi^n(t)$ сходятся к $\psi(t)$ равномерно на $\partial\Omega$, поэтому существует номер N такой, что $|\psi^n(t) - \psi(t)| < |\psi(t)|$ при всех $n > N$ и всех $t \in \partial\Omega$. По теореме Руше функции $\psi(t)$ и $\psi^n(t) = \psi(t) + (\psi^n(t) - \psi(t))$ должны при этом иметь одинаковое число нулей в области Ω . Так как число нулей $\psi(t)$ в Ω конечно, а функции $\psi^n(t)$ имеют не менее n нулей на отрезке $[0, T]$, приходим к противоречию. Теорема доказана. $\square$

Задача оптимизации распределения измерений (1) является задачей нелинейного программирования с ограничениями, решение которой, ввиду большой размерности, представляет существенные вычислительные трудности. Как в работах [1, 2], связанных с определением параметров движения по результатам наблюдений, задача (1) при большом числе измерений n и малом t может быть заменена более простой вариационной задачей.

Имеющееся обоснование такого перехода [1] основано, однако, на предположении, что $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$ с ростом числа измерений n и измерения являются квазинепрерывными. Так как рассматривается ситуация, когда и t одновременно стремится к нулю так, что $nt = \text{const} < T$, это условие может не выполняться. Как будет показано ниже, оно не выполняется даже для получаемых оптимальных распределений, и существующее обоснование нуждается в коррекции. Приводимое доказательство асимптотической эквивалентности дискретной и вариационной задач не использует предположения о квазинепрерывности измерений.

Излишним является и предположение об устойчивости рассматриваемого критерия оптимальности [1, 2], фактически эквивалентное предположению о существовании решения. Как показано в настоящей работе, указанный критерий непрерывен на множестве допустимых измерений.

3. ПЕРЕХОД К ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Определим матричный функционал $\tilde{Q}(u)$ с элементами

$$\tilde{Q}_{ij}(u) = \int_0^T \psi_i(t) \psi_j(t) u(t) dt$$

для функций $u \in L_2(0, T)$ и рассмотрим вариационную задачу

$$(2) \quad \max I(\tilde{Q}(u))$$

с ограничениями

$$(3) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \text{почти всюду на } [0, T],$$

$$(4) \quad \int_0^T u(t) dt = r,$$

где r — заданное число.

Теорема 2. При $0 < r \leq T$ вариационная задача (2)–(4) имеет решение.

Доказательство. При $0 \leq r \leq T$ множество допустимых функций,

$$\Delta_r = \{u \in L_2(0, T) \mid 0 \leq u \leq 1 \text{ п. вс.}, \int_0^T u dt = r\}$$

непусто, выпукло и замкнуто в $L_2(0, T)$, а следовательно, слабозамкнуто. Так как Δ_r ограничено, оно слабокомпактно, поэтому достаточно установить непрерывность функционала $I(\tilde{Q}(u))$ в слабой топологии. Матрица $\tilde{Q}(u)$ есть матрица Грама функций $\psi_i(t) \sqrt{u(t)}$, $i = 1, \dots, m$, на интервале $(0, T)$. Эта система линейно независима, так как в противном случае некоторая нетривиальная линейная комбинация $\psi = \sum_{i=1}^m \gamma_i \psi_i$ обращается в нуль на множестве

$$\text{supp } u = \{t \in (0, T) \mid u(t) > 0\}$$

определенном с точностью до множества меры нуль. Но $\text{mes}(\text{supp } u) \geq r > 0$ при $u \in \Delta_r$, и аналитическая функция ψ должна тогда быть тождественно равна нулю, что противоречит линейной независимости функций $\psi_i(t)$. Отсюда следует, что матрицы $\tilde{Q}(u)$ положительно определены при всех $u \in \Delta_r$. Элементы $\tilde{Q}_{ij}(u)$ являются, очевидно, слабонепрерывными функционалами в $L_2(0, T)$. Нетрудно видеть, что этими свойствами обладают и обратные матрицы $\tilde{Q}^{-1}(u)$, поэтому функционал $I(\tilde{Q}(u))$ корректно определен и непрерывен на Δ_r в слабой топологии. $\square$

Связь между дискретной задачей оптимального распределения измерений (1) и вариационной задачей (2)–(4) дает

Теорема 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$, причем $0 < n\tau = r \leq T$. Тогда существует

$$\lim_{\mathbf{t} \in \Delta_{n,\tau}} \max I(Q(\mathbf{t})) = \max_{u \in \Delta_r} I(\tilde{Q}(u))$$

и приближенное решение дискретной задачи $\mathbf{t}$ может быть найдено из уравнений

$$i = (1/\tau) \int_0^{\tau} u dt, \quad i = 1, \dots, n,$$

где u — решение вариационной задачи (определяющее, таким образом, плотность распределения измерений).

