KYBERNETIKA — TOME 15 (1979), NOMBRE 4

Entropies, dimensions et représentation d'observations

JEAN SALLANTIN, THIERRY VAN DER PYL

Il existe en théorie de l'information différentes méthodes pour construire la représentation d'observations qu'il est possible de faire sur un ensemble d'objets. Si la construction de ces représentations nécessite différentes hypothèses, qui sont déterminées par la structure logique admise pour l'ensemble des observations [10], on peut cependant remarquer que toutes vérifient les conditions suivantes:

— Il est possible de trouver un espace X dans lequel tous les objets sont décrits selon un même processus.

— Il existe un ensemble d'objets appelé ensemble d'apprentissage sur lequel on sait comment chaque observation se vérifie, i.e. où l'on détermine pour chaque observation et pour chaque objet de l'ensemble un indice de vérification. Cette connaissance et les hypothèses de structure de la méthode utilisée permettent de généraliser la vérification de chaque observation à l'ensemble de tous les objets.

Notre étude porte sur la façon d'évaluer l'indécision sur une représentation d'observations. Nous aurons à comparer soit diverses représentations de la même observation sur le même ou sur différents espaces de description des objets, soit à comparer les représentations de diverses observations sur un même espace de description des objets.

Etant donné un ensemble Ω d'objets, un espace X de description de ces objets, une observation "a" qu'il est possible de faire sur ces objets, une application fa de X dans $[0, 1]$, ($fa(x)$ sera l'indice de vérification de l'observation a pour les objets de même description x dans X), nous cherchons à évaluer l'indécision sur l'observation a.

Pour cela nous utiliserons une fonction g de $[0,1]$ dans $\boldsymbol{R}^+$, nulle pour $fa(x) = 0$ et pour $fa(x) = 1$, symétrique par rapport à $1/2$, et maximale pour $fa(x) = 1/2$.

Il existe une infinité de telles fonctions g. Aussi est-il intéressant de faire sur g les hypothèses qui servent à définir, en général, les mesures d'information (ou "entropies", ou "informations") en théorie de l'information.

Parmi les mesures d'information vérifiant les hypothèses minimales que nous nous sommes fixeés, une classe d'information à deux paramètres α et β, notée $\mathscr{F}_{\alpha,\beta}$, est particulièrement intéressante: ce sont les informations d'ordre α et de type β, [7], qui regroupent les diverses informations probabilistes connues: [12].

Soit F une distribution complète de n éléments positifs ou nuls: $F = (f_1, \ldots, f_n)$ avec $f_i \geqq 0$ pour tout $i = 1 \ldots n$ et $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$.

L'information d'ordre α et de type β sur la distribution F est définie par:

$$I^*(F,\alpha,\beta) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^\alpha\right)^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1}{2^{1-\beta} - 1} \qquad \text{si } \alpha \geqq 0 \quad \text{et } \alpha \neq 1$$

et

$$I^*(F, 1,\beta) = \frac{2^{(\beta-1)\sum_{i=1}^{n} f_i \log f_i} - 1}{2^{1-\beta} - 1} \quad \text{si} \quad \alpha = 1\,.$$

Le logarithme utilisé est à la base 2, et nous avons fait ici la convention $0^\alpha = 0$ pour $\alpha \geqq 0$.

On vérifie que:

- pour $\alpha = \beta = 1$, on a l'information de Shannon [11],
- pour $\beta = 1$, on a l'information d'ordre α (ou de Rényi) [9],
- pour $\alpha = \beta$, on a l'information de degré α [5],
- pour $\beta = 2 - (1/\alpha)$, on a l'information d'espèce $\gamma = 1/\alpha$ [1].

Nous nous intéressons ici aux distributions $Fa(x)$ à deux éléments:

$$Fa(x) = (fa(x)\,, \quad 1 - fa(x)).$$

Nous noterons $G_{\alpha,\beta}(fa(x)) = I^*(Fa(x), \alpha, \beta)$.

Définition 1. Soit une observation a, soit une description $x \in X$, l'indécision de l'observation a au point x est définie par $G_{\alpha,\beta}(fa(x))$.

Remarques.

- $G_{\alpha,\beta}(0) = G_{\alpha,\beta}(1) = 0$,
- $G_{\alpha,\beta}(1/2) = 1$,
- $G_{0,\beta}(fa(x)) = 1$ pour $fa(x) \in]0,1[$ et $G_{0,\beta}(0) = G_{0,\beta}(1) = 0$.

Si l'ensemble de description est fini, il est possible de mesurer l'indécision sur la vérification d'une observation en considérant par exemple la somme sur X des indécisions. Il arrive cependant que l'espace de description X ne soit pas de cardinal fini. Par exemple, si les objets sont des courbes de $\boldsymbol{R}^2$ (c'est le cas si nous analysons des "contours") une description peut être constituée par les composantes d'une décomposition sur une famille de n fonctions orthogonales; les descriptions des objets sont alors situées dans $\boldsymbol{R}^n$ sans qu'il soit possible de supposer qu'elles forment une partie mesurable au sens de la métrique usuelle dans $\boldsymbol{R}^n$.

Nous pouvons donc nous trouver dans la situation suivante:

$$X \subset \boldsymbol{R}^n\,, \quad \int_X G_{\alpha,\beta}(fa(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\sum_X G_{\alpha,\beta}(fa(x)) \quad \text{non défini}\,.$$

Nous allons alors rechercher pour chaque indécision $G_{\alpha,\beta}$, dépendant de la mesure d'information de la famille $\mathscr{F}_{\alpha,\beta}$, le "meilleur" type de sommation. Pour cela nous considérerons des sommations analogues à celles qui permettent de définir les mesures de Hausdorff [3], et la dimension de Hausdorff [3] d'un ensemble.

Définition 2. [6] Soit $\boldsymbol{R}^n$ muni de la métrique ϱ suivante:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

deux éléments de $\boldsymbol{R}^n$,

$$\varrho(x, y) = \max_{1 \leqq i \leqq n} \{|x_i - y_i|\}\,.$$

Les fonctions positives croissantes h définies sur $\boldsymbol{R}^+$ et vérifiant $h(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$, définissent une mesure extérieure μ^h:

$$\forall A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n\,, \quad \mu^h(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left(\sum_i h(d(S_i))\right)$$

où $\varepsilon > 0$, $\mathscr{C}_\varepsilon(A)$ est la classe de tous les recouvrements de A par un ensemble de boules S_i de diamètre $d(S_i) \leqq \varepsilon$.

