KYBERNETIKA — ТОМ *10* (1974), ВЫПУСК 2

К вопросу об оптимальной фильтрации и экстраполяции радиолокационного сигнала с неполными данными

Ю. Цохлар, Г. Красовский

В работе обсуждаются вопросы применения теории оптимальной нелинейной фильтрации марковских последовательностей в задаче фильтрации и экстраполяции данных обзорного радиолокатора. Этот подход в отличие от известного метода фильтрации Калмана-Бьюси позволяет получить выражения оптимального фильтра и в случае пропусков сигнала. Обсуждаются возможности применения данного метода, когда параметры движения цели в процессе слежения значительно меняются. Далее приводятся расчетные кривые зависимостей ошибок фильтрации и экстраполяции от параметров априорной модели и вероятности обнаружения цели.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное внимание уделяется проблеме оптимальной обработки данных при автоматическом слежении за манервирующими объектами при помощи ЭВМ. В процессе слежения вычислительная машина последовательно обрабатывает данные о целях и составляет трассы самолетов. Принадлежность сообщения к трассе определяется его появлением в области ожидания (О.О.), величина которй зависит от количества известной информации о цели и желаемых вероятностей появления в ней настоящих и ложных сообщений.

Одной из основных задач данной проблеммы является оптимизация процесса фильтрации и экстраполяции положения целей для уменшения результирующей площади О.О. Данная работа посвящена выводу рекуррентного соотношения для оптимального (в среднеквадратическом смысле) фильтра методом последовательной фильтрации для случая слежения за целями при помощи импульсного обзорного радиолокатора в системе управления воздушным движением. В работе приводится дискретная модель движения цели, которая позволяет реализовать последовательный фильтр и в случае пропуска или маневра цели.

Движение цели описывается статистическими методами, при этом предполагается, что ускорение объекта является стационарной марковской цепью. Это предположение обуславливается характером уравнений динамики движения цели. После некоторых предположений можно развитие состояний марковской цепи преобразовать в систему уравнений, исходя из которой выводятся рекуррентные соотношения последовательного фильтра.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ФИЛЬТРА

В 1968 году Липцером и Ширяевым была опубликована работа об оптимальной последовательной фильтрации непрерывных марковских процессов [1]. Результаты данной работы были обобщены Глонти на случай дискретного времени [2], [3]. Определим последовательный фильтр.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ задана двухмерная марковская цепь (θ_n, ξ_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ где $\theta_n = \theta_n(\omega) \in R^k$ – ненаблюдаемая (действительная), а $\xi_n = \xi_n(\omega) \in R^l$ – наблюдаемая (измеряемая) компоненты в моменты времени $t = n \,.\, \Delta$, $(\Delta > 0)$. Обозначим $\hat{\theta}_n(\omega) = \hat{\theta}_n(\xi_0, \ldots, \xi_n(\omega))$ оптимальную в средне квадратическом смысле оценку ненаблюдаемой компоненты θ_n по $\xi^n = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

Известно, что $\hat{\theta}_n = M(\theta_n \mid \xi^n)$. Допустим, что данная марковская цепь

$$(1) \qquad (\theta_n, \xi_n) = ((\theta_1(n), \ldots, \theta_k(n)), (\xi_1(n), \ldots, \xi_l(n))$$

допускает представление в виде системы разностных уравнений

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Delta\theta_n &= \boldsymbol{a}_0(\xi_n, n) \,.\, \Delta + \boldsymbol{a}_1(\xi_n, n) \,.\, \theta_n \,.\, \Delta + \\ &\quad + \boldsymbol{b}_1(\xi_n, n) \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{b}_2(\xi_n, n) \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_2(n)\,, \\ \Delta\xi_n &= \boldsymbol{A}_0(\xi_n, n) \,.\, \Delta + \boldsymbol{A}_1(\xi_n, n) \,.\, \theta_n \,.\, \Delta + \\ &\quad + \boldsymbol{B}_1(\xi_n, n) \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{B}_2(\xi_n, n) \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_2(n)\,, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{a}_0 = (a_{01}, \ldots, a_{0k})$, $\boldsymbol{A}_0 = (A_{01}, \ldots, A_{0l})$ – вектор-функции, $\boldsymbol{a}_1 = \|a_{ij}\|$, $\boldsymbol{A}_1 = \|A_{ij}\|$, $\boldsymbol{b}_1 = \|b^1_{ij}\|$, $\boldsymbol{b}_2 = \|b^2_{ij}\|$ $\boldsymbol{B}_1 = \|B^1_{ij}\|$, $\boldsymbol{B}_2 = \|B^2_{ij}\|$ – матрицы порядков $k \times k$, $l \times k$, $k \times k$, $k \times l$, $l \times k$, $l \times l$ и $\boldsymbol{w}_1(n) = (w_{11}(n), \ldots, w_{1k}(n))$, $\boldsymbol{w}_2(n) = (w_{21}(n), \ldots, w_{22}(n))$ k и l – мерные гауссовские последовательности с независимыми приращениями и с независимыми компонентами, у которых