Доказательство. Пусть $\mathbf{t}^n \in \Delta_{n,\tau}$ — решения дискретных задач. Определим функции $u_n(t) = \tau \sum_k \delta_\tau(t - t_k^n)$, где

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \tau^{-1} & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $\mathbf{t}^n \in \Delta_{n,\tau}$ и $n\tau = r$, функции u_n принадлежат множеству допустимых функций Δ_r при всех n , причем

$$Q_{ij}(\mathbf{t}^n) = \tilde{Q}_{ij}(u_n) + o(\tau)$$

(в случаях, когда $t_1^n < \frac{1}{2}\tau$ или $t_n^n > T - \frac{1}{2}\tau$, функции u_n легко подправить, изменив на множестве с мерой порядка $O(\tau)$).

Множество Δ_r слабокомпактно, поэтому можно выбрать подпоследовательность $n_i \rightarrow \infty$ так, чтобы

$$I(Q(\mathbf{t}^{n_i})) \rightarrow \overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\tau = r}} \max_{\mathbf{t} \in \Delta_{n,\tau}} I(Q(\mathbf{t}))$$

и $u_{n_i} \rightarrow u_0 \in \Delta_r$ слабо в $L_2(0, T)$. При этом $Q_{ij}(\mathbf{t}^{n_i}) \rightarrow \tilde{Q}_{ij}(u_0)$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I(Q(\mathbf{t}^{n_i})) = I(\tilde{Q}(u_0)),$$

откуда

$$(5) \quad \overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\tau = r}} \max_{\mathbf{t} \in \Delta_{n,\tau}} I(Q(\mathbf{t})) \leq \max_{u \in \Delta_r} I(\tilde{Q}(u)).$$

Наоборот, пусть $u_0 \in \Delta_r$ — решение вариационной задачи. Для $\tau = r/n$ определим совокупности моментов измерений $\mathbf{t}^n$ с помощью уравнений

$$i = \tau^{-1} \int_0^{t_i^n} u_0(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из условий $0 \leq u_0 \leq 1$ п. в. с. и $\int_0^T u_0 dt = r$ следует, что $\mathbf{t}^n \in \Delta_{n,\tau}$ и $t_n^n = T$. Положим $t_0^n = 0$. Для любой непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T g u_0 dt - \tau \sum_{k=1}^n g(t_k^n) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} (g(t) - g(t_k^n)) u_0(t) dt \right| \leq \\ &\leq \tau \sum_{k=1}^n \max_{t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]} |g(t) - g(t_k^n)| \leq \tau T \max_{t \in [0, T]} |g'(t)|. \end{aligned}$$

Поэтому $Q_{ij}(\mathbf{t}^n) \rightarrow \tilde{Q}_{ij}(u_0)$. Нетрудно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(Q(\mathbf{t}^n)) = I(\tilde{Q}(u_0)),$$

откуда

$$(6) \quad \underline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\tau = r}} \max_{\mathbf{t} \in \Delta_{n,\tau}} I(Q(\mathbf{t})) \geq \max_{u \in \Delta_r} I(\tilde{Q}(u))$$

и утверждение теоремы следует из (5) и (6). $\square$

4. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Особенностью вариационной задачи является ограничение (3), которое должно выполняться поточечно (почти всюду). Запишем задачу (2)–(4) в виде

$$\max_{\substack{f(u)=0 \\ u \in \Delta}} I(\tilde{Q}(u)),$$

где $f(u) = r - \int_0^T u \, dt$, а $A = \{u \in L_2(0, T) \mid 0 \leq u \leq 1 \text{ п. в.с.}\}$ и снимем сначала функциональное ограничение (4) используя правило неопределенных множителей Лагранжа.

Пусть u_0 — решение. Тогда, как легко показать,

$$(I'(u_0), u_0) = \max_{\substack{f(u)=0 \\ u \in A}} (I'(u_0), u),$$

где $I'(u_0)$ — производная по Фреше функционала $I(\tilde{Q}(u))$ в точке u_0 , а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(0, T)$. Функционал f аффинный, а множество A выпукло, причем его образ при отображении f содержит окрестность нуля в $\mathbb{R}^1$, если $0 < r < T$. Отсюда следует [3], что существует множитель Лагранжа λ такой, что в точке u_0 достигается

$$(7) \quad \max_{u \in A} L(u, \lambda)$$

лагранжиана

$$L(u, \lambda) = (I'(u_0), u) + \lambda f(u).$$

Вычислим $I'(u)$. Пусть $P(u) = \tilde{Q}^{-1}(u)$ — обратная матрица и $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_m(t))$ — вектор базисных функций. Тогда $P'(u) = -P(u) \tilde{Q}'(u) P(u)$, $\tilde{Q}'(u) \equiv \psi' = \psi'(t) \cdot \psi(t)$ и из определения функционала I имеем

$$(8) \quad I'(u) = (c P(u) \psi')^2 / (c P(u) c^T)^2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^u \psi_i(t) \right)^2,$$

где $v_i^u = \left(\sum_{j=1}^m c_j P_{ij}(u) \right) / (c P(u) c^T)$ — зависящие от u коэффициенты.