Si $h(t) = t^\alpha$, la mesure de A notée $\mu^\alpha(A)$, correspondante, est appelée mesure de Hausdorff de A, et l'on définit la dimension de Hausdorff de A, notée dim A, par:

$$\dim A = \inf \{\alpha \geqq 0 \mid \mu^\alpha(A) = 0\}\,.$$

Les remarques précédentes et cette dernière définition nous incitent à poser comme définition de l'indécision d'une observation "a" sur une description $A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, la quantité $H^l_{\alpha,\beta}(A)$:

$$H^l_{\alpha,\beta}(A) = \sup_\varepsilon H^{l,\varepsilon}_{\alpha,\beta}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^{l,\varepsilon}_{\alpha,\beta}(A)\,,$$

avec

$$H^{l,\varepsilon}_{\alpha,\beta}(A) = \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left[\sum_i \sup_{x \in S_i} (G_{\alpha,\beta}(fa(x)))\, d^l(S_i)\right]\,.$$

Lemme 1. $A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$ étant donné. α, β étant fixés. Il existe une valeur unique $d_{\alpha,\beta}(A)$ telle que:

– si $l > d_{\alpha,\beta}(A)$ alors $H^l_{\alpha,\beta}(A) = 0$,

– si $l < d_{\alpha,\beta}(A)$ alors $H^l_{\alpha,\beta}(A)$ est infini.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $H^l_{\alpha,\beta}(A)$ est fini alors, pour tout $\eta > 0$, $H^{l+\eta}_{\alpha,\beta}(A)$ est nul, et que de plus $H^{n+1}_{\alpha,\beta}(A)$ est nul.

En effet: $\forall \eta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$0 \leqq \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left[\sum_i \sup_{x \in S_i} (G_{\alpha,\beta}(fa(x)))\, d^{l+\eta}(S_i)\right] \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^\eta \,.\, \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left[\sum_i \sup_{x \in S_i} (G_{\alpha,\beta}(fa(x)))\, d^l(S_i)\right]$$

d'où par passage à la limite, si $H^l_{\alpha,\beta}(A)$ est fini alors $0 \leqq H^{l+\eta}_{\alpha,\beta} \leqq 0$, donc $H^{l+\eta}_{\alpha,\beta}(A) = 0$.

$$H^{n+1}_{\alpha,\beta}(A) \leqq H^{n+1}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{R}^n) \leqq \mu^{n+1}(\boldsymbol{R}^n) = 0$$

car la mesure de Hausdorff d'ordre $n + 1$ de l'ensemble $\boldsymbol{R}^n$ est nulle.

Définition 3. α et β étant fixés, nous appellerons dimension d'indécision de l'observation sur la partie $A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, la valeur unique $d_{\alpha,\beta}(A)$ telle que:

– si $l > d_{\alpha,\beta}(A)$ alors $H^l_{\alpha,\beta}(A) = 0$,

– si $l < d_{\alpha,\beta}(A)$ alors $H^l_{\alpha,\beta}(A)$ est infini.

Remarque. On ne peut rien dire de $H^{d_{\alpha,\beta}(A)}_{\alpha,\beta}(A)$.

Lemme 2. [12]

– $\forall fa(x) \in [0, 1]$, $G_{\alpha,\beta}(fa(x)) \leqq 1$,

– $\forall \beta \in \boldsymbol{R}$, $\forall fa(x) \in [0, 1]$, si $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ alors $G_{\alpha_1,\beta}(fa(x)) \geqq G_{\alpha_2,\beta}(fa(x))$,

– si $\gamma_1 = 1/\alpha_1$ et $\beta_1 = 2 - \gamma_1$, si $\gamma_2 = 1/\alpha_2$ et $\beta_2 = 2 - \gamma_2$ et si $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq 0$,

alors:

$$\forall fa(x) \in [0, 1],\ G_{0,\beta(0)} \geqq G_{\alpha_1,\beta_1}(fa(x)) \geqq G_{\alpha_2,\beta_2}(fa(x))\,.$$

Dans ce dernier cas l'information d'ordre α_1 et de type β_1 (resp. α_2 et β_2) correspondante est l'information d'espèce γ_1 (resp. γ_2) [1] (l'information d'espèce 0^+ est l'information infimum).

On en déduit immédiatement la proposition suivante:

Proposition 1. Soit $A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, soit $d_{\alpha,\beta}(A)$ la dimension d'indécision de A, les propriétés suivantes sont vraies:

(i) La dimension de Hausdorff de A majore toute dimension d'indécision de A:

$$\forall \alpha \geqq 0\,, \quad \forall \beta \in \boldsymbol{R}\,, \quad d_{\alpha,\beta}(A) \leqq \dim A\,.$$

(ii) La dimension de Hausdorff de l'ensemble des points de A où $fa(x) = 1/2$ (ensemble d'indécision minimale de A) minore toute dimension d'indécision de A:

$$B = \{x \in A \mid fa(x) = 1/2\},$$

$$\forall \alpha \geqq 0, \quad \forall \beta \in \boldsymbol{R}^+, \ \dim B \leqq d_{\alpha,\beta}(A).$$

(iii) Si β est quelconque, et si $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2$ alors

$$d_{\alpha_2,\beta}(A) \leqq d_{\alpha_1,\beta}(A).$$

(iv) Si $\beta_1 = 2 - 1/\alpha_1$, si $\beta_2 = 2 - 1/\alpha_2$ et si $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2$ alors $d_{\alpha_2,\beta_2}(A) \leqq d_{\alpha_1,\beta_1}(A)$.

Remarque. Dans le cas général où β est fonction de α on ne peut rien dire de $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$: il n'y a pas, en général, de monotonie.

On montre, par exemple, que $G_{2,2}(fa(x)) = G_{3,3}(fa(x)) = 4fa(x)(1 - fa(x))$ d'où $d_{2,2}(A) = d_{3,3}(A)$, mais pour les valeurs entre 2 et 3, on ne sait rien [8].

Proposition 2.

