

Информационные пучки в дифференциальных играх

Ярослав Григорьевич Ключин

В работе Ключина [1] были рассмотрены дифференциальные игры, информационная структура которых задавалась информационными множествами (t -сечениями пучков).

Однако ряд интересных информационных структур требует учета игроками информационной предыстории. В данной статье строится конструкция, позволяющая рассматривать игры на информационных пучках.

1. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

1. Начнем с формулировки и доказательства основной Леммы.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — фазовое пространство, $[t_0, \theta]$ — промежуток времени, $\mathcal{X}$ — метрическое пространство непрерывных функций:

$$x_\theta : [t_0, \theta] \rightarrow X.$$

Обозначим через x_t сужение x_θ на $[t_0, t]$, $t_0 \leq t \leq \theta$, соответствующее пространство функций обозначим через $\mathcal{X}_t$.

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, x_t),$$

с начальным условием

$$(1.2) \quad x(t_0) = x_0 \in X.$$

Предполагается, что отображение

$$f : X \times \bigcup_{t \in [t_0, \theta]} \mathcal{X}_t \rightarrow X$$

142 ограничено и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x^1, x_t^1) - f(x^2, x_t^2)| \leq h(|x^1 - x^2| + \varrho_t(x_t^1, x_t^2)), \\ x^1, x^2 \in X, x_t^1, x_t^2 \in \mathcal{X}_t, h = \text{const};$$

здесь

$$\varrho_t(x_t^1, x_t^2) = \max_{\tau \in [t_0, t]} |x_t^1 - x_t^2|, x_t^1, x_t^2 \in \mathcal{X}_t.$$

2. Лемма. На некотором сегменте $t - t_0 \leq d$ существует и притом только одно решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.2).

Доказательство. Уравнение (1.1) вместе с начальным условием (1.2) эквивалентно интегральному уравнению

$$(1.3) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), x_\tau) d\tau.$$

По предположению об ограниченности отображения $f|f(x, x_t)| \leq K = \text{const}$. Подберем d так, чтобы выполнялось условие

$$h \cdot d < \frac{1}{2}.$$

Обозначим через C_d метрическое пространство непрерывных функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\max_{\tau \in [t_0, d]} |x_d(\tau) - x_0| \leq Kd.$$

Пространство C_d полно, так как оно является замкнутым подпространством полного метрического пространства непрерывных функций на $[t_0, d]$. Заметим, что каждая функция x_d однозначно определяет семейство своих сужений x_t на $[t_0, t]$, $t - t_0 \leq d$ и сама вполне определяется этим семейством.

3. Рассмотрим отображение $z_d = Ax_d$, определяемое формулой

$$z_d(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), x_\tau) d\tau.$$

Отображение A каждую функцию из C_d переводит в некоторую функцию также из C_d при этом A является в C_d сжатием. Действительно, пусть $x_d \in C_d$. Тогда

$$|z_d(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(x(\tau), x_\tau) d\tau \right| \leq Kd;$$

здесь x_t сужение x_d на $[t_0, \tau]$. Следовательно, $A(C_d) \subset C_d$. Кроме того,

$$|z_d^1(t) - z_d^2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(x^1(\tau), x_t^1) - f(x^2(\tau), x_t^2)| d\tau \leq \\ hd(\max_t |x^1(t) - x^2(t)| + \max_t \varrho_t(x_t^1, x_t^2)) = 2hd \varrho_d(x_d^1, x_d^2).$$

Так как $hd < \frac{1}{2}$, то A — сжатие, т. е. уравнение имеет единственное решение в пространстве C_d . 143

4. Традиционными для дифференциальных уравнений методами (см., например, Коддингтон и Левинсон [2]) можно показать, что полученное решение продолжимо на весь промежуток $[t_0, \theta]$.

2. ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

1. Дифференциальную игру задают дифференциальным уравнением вида

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u^I(t), u^{II}(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$t \in [0, \theta], \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u^I(t) \in P^I, \quad u^{II}(t) \in P^{II}.$$

Функцию

$$f: X \times P^I \times P^{II} \rightarrow X$$

будем предполагать ограниченной.

Множества альтернатив игроков P^I и P^{II} будем считать компактными подмножествами метрических пространств, начальную точку x_0 для простоты будем считать равной нулю.

2. Функцию

$$u^i: [0, \theta] \rightarrow P^i, \quad i = I, II$$

будем называть программным управлением игрока i , а пару $(u^I(\cdot), u^{II}(\cdot))$ — управляющей функцией.

Решение уравнения (2.1) при фиксированной управляющей функции $(u^I(\cdot), u^{II}(\cdot))$ (если оно существует) будем называть партией и обозначать через $x(\cdot, u^I(\cdot), u^{II}(\cdot))$. Точку $x \in X$ будем называть позицией.