Выпишем, следуя [4] (см., также, [5]), необходимые условия оптимальности для задачи (7) и подставим в них функцию $u = u_0$. Получающиеся при этом соотношения являются необходимыми условиями оптимальности в задаче (2)–(4).

Обозначим $Z^u(t) = I'(u)|_t$. Будем предполагать, что условие регулярности функционала $L(\cdot, \lambda)$

$$(9) \quad Z^u(t) - \lambda \neq 0 \quad \text{почти всюду на } (0, T)$$

выполнено при $u = u_0$ и любом λ . (С учетом формулы (8) и аналитичности функций $\psi_i(t)$ для этого достаточно, например, чтобы система $\{1, \psi_1(t), \dots, \psi_m(t)\}$ была линейно независимой). Тогда необходимое условие оптимальности может быть записано в виде операторного уравнения Трухаева-Хомея [4]

$$(10) \quad u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(Z^u(t) - \lambda)).$$

Из полученного уравнения следует, что с точностью до эквивалентности в $L_2(0, T)$ решением вариационной задачи является релейная функция, принимающая значения нуль или единица и имеющая конечное число точек переключения, принадлежащих некоторому множеству уровня функции $Z^u(t)$.

Совместное определение моментов переключения $u(t)$ и множителя λ из уравнений (4) и (10) может быть проведено численно с помощью итераций [1, 2], а в некоторых случаях — аналитически.

Если функция $G(\beta, t)$ не зависит от времени, то критерий оптимальности $I(Q(t))$ обращается на $\Delta_{n,t}$ в константу и все допустимые распределения измерений эквивалентны по точности получаемой оценки. Легко видеть, что и функционал $I(\tilde{Q}(u))$ принимает то же самое значение на всех функциях $u \in \Delta_t$ (условие регулярности (9) не выполнено). Более содержательные примеры рассмотрены в пп. 5–7.

5. ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НАЧАЛЬНОЙ НАСТРОЙКЕ СТАНА ХОЛОДНОЙ ПРОКАТКИ

Одной из важнейших задач управления станом холодной прокатки является его начальная настройка, обеспечивающая заданный технологический режим с помощью локальных систем регулирования толщины и натяжения, скорости стана и положения нажимных винтов. Расчет выдаваемых для этого в локальные системы уставок производится на управляющей вычислительной машине с помощью математических моделей прокатки [6, 7]. Так как характеризующие трение в очаге деформации и пластичность металла параметры модели, как правило, известны не точно, они идентифицируются по полученным от установленных на стане датчиков значениям толщин, натяжений, усилий прокатки, токов и напряжений на главных приводах, скоростей вращения рабочих валков, скорости полосы и т. д., после накопления и фильтрации измерений.

Рассмотрим обработку измерений для установившегося режима прокатки при заданном $[0, T]$. Математические модели для определения непосредственно измеряемых параметров — толщин, натяжений, усилий прокатки, токов и напряжений на главных приводах имеют вид

$$y(t) = \beta_1 + \xi(t),$$

где β_1 — неизвестная константа, подлежащая оценке по МНК. В этом случае (п. 4) все допустимые распределения моментов измерений по точности определения МНК оценки β_1 эквивалентны, поэтому обычно выбирается стратегия равномерных отсчетов, которая имеет наиболее простую техническую реализацию.

Линейная скорость полосы и угловые скорости вращения валков не измеряются непосредственно, а их определение с помощью дифференцирования пути (угла) по времени при значительном уровне возмущений может приводить к большим погрешностям ввиду некорректности численного дифференцирования.