$$M\, w_{pq}(n) = 0\,, \quad M[w_{pq}(n) - w_{pq}(s)]^2 = n - s$$

$$n > s\,, \quad p = 1\,, \quad 1 \leqq q \leqq k\,; \quad p = 2\,, \quad 1 \leqq q \leqq l$$

Тогда известна

Теорема 1. *Если марковскую цепь (1) можно представить при помощи соотношения (2), априорное распределение*

$$P(\theta_0 \leqq \theta \mid \xi_0) = P(\theta_1(0) \leqq \theta_1, \ldots, \theta_k(0) \leqq \theta_k \mid \xi_0)$$

является нормальным с параметрами

$$\mathbf{m}_0 = M(\theta_0 \mid \xi_0), \quad \Gamma_0 = M[(\theta_0 - \mathbf{m}_0)(\theta_0 - \mathbf{m}_0)^* \mid \xi_0]$$

и если матрица $(\mathbf{B} \circ \mathbf{B}) = \mathbf{B}_1 . \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_2 . \mathbf{B}_2^*$ *невырождена, то апостериорное распределение*

$$P(\theta_n \leqq \theta \mid \xi^n) = P(\theta_1(n) \leqq \theta_1, \ldots, \theta_k(n) \leqq \theta_k \mid \xi^n)$$

также является нормальным с параметрами

$$\mathbf{m}(n) = M(\theta_n \mid \xi^n), \quad \Gamma_n = M[(\theta_n - \mathbf{m}(n))(\theta_n - \mathbf{m}(n))^* \mid \xi^n]$$

удовлетворяющими разностным уравнениям

$$\begin{aligned}(3) \qquad \Delta\mathbf{m}(n) = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 . \mathbf{m}(n)) . \Delta + [(\mathbf{E} + \mathbf{a}_1 . \Delta) . \Gamma_n . \mathbf{A}_1^* + (\mathbf{b} \circ \mathbf{B})] \,.\\ . [(\mathbf{B} \circ \mathbf{B}) + \mathbf{A}_1 . \Gamma_n . \mathbf{A}_1^* . \Delta]^{-1} . [\Delta\xi_n - (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 . \mathbf{m}(n)) . \Delta],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \qquad \Delta\Gamma_n/\Delta = (\mathbf{b} \circ \mathbf{b}) + \mathbf{a}_1 . \Gamma_n . \mathbf{a}_1^* . \Delta + \mathbf{a}_1 . \Gamma_n + \Gamma_n . \mathbf{a}_1^* - \\ - [(\mathbf{E} + \mathbf{a}_1 . \Delta) . \Gamma_n . \mathbf{A}_1^* + (\mathbf{b} \circ \mathbf{B})] . [(\mathbf{B} \circ \mathbf{B}) + \mathbf{A}_1 . \Gamma_n . \mathbf{A}_1^* . \Delta]^{-1} \,. \\ . [(\mathbf{E} + \mathbf{a}_1 . \Delta) . \Gamma_n . \mathbf{A}_1^* + (\mathbf{b} \circ \mathbf{B})]^*,\end{aligned}$$

где

$$(\mathbf{b} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{b}_1 . \mathbf{b}_1^* + \mathbf{b}_2 . \mathbf{b}_2^*, \quad (\mathbf{b} \circ \mathbf{B}) = \mathbf{b}_1 . \mathbf{B}_1^* + \mathbf{b}_2 . \mathbf{B}_2^*,$$

$\mathbf{C}^*$ *— матрица сопряженная к* $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ *— единичная матрица порядка* $k \times k$.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned}(2\text{a}) \qquad \Delta\theta_n &= [\mathbf{a}_0(\xi^n, n) + \mathbf{a}_1(\xi^n, n) . \theta_n] . \Delta + \\ &+ \mathbf{b}_1(\xi^n, n)\,\Delta\mathbf{w}_1(n) + \mathbf{b}_2(\xi^n, n)\,\Delta\mathbf{w}_2(n), \\ \Delta\xi_n &= [\mathbf{A}_0(\xi^n, n) + \mathbf{A}_1(\xi^n, n) . \theta_n] . \Delta + \\ &+ \mathbf{B}_1(\xi^n, n)\,\Delta\mathbf{w}_1(n) + \mathbf{B}_2(\xi^n, n)\,\Delta\mathbf{w}_2(n),\end{aligned}$$