(i) $\forall A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\forall B \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$ tels que $A \subset B$: $d_{\alpha,\beta}(A) \leqq d_{\alpha,\beta}(B)$;

(ii) $\forall A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\forall B \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$: $d_{\alpha,\beta}(A \cap B) \leqq \inf(d_{\alpha,\beta}(A), d_{\alpha,\beta}(B))$;

(iii) si $A = \bigcup_\Gamma A_\gamma$, où Γ est un ensemble d'indices, $d_{\alpha,\beta}(A) \geqq \sup_\Gamma (d_{\alpha,\beta}(A_\gamma))$;

(iv) si $A = \bigcup_I A_i$, où I est dénombrable, $d_{\alpha,\beta}(A) = \sup(d_{\alpha,\beta}(A_i))$.

Démonstration (extension d'un résultat de [2]). (ii) et (iii) découle de (i) qui est évident. Pour démontrer (iv), nous montrerons:

$$d^l_{\alpha,\beta}(A) \leqq \sup_I (d^l_{\alpha,\beta}(A_i)).$$

On a:

$$\forall l \geqq 0, \quad 0 \leqq H^l_{\alpha,\beta}(A) \leqq \sum_{i \in I} H^l_{\alpha,\beta}(A_i);$$

dès que $l \geqq \sup(d_{\alpha,\beta}(A_i))$, $H^l_{\alpha,\beta}(A_i) = 0$ pour tout $i \in I$ et donc $H^l_{\alpha,\beta}(A) = 0$ ce qui achève la démonstration.

Remarque. Si A est un ensemble dénombrable de points $d_{\alpha,\beta}(A) = 0$ pour tout (α, β).

Considérons maintenant la famille d'entropies $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)} (\subset \mathscr{F}_{\alpha,\beta})$ à un paramètre α telle que:

$$\forall G_{\alpha,\beta(\alpha)} \in \mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)},$$

 si $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2$ alors:

$$\forall fa(x) \in [0, 1], \quad G_{\alpha_1,\beta(\alpha_1)}(fa(x)) \geqq G_{\alpha_2,\beta(\alpha_2)}(fa(x)).$$

La famille $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}$ sera appelée famille d'entropies décroissantes. Elle est définie par la donnée de la fonction $\alpha \to \beta(\alpha)$.

Nous allons montrer que pour toute entropie de $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}$, la fonction ($A$ étant fixé):

$$\alpha \to d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$$

est continue en α. Pour cela nous allons montrer deux lemmes.

Lemme 2. S'il existe $\eta \neq 0$ et $\alpha \geqq 0$ tels que pour $\bar{A}\eta = \{x \in A \mid 1 - \eta \geqq fa(x) \geqq \geqq \eta\}$ on ait $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}\eta) = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$, alors

$$\forall \alpha' \geqq \alpha, \quad \text{on a} \quad d_{\alpha',\beta(\alpha')}(A) = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = \dim \bar{A}\eta .$$

Démonstration. On a toujours $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}\eta) = \dim \bar{A}\eta$ pour tout α. En effet, pour tout recouvrement $\mathscr{C}_\varepsilon(\bar{A}\eta)$, pour tout l, on a:

$$G_{\alpha,\beta(\alpha)}(\eta) \sum_{\substack{i \\ S_i \in \mathscr{C}_\varepsilon(\bar{A}\eta)}} d^l(S_i) \leqq H^{l,\varepsilon}_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}) \leqq \sum_{\substack{i \\ S_i \in \mathscr{C}_\varepsilon(\bar{A}\eta)}} d^l(S_i)$$

puisque $G_{\alpha,\beta(\alpha)}(x)$ est décroissant en x.

Si $\alpha' \geqq \alpha$ on a:

$$d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) \geqq d_{\alpha',\beta(\alpha')}(A) \,(\text{car } G_{\alpha,\beta(\alpha)} \in \mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}) .$$

De plus $\bar{A}\eta \subset A$ entraîne pour tout α':

$$d_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}\eta) = d_{\alpha',\beta(\alpha')}(\bar{A}\eta) \leqq d_{\alpha',\beta(\alpha')}(A)$$

d'où, si pour un α, $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}\eta)$, on a:

$$\text{pour } \alpha' \geqq \alpha, \quad d_{\alpha',\beta(\alpha')}(A) \geqq d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}\eta) \geqq d_{\alpha',\beta(\alpha')}(A) .$$

Donc, $\forall \alpha' \geqq \alpha$, $d_{\alpha',\beta(\alpha')}(A) = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = \dim \bar{A}\eta$.

Corollaire. Si fa est continue dans $\boldsymbol{R}^n$, alors, pour toute partie ouverte A où il existe un point x_0 tel que $fa(x_0) \neq 0, 1$, la dimension d'indécision $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$, pour tout α, est constante et vaut n.

Démonstration. A étant ouvert, il existe une boule de centre x_0 notée $B(x_0)$, incluse dans A tel que: $\forall x \in B(x_0)$, $fa(x)$ est non nulle et bornée.

Du Lemme 1 on a: $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(B(x_0)) = \dim B(x_0) = n$.

Or $B(x_0) \subset A \subset \boldsymbol{R}^n \Rightarrow n = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(B(x_0)) \leqq d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) \leqq \dim \boldsymbol{R}^n = n$ d'où $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = n$.

Lemme 3. Soit $A\eta = \{x \in A \mid 0 < fa(x) < \eta \text{ ou } 1 - \eta \quad fa(x) < 1\}$ et $\bar{A}\eta = $ $= \{x \in A \mid 1 - \eta \geqq fa(x) \geqq \eta\}$. Si pour tout α, pour tout $\eta \neq 0$, on a:

$$d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A\eta) \geqq d_{\alpha,\beta(\alpha)}(\bar{A}\eta)$$

alors la fonction $\alpha \to d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est continue.

Démonstration. Du (iv) de la Proposition 2, on sait que:

$$\forall \alpha\,, \quad \forall \eta \neq 0\,, \quad d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A_\eta)\,.$$

Au voisinage de 0, on montre que $G_{\alpha,\beta}(x)$ est équivalent à:

$$\text{si} \quad \alpha \leqq 1\,, \quad k_1 x^\alpha\,, \quad k_1 > 0\,,$$

$$\text{si} \quad \alpha \geqq 1\,, \quad k_2 x\,, \quad k_2 > 0\,.$$

A la suite de (iv) de la Proposition 2, sans perdre de généralité, nous considérons A borné.

