Kybernetika

Základy optimalizace vícestupňových soustav

Petr Mandl

ACADEMIA
PRAHA

ÚVOD

Stať je věnována vícestupňovým soustavám s diskrétním evolučním (např. časovým) parametrem a soustavám se spojitým parametrem, popsaným diferenciálními rovnicemi. Tyto lze chápati jako limitní případ soustav s parametrem diskrétním. Předmětem výkladu jsou všeobecné principy, vyjádřené v podobě nutných či postačujících podmínek pro optimum. K úplnému řešení matematicky formulovaných optimalizačních úloh se pak používají metody matematického programování, numerické matematiky a programování na počítačích. Výklad je rozdělen do tří kapitol pojednávajících o Bellmanově principu, o diskrétním principu optimality a o Pontrjaginově principu. Základní pojmy jsou uvedeny na začátku kapitoly I. Seznam použité literatury je na konci práce. Příklady tvoří součást výkladu. Autor příkladu je vyznačen v závorce. Při odkazech v téže kapitole jsou formule, odstavce a věty označovány pořadovými čísly, při odkazech do jiné kapitoly též číslem kapitoly. Na konci důkazů je umístěn symbol □. Vektory a matice jsou psány polotučnými písmeny. Stavový vektor x se odlišuje od rozšířeného stavového vektoru $\boldsymbol{x}$. Rovněž se rozlišují příslušná zobrazení F, $\boldsymbol{F}$. Látka této stati, doplněná výkladem o řízených Markovových řetězcích, tvořila náplň přednášky Základy optimalizace pro zaměření teoretická kybernetika na fakultě jaderného a fyzikálního inženýrství ČVUT.

I. BELLMANŮV PRINCIP

1. Základní pojmy

Příklad 1 (L. C. Mitten). V jisté (velmi zjednodušené) hospodářské soustavě může být výrobek V vyráběn dvěma odvětvími A, B. Každá koruna investovaná v odvětví A na počátku roku přináší na konci roku a v každém dalším roce 2 kg výrobku V a navíc 0,50 korun zisku. Odpovídající hodnoty pro odvětví B jsou 1 kg výrobku V a 0,90 korun zisku. Úloha zní: při daných počátečních prostředcích y korun určit způsob rozdělení finančních prostředků, které jsou vždy na počátku roku k dispozici, mezi obě odvětví tak, aby celková výroba výrobku V v období pěti let byla co největší.

Jedná se o vícestupňový proces, který lze popsat s použitím následujícího označení (horní index značí pořadí souřadnice):

x_n^1 – celkové prostředky v odvětví A na konci n-tého období v korunách,
x_n^2 – celkové prostředky v B na konci n-tého období,
x_n^3 – volné finanční prostředky na konci n-tého období,
u_n – poměrná část volných prostředků reinvestovaná v odvětví A, $0 \leqq u_n \leqq 1$.

Platí tedy

$$x_n^1 = x_{n-1}^1 + u_{n-1}x_{n-1}^3 ,$$
$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + (1 - u_{n-1})\, x_{n-1}^3 ,$$
$$x_n^3 = 0{,}5(x_{n-1}^1 + u_{n-1}x_{n-1}^3) + 0{,}9(x_{n-1}^2 + (1 - u_{n-1})\, x_{n-1}^3) ,$$
$$n = 1, 2, \dots$$

Množství výrobku V, vyrobené v n-tém období je $2x_n^1 + x_n^2$ kg. Máme tedy maximalizovat:

$$\sum_{n=1}^{5} (2x_n^1 + x_n^2) = \sum_{k=0}^{4} [2(x_k^1 + u_k x_k^3) + x_k^2 + (1 - u_k)\, x_k^3] .$$

Přikročme nyní k obecným definicím. *Vícestupňový proces* popisuje vývoj soustavy, jejíž stav je dán stavovým vektorem $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \dots, x^r)$. Vývoj je popsán posloupností zobrazení stavových vektorů $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{x}) = (F_n^1(\boldsymbol{x}), \dots, F_n^r(\boldsymbol{x}))$. Je-li $\boldsymbol{x}_n$ stav soustavy v n-tém stupni, potom platí $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{F}_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1})$, n představuje evoluční parametr. Slovo vývoj je zde třeba chápat obrazně, neboť v řadě úloh nemá evoluční parametr s časem žádnou souvislost.