В связи с этим для определения скоростей в установившемся режиме целе-

сообразно использовать модель изменения пути (угла) вида

$$(11) \quad y(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \xi(t)$$

и распределять моменты измерений так, чтобы дисперсия МНК оценки $\hat{\beta}_2$ была минимальной. В этом случае $\mathbf{c} = (0, 1)$ и

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq (n\tau/2) \text{ или } T - (n\tau/2) \leq t \leq T \\ 0, & \text{при } (n\tau/2) < t < T - (n\tau/2), \end{cases}$$

где τ — минимальный промежуток времени между соседними измерениями. Оптимальное распределение моментов измерений состоит из двух групп с одинаковым количеством измерений в каждой из них. Измерения производятся с максимально возможной частотой τ^{-1} . Можно показать, что максимальный выигрыш от использования оптимального распределения измерений по сравнению с равномерными отсчетами при нахождении МНК оценки $\hat{\beta}_2$ достигается в пределе и равен

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{D\hat{\beta}_2^n}{D\hat{\beta}_2} = 3,$$

где $D\hat{\beta}_2^n$ — дисперсия $\hat{\beta}_2$ при равномерных отсчетах, $D\hat{\beta}_2$ — при оптимальных. С другой стороны

$$\lim_{\tau \rightarrow Tn^{-1}} \frac{D\hat{\beta}_2^n}{D\hat{\beta}_2} = 1$$

и в этом случае выигрыша нет, так как оптимальное распределение измерений совпадает с равномерным.

При незначительном уровне $\xi(t)$ при идентификации скорости используется численное дифференцирование пути (угла) по времени. Модель скорости в этом случае аналогична модели для непосредственно измеряемых параметров, поэтому отсчеты целесообразно располагать равномерно.

Аналогично, в режимах разгона или торможения стана для идентификации ускорений при незначительном уровне $\xi(t)$ используется модель типа (11), $\mathbf{c} = (0, 1)$ и отсчеты располагаются на концах $[0, T]$. При значительном $\xi(t)$ используется модель изменения пути (угла)

$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \frac{1}{2} t^2 + \xi(t).$$

Можно показать, используя численные методы решения уравнения (10), что оптимальные по точности получения оценок ускорения β_3 и скорости β_2 распределения измерений состоят из трех групп измерений, проводимых с максимально возможной частотой.

6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ПОЛОСЫ

Задача управления движением полосы при размотке рулона с неизвестной общей длиной возникает при автоматизации линий с порулонной обработкой материалов, например, линий непрерывной прокатки, дрессировки, очистки или отжига полосы. Для решения этой задачи смотанные длины полосы y_i измеряются для углов φ_i поворота разматывателя, по полученным измерениям с использованием математической модели размотки оценивается длина остатка полосы на разматывателе, которая сравнивается с длиной тормозного пути L_0 .

В результате получается алгебраическое уравнение, степень которого зависит от модели размотки, а корень определяет угол поворота разматывателя φ_0 , при котором следует выдать команду на торможение.

В случае тонкой полосы постоянной толщины модель размотки [8] имеет вид

$$y(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi))^{1/2} d\varphi + \xi(\varphi) = \beta_1 + \beta_2 \varphi + \delta(\varphi) + \xi(\varphi).$$

Здесь y — длина остатка полосы, r — текущий радиус рулона, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ — вектор идентифицируемых в темпе с процессом параметров модели, $\delta(\varphi)$ — погрешность линеаризации, не превосходящая величины

$$(4\pi)^{-1} h_0 \ln(1 + h_0 r^{-1})$$

h_0 — толщина полосы, а $\xi(\varphi)$ — случайное возмущение, вызванное проскальзыванием измерительного ролика, изменением плотности намотки полосы по радиусу рулона и другими причинами.

Предположим, что на заданном промежутке измерений $\varphi \in [0, T]$ величина $\delta(\varphi)$ мала по сравнению с $\xi(\varphi)$ и погрешностью линеаризации можно пренебречь. Как показано в [9], для определения угла φ_0 начала замедления необходимо решить уравнение

$$\hat{K}\varphi^2 + \hat{L}\varphi + \hat{M} = 0,$$

где

$$\hat{K} = (2\pi)^{-2} \beta_1^2, \quad \hat{L} = (2\pi)^{-1} \beta_1(2\beta_1 - \beta_2),$$

$$\hat{M} = (2(L_0 - A) - \pi D_b + \beta_1) \beta_2 - (\pi D_b)^2,$$

φ_0 — арифметический корень уравнения, A — расстояние между разматывателем и технологическим аппаратом, D_b — известный внутренний диаметр рулона, а β_1, β_2 — оценки МНК.