Soit $\mathscr{C}_{1/p}(A)$ un recouvrement de A par des boules S_i, $i \in I(p)$ ($\subset N$), de diamètre $1/p$.

$$H^{l,1/p}_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = \frac{1}{p^l} \sum_{i \in I(p)} \sup_{S_i} \left[G_{\alpha,\beta(\alpha)}(fa(x))\right].$$

$G_{\alpha,\beta(\alpha)}(x)$ est une fonction décroissante en α pour $x \in [0, 1]$. D'où, pour toute boule S_i, il existe un point $y_i \in [0, 1/2]$ indépendant de α tel que:

$$\forall x\,, \quad \sup_{S_i} \left[G_{\alpha,\beta(\alpha)}(fa(x))\right] = G_{\alpha,\beta(\alpha)}(y_i)\,.$$

Quand p tend vers l'infini l'expression $H^{l,1/p}_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ a un comportement équivalent à la somme $(1/p^l) \sum_{i \in I(p)} y_i^\alpha$ si $\alpha < 1$ et à la somme $(1/p^l) \sum_{i \in I(p)} y_i$ si $\alpha \geqq 1$.

Pour $1 \geqq \alpha' \geqq \alpha$ on a:

$$\frac{1}{p^l} \sum_{i \in I(p)} y_i^\alpha \geqq \frac{1}{p^l} \sum_{i \in I(p)} y_i^{\alpha'} \geqq \frac{1}{p^l} \sum_{i \in I(p)} y_i^\alpha (1 + (\alpha' - \alpha) \log y_i)\,;$$

– si $l > d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$, $(1/p^l) \sum_{i \in I(p)} y_i^\alpha$ est nul, de même

$$\frac{\sum_{i \in I(p)} y_i^\alpha \log \dfrac{1}{y_i}}{p^l}\,,$$

d'où $(1/p^l) \sum_{i \in I(p)} y_i^{\alpha'}$ est nul;

– si $l < d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$, $(1/p^l) \sum_{i \in I(p)} y_i^\alpha$ est infini.

Si nous considérons $\alpha' - \alpha = 1/p$, la quantité $(1/p^{l+1}) \sum_{i \in I(l)} y_i^\alpha \log y_i$ est nulle si l est supérieur à $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) - 1$, donc pour $l \in]d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) - 1, d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)[$, $(1/p^l) \sum y_i^{\alpha'}$ est infini.

Les sommes $H^{l,1/p}_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ et $H^{l,1/p}_{\alpha',\beta(\alpha')}$ sont donc de même nature pour α et α' assez proches $(1 \geqq \alpha' \geqq \alpha)$ ce qui montre la continuité à droite au point $\alpha \leqq 1$ de la fonction $\alpha \to d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$. On montrerait de même la continuité à gauche au point $\alpha < 1$.

Pour $\alpha \geqq 1$, $H^{l,1/p}(A)$, la convergence de $H^{l,1/2}_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est équivalente à celle de $(1/p^l) \sum_{i \in I(p)} y_i$ (quelque soit α).

Ce qui montre la continuité en $\alpha < 1$, et la continuité à gauche en $\alpha = 1$. La continuité à droite en $\alpha = 1$ a été vue précédemment.

Proposition 3. Si $G_{\alpha,\beta(\alpha)}$ est décroissante en α alors la fonction $\alpha \to d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$, A étant fixé, est continue. De plus si $\alpha \geqq 1$, $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = d_{1,\beta(1)}(A)$.

Démonstration. On se trouve dans la situation du Lemme 2 ou du Lemme 3 d'où le résultat.

Proposition 4. Soit $A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$.

(i) Pour toute famille d'entropies décroissantes $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}$, il existe une valeur unique $\alpha_0 \geqq 0$ telle que:

– $\forall \alpha > \alpha_0 \quad H^\alpha_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = 0$;

– $\forall \alpha < \alpha_0 \quad H^\alpha_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est infini, et

$$\alpha_0 = \inf \left(\alpha \geqq 0 \mid H^\alpha_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = 0\right).$$

(ii) Pour toute famille d'entropies décroissantes $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}$, il existe α unique tel que: $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = \alpha$.

Démonstration. Comme pour le Lemme 1, nous allons montrer que si $H^\alpha_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est fini alors pour tout $\eta > 0$, $H^{\alpha+\eta}_{\alpha+\eta,\beta(\alpha+\eta)}(A)$ est nul.

En effet: $\forall \eta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \leqq \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left[\sum_i \sup_{x \in S_i} \left(G_{\alpha+\eta,\beta(\alpha+\eta)}(fa(x))\right) d^{\alpha+\eta}(S_i)\right] \leqq$$

$$\leqq \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left[\sum_i \sup_{x \in S_i} \left(G_{\alpha,\beta(\alpha)}(fa(x))\right) d^{\alpha+\eta}(S_i)\right] \leqq$$

$$\leqq \inf_{\mathscr{C}_\varepsilon(A)} \left[\sum_i \sup_{x \in S_i} \left(G_{\alpha,\beta(\alpha)}(fa(x))\right) d^{\alpha}(S_i)\right],$$

d'où par passage à la limite si $H^{\alpha}_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est fini on a:

$$0 \leqq H^{\alpha+\eta}_{\alpha+\eta,\beta(\alpha+\eta)}(A) \leqq 0 \,, \quad \text{i.e.} \quad H^{\alpha+\eta}_{\alpha+\eta,\beta(\alpha+\eta)}(A) = 0 \,.$$

D'où $\alpha_0 = \inf(\alpha \geqq 0 \mid H^{\alpha}_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = 0)$ vérifie (i).

Montrons que α_0 défini en (i) vérifie (ii):

– Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha_1 = \alpha_0 + \varepsilon$, $\beta_1 = \beta(\alpha_0 + \varepsilon)$, $l_1 = d_{\alpha_1,\beta_1}(A)$: $H^{l_1}_{\alpha_1,\beta_1}(A)$ est soit fini, soit infini donc: $H^{l_1}_{\alpha_1,\beta_1}(A) \geqq H^{\alpha_1}_{\alpha_1,\beta_1}(A) = 0$ (car $\alpha_1 > \alpha_0$ et l'on a (i)) d'où $\alpha_1 \geqq l_1$ (par définition de l_1) i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \alpha_0 + \varepsilon \geqq d_{\alpha_0+\varepsilon,\beta(\alpha_0+\varepsilon)}(A) \,.$$

– Soit $\varepsilon < 0$, soit $\alpha_2 = \alpha_0 - \varepsilon$, $\beta_2 = \beta(\alpha_0 - \varepsilon)$ et $l_2 = d_{\alpha_2,\beta_2}(A)$: $H^{\alpha_2}_{\alpha_2,\beta_2}(A)$ est infini (car $\alpha_2 < \alpha_0$ et on a (i)) d'où $\alpha_2 \leqq l_2$ (par définition de l_2) i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha_0 - \varepsilon \leqq d_{\alpha_0-\varepsilon,\beta(\alpha_0-\varepsilon)}(A)$.