O *vícestupňovém rozhodovacím procesu* hovoříme, závisí-li zobrazení stavových vektorů na dalším parametru $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \dots, u^r) \subset U$, nazývaném *parametr řízení* (rozhodovací proměnná atd.). U je množina hodnot parametru řízení (prostor rozhodnutí). Proces je tedy charakterizován zobrazeními

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = (F_n^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \dots, F_n^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) , \quad n = 0, 1, \dots$$

Při daném počátečním stavu soustavy $\boldsymbol{x}_0$ je její vývoj do N-tého stupně $\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N\}$ určen volbou posloupnosti rozhodovacích proměnných $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{N-1}\}$. Platí $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{F}_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{u}_{n-1})$, $n = 1, \dots, N$. Posloupnost $\{\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_{N-1}\}$ budeme nazývat *řízením*.

K porovnání jednotlivých řízení slouží *výsledková* (cílová, účelová atd.) *funkce* $\psi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_{N-1}; N)$. Většinou budeme předpokládat, že má aditivní tvar

$$\psi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_{N-1}; N) = \sum_{k=0}^{N-1} G_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) . \tag{1}$$

Úlohou je optimalizovat (tj. buď maximalizovat neb minimalizovat) výsledkovou funkci. Řešení optimalizační úlohy je představováno optimálním řízením $\{u_0, \ldots \ldots, u_{N-1}\}$ a odpovídající trajektorií $\{x_0, \ldots, x_N\}$. Když F a G nezávisejí na evolučním parametru, hovoříme o *homogenním* (autonomním) *procesu*.

2. Bellmanův princip optimality

Předpokládejme, že U je omezená a uzavřená množina a že zobrazení $F_n(x, u)$, $G_n(x, u)$ jsou spojitá. Za těchto podmínek, jak lze ukázat, existuje optimální řízení a Bellmanův princip o něm říká:

Optimální řízení má tuto vlastnost: Vzhledem ke stavu, který je důsledkem prvého rozhodnutí, představují zbývající rozhodnutí optimální řízení.

Princip je intuitivně velmi zřejmý a nevyžaduje formálního důkazu v této jednoduché situaci. Optimální hodnotu výsledkové funkce v posledních $N - m$ stupních označme

$$\hat{\psi}(x; m, N) = \operatorname*{opt}_{\{x_m = x, u_m, \ldots, u_{N-1}\}} \sum_{k=m}^{N-1} G_k(x_k, u_k) .$$

Symbol opt značí podle zadání úlohy buď maximum nebo minimum. Hodnota výsledkové funkce pro $x_0 = x$ při řízení, majícím u jako první rozhodnutí a používajícím v dalších stupních optimální rozhodnutí vzhledem ke stavu $F_0(x, u)$, je rovna

$$G_0(x, u) + \hat{\psi}(F_0(x, u); 1, N) .$$

Podle principu optimality mezi taková řízení patří optimální řízení. Musí tedy být

$$\hat{\psi}(x; 0, N) = \operatorname*{opt}_{u \in U} \{G_0(x, u) + \hat{\psi}(F_0(x, u); 1, N)\} .$$

Použijeme-li stejné úvahy pro m-tý stupeň, dostáváme

$$\hat{\psi}(x; m, N) = \operatorname*{opt}_{u \in U} \{G_0(x, u) + \hat{\psi}(F_m(x, u); m + 1, N)\} , \tag{2}$$
$$m = N - 1, N - 2, \ldots, 0 , \quad \hat{\psi}(x; N, N) \equiv 0 .$$

(2) je rekurentní relace pro $\hat{\psi}(x; m, N)$. Učiňme o ní několik poznámek. Předpokládejme, že je dána počáteční poloha x_0 a máme určit optimální řízení $\{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots \ldots, \hat{u}_{N-1}\}$ a odpovídající trajektorii $\{\hat{x}_0 = x_0, \ldots, \hat{x}_N\}$. Řešíme tedy (2) pro $m = N - 1, \ldots, 1$. Potom nalezeneme $\hat{u}_0$, které optimalizuje výraz ve svorkách pro $m = 0$. Dále určíme $\hat{x}_1 = F_0(x_0, \hat{u}_0)$ a stanovíme $\hat{u}_1$, které optimalizuje výraz ve svorkách pro $m = 1$. Dále je $\hat{x}_2 = F_1(\hat{x}_1, \hat{u}_1)$ atd. Přitom k výpočtu $2N - 1$ vektorů musíme znát tabulku $N - 1$ funkcí $\hat{\psi}(x; m, N)$, $m = 1, \ldots, N - 1$. Rozsah výpočtů je proto většinou velmi značný. Při řešení (2) získáváme však zpravidla také posloupnost funkcí $\{\hat{u}_m(x),\ m = 0, \ldots, N - 1\}$, udávajících hodnotu parametru řízení, optimalizující výraz ve svorkách v (2), v závislosti na x.