отличающуюся от (2) тем, что коэффициенты — суть функции всего прошлого $\xi^n = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$. В работе [2] указывается, что в этом случае конечный результат теоремы 1 не меняется. Следовательно и в этом случае справедлива теорема 1 с той лишь перефразировкой, что коэффициенты нужно понимать как функции всего прошлого.

При автоматическом слежении за целями необходимо после каждого обзора экстраполировать положение цели на один обзор вперед. При этом для определения области ожидания необходимо определить компоненты матрицы ошибок экстраполяции.

Обозначим:

$$^{e}\boldsymbol{m}(n+1) \text{ — оценка экстраполированной координаты},$$

$$^{e}\Gamma(n+1) \text{ — матрица ошибок экстраполяции}.$$

Докажем

Теорему 2. *Если марковская цепь* (1) *допускает представление* (2) *и распределение*

$$P(\theta_n \leqq \theta \mid \xi^n) = P(\theta_1(n) \leqq \theta_1, \ldots, \theta_k(n) \leqq \theta_k \mid \xi^n)$$

нормальное с параметрами

$$\boldsymbol{m}(n) = M(\theta_n \mid \xi^n),$$
$$\Gamma(n) = M[(\theta_n - \boldsymbol{m}(n)) . (\theta_n - \boldsymbol{m}(n))^* \mid \xi^n],$$

то распределение $P(\theta_{n+1} \leqq \theta \mid \xi^n)$ будет тоже нормальным с параметрами:

$$^{e}\boldsymbol{m}(n+1) = M(\theta_{n+1} \mid \xi^n),$$
$$^{e}\Gamma(n+1) = M[(\theta_{n+1} - {}^{e}\boldsymbol{m}(n+1))(\theta_{n+1} - {}^{e}\boldsymbol{m}(n+1))^* \mid \xi^n].$$

При этом $^{e}\Gamma(n+1)$ *удовлетворяет разностному уравнению*

$$\Delta^{e}\Gamma_n/\Delta = (\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}_1 . \Gamma_n . \boldsymbol{a}_1^* . \Delta + \boldsymbol{a}_1 . \Gamma_n + \Gamma_n . \boldsymbol{a}_1^*,$$
$$\Delta^{e}\Gamma_n = {}^{e}\Gamma(n+1) - \Gamma(n).$$

Доказательство. По условию теоремы θ_{n+1} запишется

$$\theta_{n+1} = \theta_n + (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 . \theta_n) . \Delta + \boldsymbol{b}_1 . \Delta\boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{b}_2 . \Delta\boldsymbol{w}_2(n).$$

В следствие того, что $\Delta\boldsymbol{w}_1(n)$, $\Delta\boldsymbol{w}_2(n)$ — нормальные случайные независимые последовательности с нулевыми математическими ожиданиями, тогда действительно

$$^{e}\boldsymbol{m}(n+1) = \boldsymbol{m}(n) + (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{m}(n)) . \Delta,$$
$$\Delta^{e}\boldsymbol{m}(n+1) = {}^{e}\boldsymbol{m}(n+1) - \boldsymbol{m}(n) = (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{m}(n)) . \Delta.$$

По определению можем записать

$$^{e}\Gamma(n+1) = M[(\theta_{n+1} - {}^{e}\boldsymbol{m}(n+1)) . (\theta_{n+1} - {}^{e}\boldsymbol{m}(n+1))^* \mid \xi^n],$$

где

$$\theta_{n+1} - {}^e\boldsymbol{m}(n+1) = \theta_n - \boldsymbol{m}(n) + \boldsymbol{a}_1 \cdot (\theta_n - \boldsymbol{m}(n)) \,.\, \Delta + \\ + \boldsymbol{b}_1 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{b}_2 \,.\, \Delta w_2(n) = \\ = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Delta) \,.\, (\theta_n - \boldsymbol{m}(n)) + \boldsymbol{b}_1 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{b}_2 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_2(n) \,.$$