Эффективность управления движением полосы определяется точностью выбора момента начала торможения и характеризуется дисперсией $D\hat{\chi}$ оценки величины $\chi = \varphi_0$. Пусть заданы минимальный угол поворота разматывателя между соседними измерениями τ и общее число измерений n . Тогда для оптимального распределения углов измерения длины можно воспользоваться

решением вариационной задачи (2)–(4), в которой вектор частных производных

$$c = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \chi}{\partial \beta_2} \right) \Big|_{\beta_0 = \hat{E} \hat{\beta}}$$

находится по правилу дифференцирования неявных функций. Нетрудно убедиться (для более общего случая доказательство дано в п. 7), что условие регулярности (9) выполнено. Согласно (8), $Z^u(\varphi) = (v_1^u + v_2^u \varphi)^2$,

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_a \quad \text{или} \quad \varphi_b \leq \varphi \leq T, \\ 0 & \text{при } \varphi_a < \varphi < \varphi_b \end{cases}$$

где φ_a, φ_b — точки переключения, являющиеся корнями уравнения

$$Z^u(\varphi) = \lambda \quad \text{и удовлетворяющие соотношению}$$

$$\varphi_a + T - \varphi_b = n\tau.$$

Исключая множитель Лагранжа λ получим

$$\varphi_a = -\frac{T - n\tau}{2} - \frac{v_1^u}{v_2^u}, \quad \varphi_b = \frac{T - n\tau}{2} - \frac{v_1^u}{v_2^u}.$$

Выразим коэффициенты матрицы $\tilde{Q}(u)$ через φ_a и φ_b и определим v_1^u/v_2^u из уравнения

$$\frac{v_1^u}{v_2^u} = \frac{c_1 P_{11} + c_2 P_{12}}{c_1 P_{12} + c_2 P_{22}} = \frac{c_1 \tilde{Q}_{11} - c_2 \tilde{Q}_{12}}{-c_1 \tilde{Q}_{12} + c_2 \tilde{Q}_{22}}.$$

Положим для упрощения дальнейших расчетов $L_0 - A = \pi(D_b + D_0)$, где D_0 — внешний диаметр рулона, тогда $c_2 = 0$ и после преобразований имеем

$$\frac{v_1^u}{v_2^u} = -\frac{4T^3 - (T - n\tau)^3}{6T^2}$$

и, следовательно, моменты переключения найдены.

В соответствии с полученным решением, оптимальное распределение моментов измерений состоит из двух групп с количеством измерений $n_1 = [\varphi_a \tau^{-1}]$ и $n_2 = n - n_1$, где $[\cdot]$ — целая часть, расположенных на концах промежутка измерений. В каждой из групп измерения проводятся с наибольшей возможной частотой. Например, для исходных данных $T = 100\pi$, $\tau = \pi$, $n = 10$, $h_0 = 0,2$, получим $\varphi_a = 9,5\pi$, $\varphi_b = 99,5\pi$ и $n_1 = 9$, $n_2 = 1$.

Эффективность оптимального распределения моментов измерений по сравнению с равномерными отсчетами иллюстрируется зависимостью (рис. 1). Здесь $f = (D\phi_0^p)(D\phi_0)^{-1}$, где $D\phi_0^p$ — дисперсия ϕ_0 при равномерных отсчетах, $D\phi_0$ — при оптимальных. Нетрудно показать, что

$$\lim_{\tau \rightarrow Tn^{-1}} [(D\phi_0^p)(D\phi_0)^{-1}] = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} [(D\phi_0^p)(D\phi_0)^{-1}] = 4.$$

На рисунке сплошные кривые соответствуют f при расчетах дисперсионных матриц, элементы которых — интегральные функционалы, пунктирные —

конечные суммы. При намотке в рулон полосы жести толщиной меньше 0,2 мм на моталке стана холодной прокатки иногда возникает брак, связанный со сминанием внутренних витков рулона. Один из способов его устранения

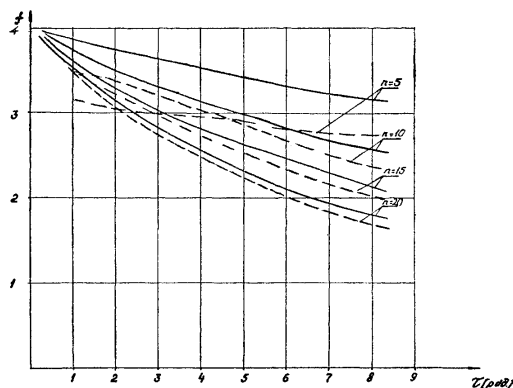


Рис. 1. Зависимость эффективности f оптимального распределения моментов измерений от их числа n и минимального угла U поворота развертывателя между соседними измерениями. Сплошные кривые получены при расчетах f из решения вариационной задачи, пунктирные кривые — при расчетах через конечные суммы.