Управляющие функции, для которых существует единственное решение уравнения (2.1), будем называть допустимыми.

3. Если функция f в (2.1)

- 1) измерима по u^I, u^{II} при всяком x ,
- 2) существует константа C такая, что равномерно по u^I, u^{II} , имеет место неравенство

$$|f(x, u^I, u^{II})| \leq C(1 + |x|),$$

- 3) существует константа C_1 такая, что равномерно по u^I, u^{II} имеет место неравенство

$$|f(x_1, u^I, u^{II}) - f(x_2, u^I, u^{II})| \leq C_1(|x_1 - x_2|),$$

то по известным теоремам существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (см., например, Коддингтон и Левинсон [2]) всякая измеримая управляющая функция $(u^I(\cdot), u^{II}(\cdot))$ допустима.

4. Определение. Сужение u_t^i программного управления игрока i на $[0, t)$, $0 < t \leq \theta$ будем называть личным альтернативным t -дебютом игрока i , а пару (u_t^I, u_t^{II}) — альтернативным t -дебютом.

Информационный механизм игры зададим с помощью памяти игроков, т. е. многозначного отображения множества альтернативных t -дебютов в себя

$$(2.2) \quad M^i : \mathcal{U}_t^I \times \mathcal{U}_t^{II} \rightarrow 2^{\mathcal{W}^I \times \mathcal{W}^{II}},$$

определенного для $i = I, II$ и всех $t \in (0, \theta]$. Сужение на $[0, t]$ партии $x(\cdot, u^I(\cdot), u^{II}(\cdot))$, соответствующее альтернативному t -дебюту (u_t^I, u_t^{II}) , будем называть позиционным t -дебютом и обозначать через $x_t(u_t^I, u_t^{II})$.

5. В содержательных задачах информация игроков обычно определяется их индивидуальной способностью собрать и оценить сведения о „действительном положении дел“ в момент принятия решений. Типичным примером может служить стандартная процедура сбора и оценки разведданных в ходе боя.

Можно сказать, что отображение (2.2) есть количественная характеристика этой способности. Если к текущему моменту t реализовался альтернативный t -дебют (u_t^I, u_t^{II}) („подлинное положение дел“), то память (2.2) определит информацию игрока, т. е. формально задаст сведения $M^i(u_t^I, u_t^{II})$, которыми игрок i будет обладать в момент t .

Можно сказать, что память (2.2) задает отношение на $\mathcal{W}^I \times \mathcal{W}^{II}$. В частности, когда это отношение оказывается рефлексивным, симметричным и транзитивным, предлагаемая информационная схема совпадает с информационной структурой позиционных игр, введенной фон Нейманом и О. Моргенштерном [3].

Определение. Множество позиционных t -дебютов

$$(2.3) \quad \psi_t^i(u_t^I, u_t^{II}) = \{x_t(\bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}) : (\bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}) \in M^i(u_t^I, u_t^{II}) \text{ допустимы}\}$$

называется информационным t -пучком.

Пусть Ψ^i — семейство всех информационных пучков игрока i , $\psi^i(0) = \psi_0^i = x_0$, а Ψ_t^i — семейство информационных пучков, задаваемых отображением (2.2) при фиксированном t .

Чистыми стратегиями игроков будем называть функции вида

$$\pi^i : \Psi^i \rightarrow P^i.$$

Каждая ситуация в чистых стратегиях (π^I, π^{II}) реализуется в виде некоторого

альтернативного t -дебюта $(u_t^I, u_t^{II})(\pi^I, \pi^{II})$ и задает партию как решение (если оно существует) обыкновенного дифференциального уравнения

$$(2.4) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \pi^I, \pi^{II}), \quad x(0) = x_0,$$

получаемого из (2.1) подстановкой (π^I, π^{II}) вместо $(u^I(t), u^{II}(t))$. Однако, конечно, не для всякой ситуации решение будет существовать, поэтому встает вопрос о выделении допустимых ситуаций, т. е. ситуаций которые определяют единственную партию.

3. ДОПУСТИМЫЕ СТРАТЕГИИ

1. Для формулирования условий допустимости выскажем

Предположение 1. При каждом $t \in [0, \theta]$ на семействе информационных t -пучков игрока i определена метрика ϱ_t^i .

Если $\Psi_t^i, t \in [0, \theta]$ семейство замкнутых подмножеств пространства $\mathcal{X}_t$, то это может быть, например, Хаусдорфова метрика (см. Куратовский [4]).