Тогда можем найти окончательное выражение для ${}^e\Gamma(n+1)$

$${}^e\Gamma(n+1) = M[(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Delta) \,.\, (\theta_n - \boldsymbol{m}(n)) \,.\, (\theta_n - \boldsymbol{m}(n))^* \, (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Delta)^* \mid \xi^n] + \\ + M[(\boldsymbol{b}_1 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{b}_2 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_2(n)) \,.\, (\boldsymbol{b}_1 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_1(n) + \boldsymbol{b}_2 \,.\, \Delta \boldsymbol{w}_2(n))^* \mid \xi^n] = \\ = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Delta) \,.\, \Gamma_n \,.\, (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Delta)^* + (\boldsymbol{b}_1 \,.\, \boldsymbol{b}_1^* + \boldsymbol{b}_2 \,.\, \boldsymbol{b}_2^*) \,.\, \Delta = \\ = \Gamma_n + (\boldsymbol{a}_1 \,.\, \Gamma_n + \Gamma_n \,.\, \boldsymbol{a}_1^*) \,.\, \Delta + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Gamma_n \,.\, \boldsymbol{a}_1^* \,.\, \Delta^2 + (\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{b}) \,.\, \Delta \,.$$

В разностной форме можем записать

$$\Delta^e\Gamma_n/\Delta = (\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Gamma_n \,.\, \boldsymbol{a}_1^* \,.\, \Delta + \boldsymbol{a}_1 \,.\, \Gamma_n + \Gamma_n \,.\, \boldsymbol{a}_1^* \,,$$

где

$$\Delta^e\Gamma_n = {}^e\Gamma(n+1) - \Gamma(n) \,.$$

Теорема доказана.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Для того, чтобы модель движения объекта можно было применить в системе слежения, необходимо, чтобы она была достаточно простой, т. е. время, затрачиваемое фильтром на обработку данных, должно быть меньше периода обзора радиолокатора. В то же время модель должна учитывать маневренные свойства следуемого объекта. Предполагаем, что самолет летит по активному участку траектории, т. е. высота полета не меняется и самолет приблизительно летит в плоскости. Для того, чтобы продемонстрировать возможности предлагаемого метода и избежать при этом громоздких выкладок, уравнение модели приводится только в одном измерении. Исходя из вышесказанного уравнение модели можем записать в виде вектора:

$$\boldsymbol{R}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

где x_n, v_n, a_n — соответственно координата, скорость и ускорение цели в момент времени $n \,.\, \Delta$.

Обобщение модели на случай пространственного движения цели не представляет принципиальной трудности и будет проведено авторами в следующей работе.

Предположим, что ускорение объекта меняется как стационарная марковская последовательность

$$a_{n+1} = \varrho a_n + \sigma_a \,.\, \sqrt{(1-\varrho^2)} \,.\, \Delta w(n)\,, \quad a_0 = N(0, \sigma_a^2)\,,$$

$$M(a_i) = 0\,, \quad M(a_i \,.\, a_j) = \sigma_a^2 \,.\, \varrho^{|i-j|}\,, \quad \Delta w(n) = w(n+1) - w(n) = N(0, 1)\,,$$

ϱ и σ_a – константы, $|\varrho| < 1$.

Основываясь на данных работы [4] возьмем $\varrho = e^{-\Delta/\beta}$, где Δ – период обзора радиолокатора, β – среднее время маневра, его значения для различных режимов полета приведены также в [4], σ_a^2 – априорная дисперсия ускорения. Исходя из сделанных выше предположений можно изменение состояний вектора приблизительно описать системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= v_n \,.\, \Delta + a_n \,.\, \Delta^2/2\,, \\ \Delta v_n &= a_n \,.\, \Delta\,, \\ \Delta a_n &= E_1 \,.\, a_n + \sigma_a \,.\, E_2 \,.\, \Delta w_{13}(n)\,, \end{aligned}$$

$$E_1 = \exp\left(-\frac{\Delta}{\beta}\right) - 1\,; \quad E_2 = \sqrt{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\Delta}{\beta}\right)\right)} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,, \quad \Delta w_{11} = \Delta w_{12} = 0\,,$$

$$\Delta w_{13} = N(0, \Delta)\,.$$

Сравнивая данную систему уравнений с (2), получим

$$\boldsymbol{R}_n = \theta_n = \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \Delta/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2^2 \end{pmatrix}.$$

Аппаратура, измеряющая положение цели, выдает данные согласно уравнению

$$\xi_n = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{R}_n + \boldsymbol{U}(n)\,,$$

где $\boldsymbol{U}(n)$ – вектор ошибок измерения, ξ_n – вектор измерений.