состоит в получении на выходе стана горячей прокатки рулона со значительными утолщениями на концах полосы. В этом случае при управлении движением полосы при обработке ее на агрегатах цеха жести по мере приближения окончания размотки может возникнуть большая ошибка в определении момента торможения, связанная с невыполнением принятой в модели размотки гипотезы о неизменности толщины полосы по длине. Для повышения точности системы управления следует использовать модель, учитывающую изменение толщины. Можно показать, что если принять в качестве гипотезы линейный характер изменения толщины по длине полосы, для определения момента замедления необходимо решать алгебраическое уравнение третьей степени, а моменты измерений при этом распределяются на три группы.

7. ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В УСКОРЕННОМ АЛГОРИТМЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Зависимость температурного режима методической печи стана горячей прокатки от соотношения расходов газа и воздуха, как показали исследования, имеет в стационарных условиях экстремальный характер (рис. 2), а в нестационарных

нарных обладает транспортным запаздыванием и значительной инерционностью [10–12]. Для экономичного управления процессом нагрева применяется поисковый экстремальный регулятор, входящий в состав системы автоматизации.

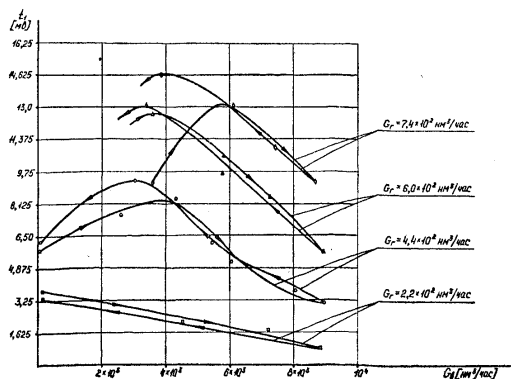


Рис. 2. Статические характеристики методической печи прокатного стана. t_1 — напряжение в [мВ] на выходе оптической головки радиационного пирометра, свизированной на факел горелки, G_b — расход воздуха [$\text{м}^3/\text{час}$], G_t — расход газа [$\text{м}^3/\text{час}$], м^3 — объем газа при нормальном атмосферном давлении.

ческой оптимизации режима горения топлива. Для улучшения характеристик поиска используется обработка измерений за время протекания переходного процесса на выходе объекта при импульсном воздействии на его вход. Это позволяет уменьшить вредное влияние инерционности, а также учесть запаздывание. Для эффективной борьбы с помехами на выходе объекта используется накопление измерений с обработкой их по МНК за время протекания переходного процесса. Рассмотрим задачу об оптимальном распределении измерений для одного из наиболее перспективных алгоритмов экстремального регулирования — алгоритма с прогнозированием установившегося значения выхода объекта оптимизации.

Пусть идеализированная модель объекта (рис. 3) состоит из экстремального звена с неизвестной статической характеристикой $y^* = f(x)$, соединенного последовательно с линейным звеном, описываемым обыкновенным дифференциальным уравнением $(m - 1)$ -го порядка с известными постоянными коэффициентами. За начало отсчета примем момент появления на выходе отклика на очередное поисковое смещение входа $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $|\Delta x_j| = \text{const}$.

При этом выход объекта описывается соотношением

$$y(t) = \psi(t) \cdot \beta^T + \xi(t),$$

в котором неизвестные коэффициенты β зависят от начальных данных и функции f , а вектор базисных функций

$$\psi(t) = (1, \exp(-t T_1^{-1}), \dots, \exp(-t T_{m-1}^{-1})),$$

если все постоянные времени объекта T_i различны. Предполагается, что $T_i > 0$, $i = 1, \dots, m-1$.

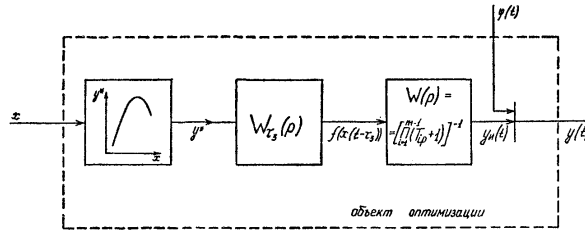


Рис. 3. Идеализированная модель объекта оптимизации.

Критерием качества работы экстремального импульсного регулятора является вероятность ложного поискового смещения, при нормальном распределении помехи $\xi(t) \sim N(0, \sigma^2)$ равная [10, 12]

$$(12) \quad p_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}t^2) dt,$$

где $\vartheta = -E\chi/(D\chi)^{1/2}$, а χ — показатель качества. В случае алгоритма с прогнозированием $\chi = \beta_1$.