Or la fonction $d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est continue en α d'après la Proposition 3, ce qui montre que

$$\alpha_0 = d_{\alpha_0,\beta(\alpha_0)}(A) \,.$$

Remarque. Pour toute famille d'entropies décroissantes $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}$, pour toute partie $A \subset X \subset R^n$, nous avons spécifié un α (c'est le α_0 précédent) tel que: $d_{1,\beta(1)}(A) \leqq d_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) = \alpha \leqq \dim A$.

Exemple. Considérons le "triadique" de Cantor: [4], on divise $X = [0, 1]$ en trois segments $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$, et on supprime le segment médian $[1/3, 2/3]$. Sur les deux segments restants on répète l'opération, et ainsi de suite ... On construit ainsi plusieurs suites de segments emboîtés donc qui convergent: l'ensemble A de ces points limites est le "triadique" de Cantor. Sa dimension de Hausdorff est $\log 2/\log 3$.

Considérons le recouvrement d'ordre n, i.e. celui issu de la construction à l'étape n. Chacun de ses 2^n segments a un diamètre égal à $1/3^n$.

Nous supposerons que:

– les points de $X = [0, 1]$, n'apparaissant à aucune étape de la construction, comme extrémités d'un segment, ont un indice de vérification nul ou égal à 1, ainsi que les points 0 et 1.

– Chacun des 2^n points nouveaux apparaissant comme extrémité d'un des 2^n segments du $n^{\text{ième}}$ recouvrement a un indice de vérification égal à $1/3^{\lambda n}(\leqq \frac{1}{2})$ où λ est une constante strictement positive.

Considérons le recouvrement d'ordre n, par des segments S_i $(i = 1, \ldots, 2^n)$ de longeur $1/3^n$:

$$H^{l,1/3^n}_{\alpha,\beta}(A) = \sum_{i=1}^{2^n} \sup_{x \in S_i} G_{\alpha,\beta}(fa(x)) \frac{1}{3^{nl}} \,.$$

Or $\sup_{x \in S_l} G_{\alpha,\beta}(fa(x)) = G_{\alpha,\beta}(fa(x_i))$ où x_i est l'extrémité "ancienne" de S_l, i.e. celle qui n'est pas apparue à l'étape n.

$$H_{\alpha,\beta}^{l,1/3^n}(A) = \frac{1}{3^{nl}} \sum_{m=1}^{n-1} G_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{3^{\lambda m}}\right) 2^m .$$

1er cas $\alpha < 1$:

$$G_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{3^{\lambda m}}\right) \sim \left(\frac{1}{3^{\lambda m}}\right)^{\alpha}$$

au voisinage de m infini, d'où

$$H_{\alpha,\beta}^{l,1/3^n}(A) \sim \frac{1}{3^{nl}} \sum_{1}^{n-1} \left(\frac{2}{3^{\lambda\alpha}}\right)^m = \frac{\left(\frac{2}{3^{\lambda\alpha+l}}\right)^n - \frac{2}{3^{\lambda\alpha+nl}}}{\frac{2}{3^{\lambda\alpha}} - 1}$$

donc $d_{\alpha,\beta}(A) = \log 2/\log 3 - \lambda\alpha$ si $\log 2/\log 3 - \lambda\alpha \geqq 0$ et $d_{\alpha,\beta}(A) = 0$ si $\log 2/\log 3 - \lambda\alpha \leqq 0$.

2ème cas $\alpha \geqq 1$:

$$G_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{3^m}\right) \sim \frac{1}{3^{\lambda m}}$$

d'où

$$d_{\alpha,\beta}(A) = \frac{\log 2}{\log 3} - \lambda \quad \text{si} \quad \frac{\log 2}{\log 3} - \lambda \geqq 0$$

et

$$d_{\alpha,\beta}(A) = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{\log 2}{\log 3} - \lambda \leq 0 .$$

Résultat:

$$d_{\alpha,\beta}(A) = \frac{\log 2}{\log 3} - \lambda\alpha \quad \text{si} \quad \alpha \leqq 1 ,$$

$$d_{\alpha,\beta}(A) = \frac{\log 2}{\log 3} - \lambda \quad \text{si} \quad \alpha \geqq 1$$

sous réserve que ces quantités soient positives sinon $d_{\alpha,\beta}(A) = 0$.

Nous avons précisé le concept d'entropie et de dimension pour une observation; nous considérons maintenant la généralisation de ces notions à une famille d'observations [10].

Considérons une famille de p observations, nous désirons mesurer l'indécision sur le résultat, sachant qu'en utilisant l'opération de concaténation [10], nous pouvons construire les p^n observations générées par n concaténations d'observations.

Nous ne ferons pas d'hypothèses de structure sur la famille d'observations. Soit $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une distribution à n éléments $f_i \geqq 0$. Nous utiliserons pour mesurer l'indécision, les fonctions $I^*(F, \alpha, \beta)$, entropies d'ordre α et de type β sur une distribution F:

$$I^*(F, \alpha, \beta) = \left[\left(\frac{\sum_1^n f_i^\alpha}{\sum_1^n f_i}\right)^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1\right]\frac{1}{2^{1-\beta} - 1}$$

et son cas limite quand $\alpha = 1$.

Soir $\alpha = \{a_1, \ldots, a_p\}$ une famille de p observations, soit n le nombre de concaténations effectuées et α_i, $i = 1, \ldots, p^n$ une des p^n façons de concaténer n observations prises dans α, soit $f_{\alpha_i}(x)$ l'indice vérification de l'observation α_i au point x.