При радиолокационном наблюдении за целью возможны два случая:

1. Поступает сообщение о цели вместе с ошибками измерения. Об ошибках измерения известно [5], что они в каждом обзоре независимы и имеют приблизительно нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, где σ^2 – известная величина дисперсии ошибки измерений координаты. В этом случае $\boldsymbol{H} = (1\;0\;0)$ и

$$\xi_{n+1} = z_{n+1} = x_{n+1} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} \Delta w_{21}(n)\,,$$

$$\Delta w_{21}(n) = w_{21}(n+1) - w_{21}(n) = N(0, \Delta)\,,$$

z_n — измереное значение координаты цели.

В случае, когда измеряется координаты цели и скорость $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xi_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\,\Delta w_{21}(n) \\ \\ v_{n+1} + \dfrac{\sigma_v}{\sqrt{\Delta}}\,\Delta w_{22}(n) \end{pmatrix},$$

σ_v^2 = дисперсия ошибки измерения скорости.

2. С известной вероятностью $1 - P_{\mathrm{D}}$ происходит пропуск следуемого объекта (т. е. в область ожидания не попадает сообщение о цели). Известно [6], что пропуски цели в разные моменты статистически независимы. Для записи вектора измерений и в случае пропуска цели введем функцию $\varphi(p_n)$ со следующими свойствами:

$$\varphi(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{если имеется сообщение о цели в обзоре } n\,, \\ 0 & \text{если сообщение о цели в обзоре } n \text{ не поступает}\,. \end{cases}$$

Для выполнения требований, предъявляемых к исходной модели теоремой 1, мы ввели p_n — фиктивную будто бы измеряемую случайную последовательность независимых гауссовых величин, с распределением $N(0, 1)$. p дано так, что: если $p_n > p$, то $\varphi(p_n) = 1$, в случае, когда $p_n \leqq p$, $\varphi(p_n) = 0$. Величина порога p выбирается так, чтобы $\varphi(p_n) = 1$ с вероятностью P_{D}.

Тогда в обоих случаях (режиме обнаружения и пропуска цели) можем записать вектор измерения цели ξ_n в виде (2)

$$\Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \begin{pmatrix} \Delta z_n \\ \Delta p_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(\dfrac{z_n}{\Delta}\right)\Delta + \varphi(p_n)\left(\dfrac{x_n}{\Delta} + v_n + a_n\dfrac{\Delta}{2}\right)\Delta + \dfrac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\,\Delta w_{21}(n) \\ \\ -\left(\dfrac{p_n}{\Delta}\right)\Delta + \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\Delta w_{22}(n) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты системы (2) для наблюдаемой координаты ξ_n равны

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{z_n}{\Delta} \\ \\ -\dfrac{p_n}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \varphi(p_n)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta} & 1 & \dfrac{\Delta}{2} \\ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix}.$$

Для применения теоремы 1 необходимо проверить существование матрицы $(\mathbf{B} \circ \mathbf{B})^{-1}$

$$(\mathbf{B} \circ \mathbf{B}) = \mathbf{B}_1 \,.\, \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_2 \,.\, \mathbf{B}_2^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{B} \circ \mathbf{B}) = \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \neq 0\,.$$

Для $\sigma, \Delta \neq 0$, матрица $(\mathbf{B} \circ \mathbf{B})^{-1}$ — существует.

В случае, когда в системе измеряется скорость, вектор измерений будет иметь вид

$$\Delta^{\mathrm{v}}\xi_n = \begin{pmatrix} \Delta z_n \\ \Delta V_n \\ \Delta p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{z_n}{\Delta}\Delta + \varphi(p_n)\left(\dfrac{x_n}{\Delta} + v_n + a_n\dfrac{\Delta}{2}\right)\Delta + \dfrac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\Delta w_{21}(n) \\ -\dfrac{V_n}{\Delta}\Delta + \varphi(p_n)\left(\dfrac{v_n}{\Delta} + a_n\right)\Delta + \dfrac{\sigma_v}{\sqrt{\Delta}}\Delta w_{22}(n) \\ -\dfrac{p_n}{\Delta}\Delta + \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\Delta w_{23}(n) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$^{\mathrm{v}}\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{z_n}{\Delta} \\ -\dfrac{V_n}{\Delta} \\ -\dfrac{p_n}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad ^{\mathrm{v}}\mathbf{A}_1 = \varphi(p_n)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta} & 1 & \dfrac{\Delta}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{\Delta} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$^{\mathrm{v}}\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}\,, \quad ^{\mathrm{v}}\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_v}{\sqrt{\Delta}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix}, \quad (^{\mathrm{v}}\mathbf{B} \circ {}^{\mathrm{v}}\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_v^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\Delta} \end{pmatrix}, \,.$$

Существование матрицы, обратной $(^{\mathrm{v}}\mathbf{B} \circ {}^{\mathrm{v}}\mathbf{B})$ очевидно.