Из формулы (12) следует, что при использовании этого алгоритма для уменьшения вероятности ложного шага моменты производимых на заданном интервале $[0, T]$ измерений кривой отклика следует выбирать из условия минимизации $D\beta_1$ или, что то же самое, исходя из критерия (1), в котором $c = (1, 0, \dots, 0)$. При большом числе измерений для поиска их оптимального распределения можно, как было показано, использовать вариационную задачу (2)–(4), решение которой носит релейный характер, если условие регулярности (9) выполнено. Система функций $\{1, \psi_1, \dots, \psi_m\}$ линейно зависима, т. к. $\psi_1 = 1$, поэтому выполнение условия регулярности нуждается в проверке.

Определяющие $Z^u(t)$ коэффициенты v_i^u при $c = (1, 0, \dots, 0)$ имеют вид

$$v_i^u = \frac{P_{1i}(u)}{P_{11}(u)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Какова бы ни была функция $u \in \Delta$, среди элементов P_{1i} , $i = 2, \dots, m$, матрицы $P(u)$ найдутся отличные от нуля, иначе, по определению обратной матрицы,

$$1 = \sum_{i=1}^m P_{1i} \tilde{Q}_{i1} = P_{11} \tilde{Q}_{11} \quad \text{и} \quad 0 = \sum_{i=1}^m P_{1i} \tilde{Q}_{i2} = P_{11} \tilde{Q}_{12}$$

Но $\bar{Q}_{12}(u) > 0$ при $u \in A$, и эти равенства противоречат друг другу. Отсюда следует, что в выражении $Z^u(t) = (\sum_i v_i^u \psi_i(t))^2$ при всех $u \in A$, есть экспоненты с ненулевыми коэффициентами и условие (9) выполнено.

В случае объекта первого порядка ($m = 2$) задача (2)–(4) решается аналитически [13]. Ее решение

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq t_a \text{ или } t_b \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t_a < t < t_b \end{cases}$$

имеет две точки переключения

$$t_a = -T_1 \ln((-1 + \sqrt{\lambda}) \beta_2^{-1}), \quad t_b = -T_1 \ln((-1 - \sqrt{\lambda}) \beta_2^{-1}),$$

где

$$\lambda = \left(\exp\left(-\frac{T - n\tau}{T_1}\right) - 1 \right)^2 \left(\exp\left(-\frac{T - n\tau}{T_1}\right) + 1 \right)^{-2}$$

$$\beta_2 = -2(1 + \exp(-T/T_1))^{-1}.$$

Это означает, что оптимально проводимые измерения должны состоять

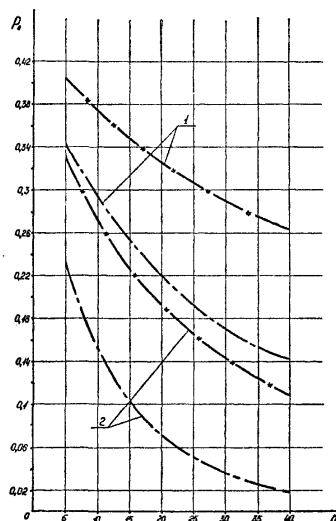


Рис. 4. Зависимость вероятности ложного поискового смещения p_0 от числа n измерений выхода объекта. Кривые 1 — $T_1 = 10$ сек, $T = 5$ сек, $\tau = 10^{-2}$ сек; 2 — $T_1 = T = 10$ сек, $\tau = 10^{-2}$ сек.

—*—*— равномерные отсчеты, — — — — оптимальные отсчеты.

из двух групп измерений с числом измерений $n_1 = [t_d \cdot \tau^{-1}]$ и $n_2 = n - n_1$, проводимых с наибольшей возможной частотой, соответственно, в начале и конце интервала наблюдений.

Сравним вероятности ложного поискового смещения $p_0(n)$ при оптимально и равномерно распределенных измерениях. Пусть $f(x) = |x|$, $T = T_1 = 10$, $\tau = 10^{-2}$, $\xi(t) \sim N(0, \sigma^2)$. Построенные с использованием формулы (12) графики (рис. 4) показывают, что оптимальное распределение измерений существенно повышает помехоустойчивость экстремального регулирования.

При экстремальном регулировании с учетом вертикального дрейфа имеем базисные функции $\psi(t) = (1, \exp(-t T_1^{-1}), t)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 1)$, $Z''(t) = (v_1 + v_2 \exp(-t T_1^{-1}) + v_3 t)^2$. Нахождение моментов переключения $u(t)$ связано с необходимостью использования численных методов. Однако можно показать, что для объекта с $T_1 \gg T$ функция $u(t)$ имеет две точки переключения. Поэтому моменты измерений также должны располагаться на концах промежутка $[0, T]$.