Tím jsme dospěli k poněkud jinému pojetí řízení vícestupňového procesu. *Strategií* budeme rozuměti posloupnost $\{\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x})\}$ zobrazení stavového prostoru R^r do prostoru rozhodnutí U. $\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x})$ udává hodnotu parametru řízení, kterou volíme, je-li soustava v m-tém stupni vývoje ve stavu $\boldsymbol{x}$. Trajektorie odpovídající strategii $\{\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x})\}$ je tedy dána vztahy

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{F}_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{u}_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1}))\,, \quad n = 1, \ldots, N\,.$$

Není obtížné ověřit, že výše uvedená strategie $\{\hat{\boldsymbol{u}}_0(\boldsymbol{x}), \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}(\boldsymbol{x})\}$ je optimální. (Viz též odstavec 3, III o řízení se zpětnou vazbou.)

Příklad 2 (R. Bellman, S. Dreyfus). Spolehlivost určité soustavy (např. části samočinného počítače), skládající se z N agregátů $A_1, A_2, \ldots, A_N$ budiž hodnocena pravděpodobností, že soustava bude bezvadně pracovat. Přitom se předpokládá, že tato pravděpodobnost je $P = P_1 P_2 \ldots P_N$, kde P_i je pravděpodobnost bezvadné činnosti A_i. Agregát A_i nechť obsahuje k_i prvků stejného druhu. K činnosti agregátu je třeba neselhání aspoň jednoho z jeho prvků. Je-li p_i pravděpodobnost selhání prvku v A_i, potom platí za předpokladu nezávislosti $P_i = 1 - p_i^{k_i}$. Budiž c_i cena prvku v A_i. Úkolem je maximalizovat spolehlivost soustavy za podmínky, že celková hodnota použitých prvků nepřekročí c.

Při řešení budeme značit x_i prostředky, které máme k dispozici po sestrojení $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{i-1}$. Platí tedy

$$x_1 = c\,, \quad x_i = x_{i-1} - k_{i-1}c_{i-1}\,, \quad i = 2, \ldots, N\,.$$

Výsledková funkce je $(1 - p_1^{k_1})(1 - p_2^{k_2}) \ldots (1 - p_N^{k_N})$. Případ funkce v multiplikativním tvaru se zřejmě nijak neliší od aditivního případu, k němuž lze přejít logaritmováním. Maximální spolehlivost podsoustavy, tvořené agregáty $A_m, \ldots, A_N$, kterou lze docíliti prostředky x, budiž

$$\hat{\psi}(x; m, N) =$$
$$= \max \{(1 - p_m^{k_m})(1 - p_{m+1}^{k_{m+1}}) \ldots (1 - p_N^{k_N}) : k_m c_m + k_{m+1} c_{m+1} + \ldots + k_N c_N \leqq x\}\,.$$

Dle (2) máme

$$\hat{\psi}(x; m, N) = \max_{k=0,1,\ldots} (1 - p_m^k)\, \hat{\psi}(x - kc_m; m + 1, N)\,,$$
$$m = N - 1, N - 2, \ldots, 1\,.$$

Zřejmě

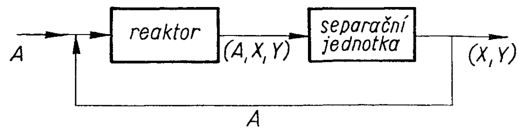
$$\hat{\psi}(x; N, N) = 1 - p_N^{[x/c_N]}\,.$$

Příklad 3 (S. M. Roberts) — optimální výměna katalyzátoru. Na obr. 1 je znázorněno schéma endotermické katalytické reakce. Látka A v plynné fázi prochází reaktorem průtokovou rychlostí q. Část c látky A se promění v produkty X a Y, které jsou odděleny v separační jednotce. Zbytek A se vrací zpět do reaktoru. Množství A dodávané za jednotku času je tedy qc. Předpokládá se, že c je lineární funkcí operační teploty T, průtokové rychlosti q a celkového množství s látky A, které prošlo reaktorem od poslední výměny katalyzátoru. Tj.

$$c = c_0 + c_1 T - c_2 q - c_3 s . \tag{3}$$

Jednotkou času budiž např. jeden den. Za stav soustavy považujme hodnotu s_n parametru s na konci n-tého dne. Procesu je třeba dodat (za den) množství tepla

$$Q = qc_p(T - T_0) + (\Delta H)\, qc , \tag{4}$$



Obr. 1.