Покажем, что фиктивная (неизмеряемая) величина p_n не содержится в выражениях фильтра, т. е. нет необходимости при реализации последовательного фильтра знать ее значения. Рассмотрим случай, когда в системе измеряется только положение цели. В самом деле, в явном виде p_n содержится лишь в выражении

$$[\Delta\xi_n - (\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\, \boldsymbol{m}(n)\ \Delta] = \begin{pmatrix} z_{n+1} - \varphi(p_n)\left(m_x(n) + m_v(n)\,\Delta + m_a(n)\,\dfrac{\Delta^2}{2}\right) \\ p_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Но вследствие того, что фиктивная величина p_n не зависит от значений ненаблюдаемого вектора θ_n, нижняя строка в матрице $\boldsymbol{A}_1$ всегда нулевая и при выполнении операции умножения в (3) p_n изчезнет и в конечном выражении фильтра останется лишь функция $\varphi(p_n)$ значения которой известны в каждом обзоре. После проведения необходимых вычислений получим окончательное выражение оптимального последовательного фильтра. Для случая, когда измеряется только положение цели, выражение фильтра имеет вид

$$m_x(n+1) = m_x(n) + m_v(n)\,.\,\Delta + m_a(n)\,.\,\frac{\Delta^2}{2} + \Gamma D(n)\,.\,\Gamma H1(n)\,.\,\Gamma S(n+1)\,,$$

$$m_v(n+1) = m_v(n) + m_a(n)\,.\,\Delta + \Gamma D(n)\,.\,\Gamma H2(n)\,.\,\Gamma S(n+1)\,,$$

$$m_a(n+1) = m_a(n)\,.\,(E_1 + 1) + \Gamma D(n)\,.\,\Gamma H2(n)\,.\,\Gamma S(n+1)\,.$$

Если дополнительно измеряется и скорость цели, выражения фильтра сложнее

$$\begin{aligned} m_x(n+1) &= m_x(n) + m_v(n)\,\Delta + 0{,}5\, m_a(n)\,.\,\Delta^2 + \\ &+ \Big\{[\Gamma H1(n)\,(\sigma_v^2\,\Delta^{-1} + \Gamma H4(n)) - (\Gamma H2(n))^2]\,\Gamma S(n+1) + \\ &+ \Gamma H2(n)\,\frac{\sigma^2}{\Delta}\,\Gamma SV(n+1)\Big\}\,\Gamma DV(n)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_v(n+1) &= m_v(n) + m_a(n)\,\Delta + \Big\{\Gamma H2(n)\,\sigma_v^2\,\Delta^{-1}\Gamma S(n+1) + \\ &+ \left[-(\Gamma H2(n))^2 + \Gamma H4(n)\left(\frac{\sigma^2}{\Delta} + \Gamma H1(n)\right)\right]\Gamma SV(n+1)\Big\}\,\frac{\Gamma DV(n)}{\Delta}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_a(n+1) &= m_a(n)\,(E_1 + 1) + \left\{\left[\Gamma H3(n)\left(\frac{\sigma_v^2}{\Delta} + \Gamma H4(n)\right) - \Gamma H2(n)\,\Gamma H5(n)\right]\,.\right. \\ &.\,\Gamma S(n+1) + \left[-\Gamma H3(n)\,\Gamma H2(n) + \Gamma H5(n)\left(\frac{\sigma^2}{\Delta} + \Gamma H1(n)\right)\right]. \\ &\left..\,\Gamma SV(n+1)\right\}\frac{\Gamma DV(n)}{\Delta}\,, \end{aligned}$$