В рассмотренной задаче постоянные времени объекта являются известными величинами. В [14, 15] синтезированы и исследованы алгоритмы совместной идентификации этих величин и ускоренной оптимизации инерционных объектов. Для этого используется кусочно-постоянная аппроксимация неизвестных параметров и их идентификация по модифицированному методу Прони или по методу дополнительных интегральных переменных с обработкой текущих измерений по МНК. Особенностью этих методов является необходимость размещения измерений на временной сетке с постоянным шагом. Можно показать, однако, что оптимальные для целей идентификации моменты измерений распределены неравномерно и сосредоточены вблизи концов мерного промежутка. При таком распределении измерений прямое применение указанных методов невозможно. Другой подход связан с применением метода моментов [16] и МНК. В этом случае равномерное распределение измерений не обязательно.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача оптимального распределения измерений, как доказано в настоящей работе, асимптотически эквивалентна более простой вариационной задаче. На практике, однако, минимальный интервал между наблюдениями и общее число измерений принимают конкретные, определяемые техническими возможностями системы управления и характером помехи конечные значения. В связи с этим оценка близости приближенного решения исходной оптимизационной задачи, получаемого из решения вариационной задачи, к оптимальному распределению измерений представляет существенный интерес.

В настоящее время этот вопрос остается открытым. Тем не менее, приведенные в статье практические примеры показывают, что использование полу-

чаемых таким образом распределений моментов измерений значительно выгоднее равномерного распределения с точки зрения точности получаемых оценок и эффективности управления.

Приведенные примеры решения задач оптимизации измерений при автоматизации объектов черной металлургии можно распространить на более сложные случаи. Рассмотренный метод применим и для систем с распределенными параметрами [17, 18].

(Поступила в редакцию 4-ого июня 1986 г.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Н. Козлов: Об оптимизации процесса траекторных измерений. Космические исследования (1971), 9, 3—16.
- [2] П. Е. Эльясберг: Определение движения по результатам измерений. Наука, Москва 1976.
- [3] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров: Теория экстремальных задач. Наука, Москва 1974.
- [4] Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк: Теория неклассических вариационных задач. Издательство Ленинградского университета, Ленинград 1971.
- [5] A. M. Brandt, ed.: Criteria and Methods of Structural Optimization. Polish Scientific Publishers, Warszawa. 1984.
- [6] G. F. Bryant, ed.: Automation of Tandem Mills. Iron and Steel Institute, London 1973.
- [7] В. Робертс: Холодная прокатка стали. Металлургия, Москва 1982.
- [8] Л. А. Зуева, И. А. Мочалов: Смещение оценок длины рулона при температурном клине. Известия ВУЗ'ов. Черная металлургия (1982), 3, 62—68.
- [9] И. А. Мочалов, А. Л. Вишняк: Алгоритм управления замедлением движения полосы в агрегатах листоотделки. Приборы и системы управления (1980), 3, 12—14.
- [10] В. В. Казакевич, И. А. Мочалов: О количестве измерений при экстремальном управлении инерционными объектами. Автоматика и телемеханика (1973), 10, 109—115.
- [11] В. В. Казакевич, А. Б. Родов: Системы автоматической оптимизации. Наука, Москва 1977.
- [12] В. В. Казакевич, И. А. Мочалов: Статистическое исследование некоторых алгоритмов управления инерционными объектами оптимизации при наличии дрейфа. Автоматика и телемеханика (1974), 11, 49—56.
- [13] В. В. Казакевич, И. А. Мочалов, Л. Б. Пригожин: Оптимизация измерений в ускоренных алгоритмах экстремального управления. Автоматика и телемеханика (1986), 9, 75—86.
- [14] В. В. Казакевич, И. А. Мочалов: Совместная идентификация и ускоренная оптимизация инерционных объектов. Автоматика и телемеханика (1984), 9, 62—73.
- [15] В. В. Казакевич, И. А. Мочалов: Поинсковые алгоритмы ускоренной оптимизации нестационарных объектов. Kybernetika 21 (1985), 6, 382—404.
- [16] D. M. E. Cook: On Investigation into exponential fitting by the method of moments. Computer Science and System Division. AERE Harwell (1980), HL 801, 2651 (C 13).
- [17] Г. А. Башкина, А. Г. Дьячко, Е. Г. Клейман, И. А. Мочалов: Адаптивная идентификация распределенных систем при размытом наблюдении. Kybernetika 19 (1983), 1, 66—75.
- [18] Г. А. Башкина, Е. Г. Клейман, И. А. Мочалов: Адаптивный алгоритм идентификации для систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика (1982), 1, 85—93.

И. А. Мочалов, к. т. н., Л. Б. Пригожин, Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт по автоматизированному электроприводу в промышленности, сельском хозяйстве и на транспорте. 107078 Москва, Садовая-Спаская ул., д. 1/2, корп. 2, СССР.