Définition 1. L'indécision au point x après n concaténations sera définie par:

$$\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = I^*(F, \alpha, \beta)$$

avec

$$F = \{f_{\alpha_1}(x), 1 - f_{\alpha_1}(x), \ldots, f_{\alpha_i}(x), 1 - f_{\alpha_i}(x), \ldots, f_{\alpha_{p^n}}(x), 1 - f_{\alpha_{p^n}}(x)\}$$

i.e.

$$\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = \left\{\left[\frac{\sum_{i=1}^{p^n}[f^\alpha_{\alpha_i}(x) + (1 - f_{\alpha_i}(x))^\alpha]}{p^n}\right]^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1\right\}\frac{1}{2^{1-\beta} - 1}$$

et son cas limite quand $\alpha = 1$.

Remarques. Cès expressions vérifient les propriétés suivantes:

– Si $\forall i = 1, \ldots, p^n$, $f_{\alpha_i}(x) = 0$ ou 1 alors $\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = 0$ (valeur minimale de l'indécision).

– Si $\forall i = 1, \ldots, p^n$, $f_{\alpha_i}(x) = \frac{1}{2}$ alors $\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = 1$ (valeur maximale de l'indécision).

– Si $\alpha_1 = \{a, \ldots, a\}$ ou $\alpha_2 = \{a, \bar{a}, \ldots, \bar{a}\}$, $\alpha_3 = \{\bar{a}, \ldots, \bar{a}\}$, $\bar{a}$ désignant la pseudo-négation de a $(f\bar{a}(x) = 1 - fa(x))$:

$$\mathscr{G}^1_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_1(x) = G_{\alpha,\beta}(fa(x)) = G_{\alpha,\beta}(f\bar{a}(x)), \quad i = 1, 2, 3.$$

– Plus généralement, si $\mathscr{L} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\mathscr{L}' = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$

$$\mathscr{G}^1_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}'(x) = \mathscr{G}^1_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x).$$

Pour une observation, pour une étape, nous retrouvons la situation de l'indécision d'une observation.

Cette définition nous permet de généraliser au cas de n observations les résultats obtenus sur une observation.

En reprenant les notations définies pour le cas d'une observation, nous obtenons:

Définition 2. La dimension d'indécision sur un ensemble A, notée $\mathscr{D}^n_{\alpha,\beta}(A)$, pour une famille d'observations α, à la $n^{\text{ième}}$ étape est définie par:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \sum_{S_i \in \mathscr{C}_\varepsilon(A)} \sup_{x \in S_i} (\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\, \mathscr{L}(x)) \,.\, d^l(S_i)$$

est: – nulle si $\quad l > \mathscr{D}^n_{\alpha,\beta}(A)$,
– infinie si $l < \mathscr{D}^n_{\alpha,\beta}(A)$.

Proposition 1. Si l'on considère une famille décroissante d'entropies $\mathscr{F}_{\alpha,\beta(\alpha)}$, alors la fonction $\alpha \to \mathscr{D}^n_{\alpha,\beta(\alpha)}(A)$ est décroissante en α, et de plus est constante pour $\alpha \geqq 1$ avec la relation: $\dim A \geqq \mathscr{D}^n_{\alpha,\beta(\alpha)}(A) \geqq \mathscr{D}^n_{1,\beta(1)}(A)$.

Proposition 2.

(i) $\forall A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\forall B \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, tels que $A \subset B$, $\mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(A) \leqq \mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(B)$, $\forall m \in N$.

(ii) $\forall A \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\forall B \subset X \subset \boldsymbol{R}^n$,

$$\mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(A \cap B) \leqq \inf(\mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(A), \quad \mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(B)), \quad \forall m \in N.$$

(iii) si Γ est un ensemble d'indices quelconque:

$$\mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \geqq \sup_{\Gamma} \mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(A_\gamma), \quad \forall m \in N.$$

(iv) Si I est dénombrable:

$$\mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{I} \mathscr{D}^m_{\alpha,\beta}(A_i), \quad \forall m \in N.$$

Les résultats sur une famille d'observations sont intéressants si l'on peut comparer l'indécision d'une famille à l'indécision d'une famille plus grande. Pour cela, nous supposerons vérifiée la propriété L'_4 de [10]:

soit c la concaténation b suivi de a: $c = a \circ b$, $f_c(x) \leqq \inf(fa(x), fb(x))$, et nous supposerons donnée une loi H de concaténation (un semi-groupe) telle que:

$$f_c(x) = H(f_a(x), f_b(x)), \quad \forall x \in X.$$

Nous allons montrer quelques résultats qui porteront soit sur une famille d'observations symétrisée du type: $\mathscr{L}_p = \{a_1, \ldots, a_p, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_p\}$, soit sur une famille non symétrisée $\mathscr{L}_p = \{a_1, \ldots, a_p\}$, et qui utiliseront comme loi de concaténation: soit la loi produit, soit la loi de type infimum. On considérera un point x fixé de l'espace de description X.

Proposition 3. Soit $\mathscr{L}_p$ une famille d'observations symétrisée, soit la loi de type infimum comme loi de concaténation (i.e. $fa \circ b = \inf(fa, fb)$), alors $\mathscr{G}^2_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x) = \mathscr{G}^1_{\alpha,\beta}\mathscr{L}_p(x)$.

Démonstration.

$$\mathscr{L}_p = \{a_1, \ldots, a_p, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_p\}\,.$$

$$\mathscr{G}^2_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x) = \frac{\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[f^\alpha_{\alpha_i}(x) + (1 - f_{\alpha_i}(x))^\alpha]\right]^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1}{2^{1-\beta} - 1}$$

où α_i est une observation obtenue par concaténation de deux observations de $\mathscr{L}_p$.

N est le nombre d'observations obtenues après une concaténation de $\mathscr{L}_p$ i.e. le nombre d'éléments $\alpha_i : N = (2p)^2 = 4p^2$.

Nous pouvons supposer que:

$$f_{a_1}(x) \leqq f_{a_2}(x) \leqq \ldots \leqq f_{a_p}(x) \leqq \tfrac{1}{2} \leqq f_{\bar{a}_p}(x) \leqq \ldots \leqq f_{\bar{a}_2}(x) \leqq f_{\bar{a}_1}(x)\,.$$

On vérifie alors que pour tout j, on a:

$2p - (j - 1) + 2p - j$ observations α_i telles que $f_{\alpha_i}(x) = f_{a_j}(x)$.

En effet $2p - (j - 1)$ observations sont du type:

$$a_j \circ a_k \quad \text{avec} \quad k = j, \ldots, p \quad \text{ou} \quad a_j \circ \bar{a}_k \quad \text{avec} \quad k = 1, \ldots, p;$$

et $(2p - j)$ observations sont du type $a_k \circ a_j$, $k = j + 1, \ldots, p$ ou $\bar{a}_k \circ a_j$, $k = 1, \ldots, p$.