где

$$\Gamma H1(n) = \Gamma_{11}\,\Delta^{-1} + 2\Gamma_{12} + \Delta\,(\Gamma_{13} + \Gamma_{22}) + \Delta^2\,\Gamma_{23} + 0{,}25\,\Delta^3\,\Gamma_{33}\,,$$

$$\Gamma H2(n) = \Gamma_{12}\,\Delta^{-1} + \Gamma_{13} + \Gamma_{22} + 1{,}5\,\Delta\,\Gamma_{23} + 0{,}5\,\Gamma_{33}\,\Delta^2\,,$$

$$\Gamma H3(n) = (E_1 + 1)\,(\Gamma_{13}\,\Delta^{-1} + \Gamma_{23} + 0{,}5\,\Gamma_{33})\,,$$

$$\Gamma H4(n) = \Gamma_{22}\,\Delta^{-1} + 2\,\Gamma_{23} + \Delta\,\Gamma_{33}\,,$$

$$\Gamma H5(n) = (E_1 + 1)\,(\Gamma_{23}\,\Delta^{-1} + \Gamma_{33})\,,$$

$$\Gamma D(n) = (\sigma^2\,\Delta^{-1} + \Gamma H1)^{-1}\,\varphi(p_n)\,,$$

$$\Gamma DV(n) = \Delta\,.\,[(\sigma^2\,\Delta^{-1} + \Gamma H1)\,(\sigma_a^2\,\Delta^{-1} + \Gamma H4) - (\Gamma H2)^2]^{-1}\,\varphi(p_n)\,,$$

$$\Gamma S(n) = z_{n+1} - m_x(n) - m_v(n)\,\Delta - m_a(n)\,\frac{\Delta^2}{2}\,,$$

$$\Gamma SV(n) = V_{n+1} - m_v(n) - m_a(n)\,\Delta\,.$$

Отметим, что в случае пропуска цели $\varphi(p_n) = 0$, и $\Gamma D = \Gamma DV = 0$

$$m_x(n+1) = m_x(n) + m_v(n)\,\Delta + m_a(n)\,\frac{\Delta^2}{2}\,,$$

$$m_v(n+1) = m_v(n) + m_a(n)\,.\,\Delta\,,$$

$$m_a(n+1) = m_a(n)\,.\,(E_1 + 1)\,,$$

т. е. автоматически проводится линейная экстраполяция координат, которая при сделанных выше предположениях о ускорении и ошибках измерениях является оптимальной в смысле минимума среднеквадратических ошибок. В случае, когда $P_D = 1$ и коэффициенты системы (2) не зависит от реализаций, уравнения фильтра переходят в известные уравнения Калмана-Бьюси [4].

Пропуск цели может быть обусловлен маневром цели. И в этом случае можно ввести фиктивную псевдоизмеряемую случайную последовательность q_n и нелинейную функцию:

$$\psi(q_n) = \begin{cases} 1 & \text{цель маневрирует в обзоре } n\,, \\ 0 & \text{маневра нет}\,. \end{cases}$$

Последовательность q_n должна удовлетворять системе (2) и не зависит от значений ненаблюдаемого вектора θ_n. Статистические свойства q_n и конкретный вид системы (2) надо определить в соответствии со статистикой маневров пассажирских самолетов. После этого возможно ввести функциональную зависимость коэффициентов априорной модели от $\psi(q_n)$, например

$$\sigma_a = \sigma_a(\psi(q_n))\,, \quad \beta = \beta(\psi(q_n))\,.$$

С помощью подобной модели можно эффективно реализовать алгоритмы вторичной обработки Спрингера, Кузмина и др.

Трудностью применения данного подхода в системах слежения является недостаток данных о статистике маневров пассажирских самолетов.

Отметим, что используя результаты теоремы 2, можем легко получить уравнение для экстраполированного значения координаты на один обзор вперед и выражение для матрицы ошибок экстраполяции.

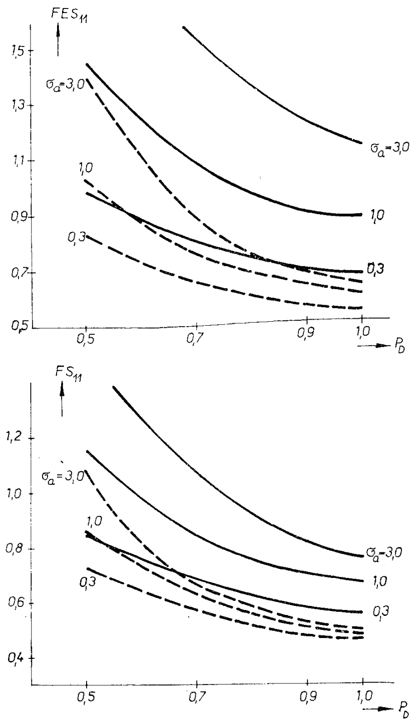

Рис. 1. Зависимость относительных точностей фильтрации FS_{11} и экстраполяции FES_{11} от вероятности обнаружения цели P_D $FS_{11} = \bar{\Gamma}_{11}^{1/2}\sigma^{-1}$, $FES_{11} = {}^{e}\bar{\Gamma}_{11}^{1/2}\sigma^{-1}$, где ${}^{e}\bar{\Gamma}_{11}$ и $\bar{\Gamma}_{11}$ — усредненные во времени значения элементов матрицы ошибок ${}^{e}\Gamma_{11}$ и Γ_{11} (——— скорость не измеряется, — — — — — с измерением скорости).