Если Ψ_t^i — конечное семейство информационных пучков (например, конечное разбиение $\mathcal{X}_t$), то обычно оказывается удобным на Ψ_t^i задавать метрику, определяющую дискретную топологию. Тогда чистые стратегии игроков оказываются автоматически непрерывными: прообраз любого множества в пространстве альтернатив P^i открыт.

Нам однако не понадобится конкретный вид этих метрик, а требуется лишь выполнение следующих условий.

2. Предположение 2. 1. Требования к памяти. Память игроков такова, что из равенства

$$x(t, \bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}) = x(t, \bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II})$$

следует равенство

$$M^i(\bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}) = M^i(\bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}).$$

Иначе говоря, на альтернативных t -дебютах, приводящих к реализации одной и той же партии, значения памяти игроков должны совпадать.

Отсюда сразу получаем

$$\psi_t^i(\bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}) = \psi_t^i(\bar{u}_t^I, \bar{u}_t^{II}).$$

Обозначим теперь через $\psi_t^i(x_t)$ функцию

$$\psi_t^i : \mathcal{X}_t \rightarrow 2^{X^*}, \quad t \in [0, \theta],$$

$$\psi_i^i(x_i(u_i^I, u_i^{II})) = \psi_i^i(u_i^I, u_i^{II}).$$

2. Условие Липшица. Существует такая константа h , что

$$(3.1) \quad |f(x_1, u_1^I, u_1^{II}) - f(x_2, u_2^I, u_2^{II})| \leq h(|x_1 - x_2| + \|u_1^I - u_2^I\| + \|u_1^{II} - u_2^{II}\|),$$

$$x_1, x_2 \in X, \quad u_1^i, u_2^i \in P^i, \quad i = I, II;$$

$$(3.2) \quad \|\pi^i(\psi_{i,1}^i) - \pi^i(\psi_{i,2}^i)\| \leq h \varrho_i^i(\psi_{i,1}^i, \psi_{i,2}^i), \quad \psi_{i,1}^i, \psi_{i,2}^i \in \Psi_i^i;$$

$$(3.3) \quad \varrho_i^i(\psi_i^i(x_i^1), \psi_i^i(x_i^2)) \leq h \varrho_i(x_i^1, x_i^2), \quad x_i^1, x_i^2 \in \mathcal{X}_i;$$

здесь

$$\varrho_i(x_i^1, x_i^2) = \max_{\tau \in [0,1]} |x_i^1(\tau) - x_i^2(\tau)|$$

а ϱ_i^i — метрика, фигурирующая в Предположении 1.

3. Теорема 1. В условиях предположений 1–2 для каждой ситуации в чистых стратегиях (π^I, π^{II}) существует единственное решение уравнения (2.4).

Доказательство сводится к проверке того факта, что композиция функций $g(x, x_i) = f(x, \pi^I(\psi_i^I(x_i)), \pi^{II}(\psi_i^{II}(x_i)))$ удовлетворяет по x и x_i требованиям Леммы параграфа 1.

Подставив (3.3) в (3.2), получим

$$\|\pi^i(\psi_i^i(x_i^1)) - \pi^i(\psi_i^i(x_i^2))\| \leq h^2 \varrho_i(x_i^1, x_i^2).$$

Отсюда с учетом (3.1) получаем

$$(3.4) \quad |f(x_1, \pi^I(\psi_i^I(x_i^1)), \pi^{II}(\psi_i^{II}(x_i^1))) - f(x_2, \pi^I(\psi_i^I(x_i^2)), \pi^{II}(\psi_i^{II}(x_i^2)))|$$

$$\leq h^3(|x_1 - x_2| + 2\varrho_i(x_i^1, x_i^2)).$$

Неравенство (3.4) означает, что правая часть уравнения (2.4) удовлетворяет условиям Леммы.

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СТРАТЕГИЙ

1. Определение. Две стратегии игрока I $\bar{\pi}^I$ и $\tilde{\pi}^I$ будем называть эквивалентными, если для всех стратегий партнера π^{II} при всех $t \in [0, \theta]$ выполняется равенство

$$x(t, \bar{\pi}^I, \pi^{II}) = x(t, \tilde{\pi}^I, \pi^{II}).$$

Каждая ситуация (π^I, π^{II}) в силу соотношения (2.4) определяет некоторый альтернативный t -дебют $(u_t^I, u_t^{II}) (\pi^I, \pi^{II})$. Информационный t -пучок, определяемый $M^I((u_t^I, u_t^{II}) (\pi^I, \pi^{II}))$, обозначим через $\psi_t^I(\pi^I, \pi^{II})$.