$j + (j - 1)$ observations α_i telles que $f_{\alpha_j}(x) = f_{\bar{a}_j}(x) = 1 - f_{a_j}(x)$.

En effet j observations sont de type $\bar{a}_j \circ \bar{a}_k$ avec $k = 1, \ldots, j$; et $(j - 1)$ observations sont de type $\bar{a}_k \circ \bar{a}_j$ avec $k = 1, \ldots, j - 1$.

Dans l'expression de $\mathscr{G}^2_{\alpha,\beta}(x)$, on a donc $2p - (j - 1) + 2p - j + j + (j - 1) = = 4p$ termes $f^\alpha_{\alpha_i}(x) + (1 - f_{\alpha_i}(x))^\alpha$ qui valent $f^\alpha_{a_j}(x) + (1 - f_{a_j}(x))^\alpha$.

D'où:

$$\mathscr{G}^2_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x) = \frac{\left[\frac{1}{4p^2}\sum_{j=1}^{p}4p[f^\alpha_{a_j}(x) + (1 - f_{a_j}(x))^\alpha]\right]^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1}{2^{1-\beta} - 1} = \mathscr{G}^1_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x)\,.$$

Remarque. Ce résultat ne se généralise pas : on n'a pas

$$\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x) = \mathscr{G}^{n-1}_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x)\,.$$

Nous allons considérer maintenant des familles d'observations non symétrisées.

Proposition 4. Soit une famille d'observations non symétrisées $\mathscr{L}_p$, soit une loi de concaténation de type infimum, alors:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\, \mathscr{L}_p(x) = G_{\alpha,\beta}(\inf_i (f_{a_i}(x)))\,.$$

Démonstration. Nous supposerons, sans nuire à la généralité, que

$$f_{a_1}(x) \leqq f_{a_2}(x) \leqq \ldots \leqq f_{a_p}(x)\,.$$

$$\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\, \mathscr{L}(x) = \left[\left[\frac{k_1^{(n)} A_1 + \ldots + k_p^{(n)} A_p}{k_1^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)}}\right]^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1\right] \frac{1}{2^{1-\beta} - 1}$$

avec $A_i = f^\alpha_{a_i}(x) + (1 - f_{a_i}(x))^\alpha$ et $k_1^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)} = p^n$.

Nous allons montrer par récurrence sur n que $k_1^{(n)} \geqq k_2^{(n)} \geqq \ldots \geqq k_p^{(n)}$. Pour $n = 1$, $k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = \ldots = k_p^{(1)}$. Supposons que $k_1^{(n)} \geqq \ldots \geqq k_p^{(n)}$.

On peut comme dans la démonstration de la Proposition 3 vérifier que:

$$\mathscr{G}^{n+1}_{\alpha,\beta}\, \mathscr{L}_p(x) = \frac{A^{(\alpha-1)/(\beta-1)} - 1}{2^{1-\beta} - 1}$$

avec $p^{n+1} A = (k_1^{(n)} p + k_2^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)} A_1 + \ldots + (k_i^{(n)}(p - i + 1) + k_{i+1}^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)}) A_i + \ldots + k_p^{(n)} A_p$ et $k_p^{(n)} = 1$.

D'où $k_i^{(n+1)} - k_{i+1}^{(n+1)} = k_i^{(n)}(p - i + 1) + k_{i+1}^{(n)}(1 - p + i) = (p - i)(k_i^{(n)} - k_{i+1}^{(n)}) + k_i^{(n)} + k_{i+1}^{(n)} \geqq 0$ donc $k_1^{(n+1)} \geqq \ldots \geqq k_p^{(n+1)}$. De plus

$$\frac{k_1^{(n+1)}}{p^{n+1}} = \frac{k_1^{(n)} p + k_2^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)}}{p^{n+1}} = \frac{k_1^{(n)}}{p^n} + \frac{k_2^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)}}{p^{n+1}} > \frac{k_1^{(n)}}{p^n}\,.$$

Le poids de A_1 dans A augmente avec n, or il est majoré par 1; il converge donc. Nous allons, en fait, montrer que ce poids tend vers 1. On peut, en effet, calculer explicitement $k_1^{(n)}$.

Les observations α_j contenant dans leur expression $\alpha_j = a_{j_1} \circ a_{j_2} \circ \ldots \circ a_{j_n}$ l'observation a_1 conduisent à des termes A_1 dans l'expression de $\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}(x)$. On a:

- p^{n-1} observations $a_1 \circ a_{j_2} \circ \ldots \circ a_{j_n}$;
- $(p - 1) \,.\, p^{n-2}$ observations $a_{j_1} \circ a_1 \circ \ldots \circ a_{j_n}$ avec $a_{j_1} = a_2, \ldots, a_p$;
- $(p - 1)^i\, p^{n-i-1}$ observations $a_{j_1} \circ \ldots \circ a_{j_{i-1}} \circ a_1 \circ \ldots \circ a_{j_n}$ avec $a_{j_1}, \ldots, a_{j_{i-1}}$ pris parmi les observations $a_2, \ldots, a_p$ et $a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_n}$ pris parmi les observations $a_1, \ldots, a_p$.

D'où

$$k_1^{(n)} = p^{n-1} + (p-1)\,p^{n-2} + \ldots + (p-1)^i\,p^{n-i-1} + \ldots + (p-1)^{n-2}\,p =$$

$$= p^n\left[1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}\right]$$

et

$$\frac{k_1^{(n)}}{p^n} = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_1^{(n)}/p^n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} A = A_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = G_{\alpha,\beta}(f_{a_1}(x))$.

Remarque. L'ordre de $A_1, \ldots, A_p$ n'est pas en général, celui de $fa_1(x), \ldots, fa_p(x)$, car il dépend des positions de ces indices par rapport à $1/2$. On ne peut donc pas, en général, déduire une monotonie sur $\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x)$ quand n varie.