Целью исследования эксплуатационных характеристик фильтра было определение зависимостей усредненных во времени ошибок фильтрации от величин параметров фильтра β, σ_a, σ и вероятности обнаружения цели P_D. Начальные значения элементов матрицы ошибок и оценок компонент вектора θ_n для

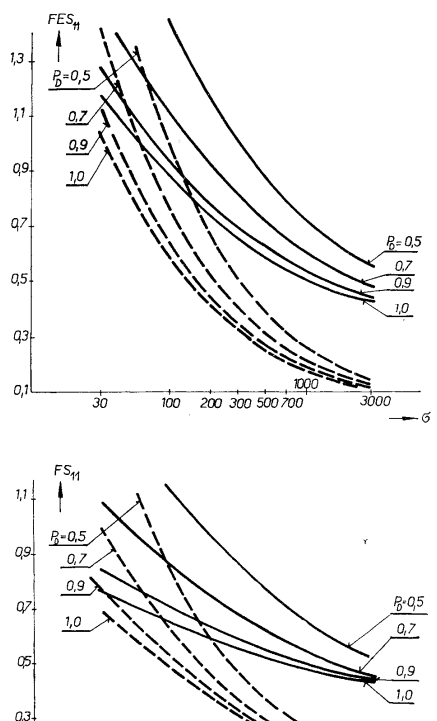

Рис. 2. Зависимость относительных точностей FS_{11} и FES_{11} от среднеквадратического отклонения ошибки измерения положения цели σ.

рекуррентных соотношений (3) полагались равными

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m}(0) = \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{v}\boldsymbol{m}(0) = \begin{pmatrix} z_0 \\ V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{m}(0)$ – измеряется только положение цели, ${}^{v}\boldsymbol{m}(0)$ – измеряется и скорость цели). Сначала рассчитывались предельные (стационарные) значения ошибок фильтрации и экстраполяции положения, скорости и ускорения цели (без учета выпадения цели) и сравнивались с соответствующими ошибками фильтра Калмана-Бьюси. Далее эти величины применялись как начальные значения для расчета составляющих матрицы ошибок с учетом выпадения целей.

Пропуски цели моделировались при помощи генератора псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Вычисленные значения компонент матрицы ошибок усреднялись за 1000 обзоров.

На рис. 1, 2 приведены графики зависимостей усредненных ошибок фильтрации и экстраполяции целей от вероятности обнаружения. Приведенные характеристики могут быть использованы для оперативного определения параметров радиолокатора при заданной точности обработки и вероятности обнаружения цели P_D.

(Поступила в редакцию 3 июля 1973 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Липцер, Р. Ш., Ширяев А. Н.: Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов. Труды Математического института 12 (1968), 135—180.

[2] Глонти, О. А.: Последовательная фильтрация и интерполяция компонент марковской цепи. Литовский математический сборник *9* (1969), 263—279.

[3] Глонти, О. А.: Экстраполяция компонент марковской цепи. Литовский математический сборник *9* (1969), 741—754.

[4] Singer, R. A.: Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets. IEEE Trans. *AES-6* (July 1970), 473—483.

[5] Vejražka, F.: Metoda optimalizace algoritmů druhotného zpracování radiolokačního signálu. Slaboproudý obzor *34*, (1973), 8, 354—359.

[6] Vrana, I.: Řešení problematiky zpracování radiolokačního signálu modelováním na číslicovém počítači. Slaboproudý obzor *32* (1971), 11, 497—503.

[7] Keuk, van G.: Zielverfolgung basierend auf dem Kalman-Bucy Filter. Angewandte Informatik (1972), 7, 302—308.

Ing. Jiří Cochlar, CSc, České vysoké učení technické, elektrotechnická fakulta (Политехнический институт, электротехнический факультет) Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6 - Dejvice. ČSSR.

Геннадий Иванович Красовский, Белорусский Государственный Университет, кафедра радиофизики и электроники СВЧ, Минск - центр. СССР.