Пусть Π^{II} — множество всех допустимых стратегий игрока II. Положим

$$X_I(\pi^I) = \{x_t^I(\pi^I, \pi^{II}) : \pi^{II} \in \Pi^{II}\},$$

$$\Psi_I^I(\pi^I) = \{\psi_t^I(\pi^I, \pi^{II}) : \pi^{II} \in \Pi^{II}\}.$$

2. Теорема 2. Для того, чтобы две стратегии $\bar{\pi}^I$ и $\tilde{\pi}^I$ игрока I были эквивалентны достаточно, чтобы при всех t выполнялись равенства

$$(4.1) \quad \begin{aligned} X_I(\bar{\pi}^I) &= X_I(\tilde{\pi}^I), \\ \Psi_I^I(\bar{\pi}^I) &= \Psi_I^I(\tilde{\pi}^I) \end{aligned}$$

и для любого информационного пути $\psi_t^I \in \Psi_t^I$, $t \in [0, \theta]$ при почти всех t выполнялось равенство

$$(4.3) \quad \bar{\pi}^I(\psi_t^I) = \tilde{\pi}^I(\psi_t^I).$$

Доказательство. Пусть игрок II выбрал свою произвольную стратегию π^{II} . Тогда какую бы стратегию $\bar{\pi}^I$ или $\tilde{\pi}^I$ ни выбрал игрок I, реализующийся информационный путь $\psi_t^I \in \Psi_t^I(\bar{\pi}^I)$, а₁ тогда в силу (4.3) вдоль этого пути при почти всех t

$$f(x, \bar{\pi}^I(\psi_t^I), \pi^{II}) = f(x, \tilde{\pi}^I(\psi_t^I), \pi^{II}).$$

Интегрируя это равенство, получим требуемое.

Легко привести пример, показывающий, что для неважнооднозначных по альтернативам игрока I правых частей уравнения (2.1) условия Теоремы 2 не являются необходимыми.

Теорема 3. Если функция f в уравнении (2.1) взаимнооднозначная функция альтернатив игрока I и¹ (при фиксированных x и u^{II}), то условия Теоремы 2 и необходимы для эквивалентности стратегий $\bar{\pi}^I$ и $\tilde{\pi}^I$.

Доказательство. По определению эквивалентных стратегий для всех $t \in [0, \theta]$ и $\pi^{II} \in \Pi^{II}$ $x(t, \bar{\pi}^I, \pi^{II}) = x(t, \tilde{\pi}^I, \pi^{II})$ и следовательно

$$(4.4) \quad x_t(\bar{\pi}^I, \pi^{II}) = x_t(\tilde{\pi}^I, \pi^{II}),$$

т. е.

$$X_I(\bar{\pi}^I) = X_I(\tilde{\pi}^I).$$

В силу пункта 1 Предположения 2 из (4.4) получим

$$\psi_t^I(x_t(\bar{\pi}^I, \pi^{II})) = \psi_t^I(x_t(\tilde{\pi}^I, \pi^{II})),$$

$$\Psi_t^I(\bar{\pi}^I) = \Psi_t^I(\pi^I).$$

Равенство (4.3) докажем от противного. Предположим, что найдутся информационный путь $\psi_t^I \in \Psi_t^I(\bar{\pi}^I)$ и множество $T_0 \subset [0, \theta]$ ненулевой лебеговой меры такие, что для $t \in T_0$

$$\bar{\pi}^I(\psi_t^I) \neq \bar{\pi}^I(\psi_t^I).$$

Но тогда для $t \in T_0$ в силу взаимной однозначности функции f по u^I

$$(4.5) \quad f(x(t), \bar{\pi}^I(\psi_t^I), \pi^{II}) \neq f(x(t), \bar{\pi}^I(\psi_t^I), \pi^{II}).$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \bar{\pi}^I(\psi_t^I), \pi^{II}), \quad x(0) = x_0$$

и

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \bar{\pi}^I(\psi_t^I), \pi^{II}), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть $\bar{x}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ — решения этих уравнений. Из (4.5) получаем: для $t \in T_0$

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \neq \frac{d\tilde{x}(t)}{dt}$$

и следовательно по крайней мере для некоторых $t \in [0, \theta]$

$$\bar{x}(t) \neq \tilde{x}(t)$$

что противоречит предположению об эквивалентности $\bar{\pi}^I$ и π^I .

(Поступило в редакцию 5 сентября 1978.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Я. Г. Ключин: Информационная структура и эквивалентность стратегий в дифференциальных играх. Доклады Академии Наук СССР 232 (1977), 1, 20—23.
- [2] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон: Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, Москва 1958.
- [3] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн: Теория игр и экономическое поведение. Наука, Москва 1970.
- [4] К. Куратовский: Топология. Т. I, Москва, Мир 1966.

Ярослав Григорьевич Ключин, научный сотрудник Института Социально-Экономических Проблем Академии Наук СССР, Ленинград, ул. Воинова, 50-а. СССР.