Proposition 5. Soit une famille d'observations non symétrisée $\mathscr{L}_p$, soit une loi de concaténation de type produit, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}_p(x) = 0\,.$$

Démonstration. On peut supposer sans nuire à la généralité que:

$$0 < fa_1(x) \leqq fa_2(x) \leqq \ldots \leqq fa_p(x) < 1\,.$$

1^er^ cas $\alpha < 1$:

$$fa_{i_1}\circ a_{i_2}\circ \ldots \circ a_{i_n}(x) = fa_{i_1}(x) \times fa_{i_2}(x) \times \ldots \times fa_{i_n}(x) \leqq (fa_p(x))^n\,.$$

Pour n assez grand $fa_p^n(x) \leqq \frac{1}{2}$.

$$\mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{p^n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1}{2^{1-\beta}-1} = \frac{2^{[(1-\beta)1/(1-\alpha)]\log[(1/p^n)\sum_{i=1}^{p^n} A_i]} - 1}{2^{1-\beta}-1}$$

avec $A_i = f^{\alpha}_{\alpha_i} + (1-f_{\alpha_i})^{\alpha}$ où $\alpha_i = a_{i_1}\circ \ldots \circ a_{i_n}$.

Pour n assez grand:

$$A_i \leqq fa_p^{\alpha n}(x) + (1 - fa_p^n(x))^{\alpha}$$

et

$$\frac{1}{p^n}\sum_i A_i \leqq fa_p^{\alpha n}(x) + (1 - fa_p^n(x))^{\alpha} = B_p^{(n)}\,.$$

 De plus la fonction $g(x) = (2^{(1-\beta)x} - 1)/(2^{1-\beta} - 1)$ est croissante.

$$\frac{1}{1-\alpha}\log\left(\frac{1}{p^n}\sum_i A_i\right) \leqq \frac{1}{1-\alpha}\log B_p^{(n)}$$

d'où

$$0 \leqq \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) \leqq \frac{2^{[(1-\beta)/(1-\alpha)]\log B_p{}^{(n)}} - 1}{2^{1-\beta} - 1}$$

or $\lim_{n\to+\infty} B_p^{(n)} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = 0$.

$2^{\grave{e}me}$ *cas* $\alpha \geqq 1$:

$$f^n_{a_1}(x) \leqq f_{\alpha_i}(x) \leqq f^n_{a_p}(x)\,.$$

Pour n assez grand $f^n_{a_1}(x) \leqq f_{\alpha_i}(x) \leqq \frac{1}{2}$

et

$$\frac{1}{p^n}\sum_i A_i \geqq f^{\alpha n}_{a_1}(x) + (1 - f^n_{a_1}(x))^\alpha = B_1^{(n)}\,,$$

$$0 \leqq \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) \leqq \frac{2^{[(1-\alpha)/(1-\beta)]\log B_1{}^{(n)}} - 1}{2^{1-\beta} - 1}\,.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} B_1^{(n)} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{G}^n_{\alpha,\beta}\,\mathscr{L}(x) = 0$.

Remarque. Dans les deux cas précédents (la loi de concaténation H étant de type infimum ou de type produit) $f_{\alpha_i}(x)$ où $\alpha_i = a_{i_1} \circ \ldots \circ a_{i_n}$ tend vers un idempotent de H quand n tend vers l'infini. Cette situation ne se généralise pas.

En effet, soient a, b, c trois observations telles que:

– $f_a(x) < f_c(x) < f_b(x)$;
– $f_c(x) = f_{c\circ c}(x) = H(f_c(x), f_c(x))$;
– $f_c(x)$ est le seul idempotent de H entre $f_a(x)$ et $f_b(x)$.

Alors:

$$f_{a\circ b\circ\ldots\circ b}(x) = H(f_a(x), f_{b\circ\ldots\circ b}(x)) = \inf(f_a(x), f_{b\circ\ldots\circ b}(x))\,.$$

Or $f_{b\circ\ldots\circ b}(x) \geqq f_c(x) \geqq f_a(x)$, d'où $f_{a\circ b\circ\ldots\circ b}(x) = f_a(x)$, où $f_a(x)$ n'est pas nécessairement un idempotent de H.

Traduit en terme de dimension la Proposition 3 devient

Corollaire 3. Soit $\mathscr{L}_p$ une famille d'observations symétrisée, soit la loi de type infimum comme loi de concaténation; alors:

$$\mathscr{D}^2_{\alpha,\beta}(A) = \mathscr{D}^1_{\alpha,\beta}(A)\,.$$

Les résultats précédents sont obtenus en faisant des hypothèses de structure sur la famille d'observations – famille symétrisée ou non, loi de concaténation de type produit ou infimum. Il semble qu'il soit difficile de se passer de telles hypothèses.

(Reçu le 16 Octobre 1978.)

REFERENCES

[1] S. Arimoto: Information theoretical considerations on estimation problems. Information and Control *19* (1971), 181–184.

[2] P. Billingsley: Hausdorff dimension in probability theory. Illinois Journ. of Math. *4* (1960), 190.

[3] F. Hausdorff: Dimension und Äusseres. Mass. Math. Ann. *79* (1919), 157–179.

[4] F. Hausdorff: Set theory. Chelsea publishing company. New York.

[5] J. Havrda, F. Charvát: Quantification method of classification processes, concept of structural α-entropy. Kybernetika *1* (1967), 3, 30–35.

[6] J. Hawkes: Hausdorff measure, entropy and the independance of small sets. Proc. London Math. Soc. (3) *23* (1974), 700–724.

[7] D. P. Mittal: New non-additive measures of entropy for a discrete probability distribution. (Conferences on measures of information and their applications, held in I. T. T. Bombay, 16–18 August 1974.)

[8] C. F. Picard: A propose des informations de type α. Publication C.N.R.S. Structures de l'Information, n° 3, 1975.

[9] A. Rényi: On measures of informations and entropy. Proc. 4 Berkeley Symp. Math. Statist., Probability, 1960, 1, 547–561. University of California Press, 1961.

[10] J. Sallantin: Approche commune de différents modèles en théorie de l'information. Developpements récents de la Théorie de l'Information et ses applications. Colloque International du C.N.R.S., n° 276, 1977.

[11] C. E. Shannon: A mathematical theory of communication. Bell System Tech. J. *27* (1948).

[12] Th. Van der Pyl: Information d'ordre α et de type β: axiomatique, propriétés. Thèse 3° Cycle, Université Paris VI, 1977.

Dr. Jean Sallantin, Dr. Thierry Van der Pyl, Groupe de Recherche 22 du C. N. R. S., Structures. de l'Information, Tour 45 — Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05. France.