kde T_0 je teplota A na vstupu, c_p specifické teplo reagujících látek, ΔH teplo spotřebované při reakci. Denní výnos se předpokládá ve tvaru

$$G = v_1 qc - v_2 Q - v_3(1 - c)\, q - v_4 . \tag{5}$$

První člen napravo představuje výnos daný rozdílem hodnoty produktů (X, Y) a látky A. Další členy jsou náklad na dodávání tepla, náklad na separaci a vracení nespotřebovaného A a pevné náklady. Vztahy (3), (4), (5) udávají denní výnos jakožto funkci $G(s, T, q)$ stavu s, teploty T a průtokové rychlosti q. Posléze R nechť značí náklad na výměnu katalyzátoru, která trvá jeden den. Jedná se o vícestupňový proces homogenní v čase. Úlohou je volit denní operační hodnoty T_n, q_n a rozhodovat o výměně katalyzátoru tak, aby celkový výnos za N dní byl maximální. Označme tento optimální výnos $\hat{\psi}(s; N)$, je-li s výchozím stavem soustavy. Potom, dle (2),

$$\hat{\psi}(s; N) = \max_{T,q} \{\max [-R + \hat{\psi}(0; N - 1), G(s, T, q) + \hat{\psi}(s + q; N - 1)]\} .$$

3. Úlohy s nekonečným plánovacím horizontem

Číslo N v (1) udávající počet stupňů (dobu trvání procesu), které bereme při optimalizaci v úvahu, se nazývá *plánovacím horizontem*. V řadě úloh je účelné uvažovati nekonečný horizont. Budeme vyšetřovati homogenní procesy. Při definici výsledkové funkce

$$\psi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} G(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{6}$$

vzniká problém konvergence nekonečné řady na pravé straně rovnosti (6). Je proto někdy vhodné užívati výsledkovou funkci tvaru

$$\phi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k G(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)\,. \tag{7}$$

V takovém případě hovoříme o *diskontovaném* nákladu (či výnosu). Můžeme totiž β interpretovati jako diskontní faktor, sloužící k přepočtu platby v budoucnosti na hodnotu na konci prvého období při dané úrokové míře.

Pro určitost budiž opt = min. Omezíme se zde na dva případy:

(i) $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geqq 0$, výsledková funkce definována dle (6) a

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \min_{\{u_0, u_1, \ldots\}} \psi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots) < \infty$$

pro všechna $\boldsymbol{x}$.

(ii) $|G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})| \leqq K < \infty$, výsledková funkce definována dle (7) a $0 < \beta < 1$. Klademe

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x}) = \min_{\{u_0, u_1, \ldots\}} \phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots)\,.$$

Aplikace Bellmanova principu vede k rovnicím

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{u} \in U} \{G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \hat{\psi}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}))\}\,, \tag{8}$$

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{u} \in U} \{G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \beta\, \hat{\phi}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}))\}\,. \tag{9}$$

Jednoznačnost omezeného řešení rovnice (9) lze ověřit celkem bez obtíží. Řešení (8) není jednoznačné. Je proto třeba doplnit rovnici (8) dalšími podmínkami. $\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$ představuje nejmenší nezáporné řešení.

Budiž $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ hodnota parametru $\boldsymbol{u}$, při které výraz ve svorkách v (8) resp. (9) nabývá minimální hodnoty. Snadno se postupným dosazováním dokáže, že $\{\hat{\boldsymbol{u}}_n(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}),\ n = 0, 1, \ldots\}$ je optimální strategie. Strategii $\{\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}),\ n = 0, 1, \ldots\}$, pro kterou platí $\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $n = 0, 1, \ldots$, budeme ztotožňovati s funkcí $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.

Za předpokladů (i) můžeme při nacházení $\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$ klást $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; 0) \equiv 0$ postupně

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; N) = \min_{\boldsymbol{u} \in U} \{G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \hat{\psi}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}); N - 1)\}\,, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Porovnáním s (2) vyplývá, že je

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; N) = \min_{\{x_0 = x, u_0, \ldots, u_{N-1}\}} \sum_{k=0}^{N-1} G(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)\,.$$

Je tedy vzhledem k nezápornosti $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; N) \leqq \hat{\psi}(\boldsymbol{x}; N + 1) \leqq \hat{\psi}(\boldsymbol{x})\,.$$

Je-li $\lim_{N\to\infty} \hat{\psi}(x; N)$ spojitá, pak dává řešení (8), a je proto $\hat{\psi}(x) = \lim_{N\to\infty} \hat{\psi}(x; N)$. Tento způsob je příkladem *aproximace v prostoru výsledkových funkcí.*

Aproximaci v prostoru strategií osvětlíme za podmínek (ii). Při této aproximaci se nejprve volí libovolná strategie ${}^0\boldsymbol{u}(x)$. Potom se nalezne výsledková funkce $\phi_0(x)$, jí odpovídající, z rovnice

$$\phi_0(x) = G(x, {}^0\boldsymbol{u}(x)) + \beta\, \phi_0(\boldsymbol{F}(x, {}^0\boldsymbol{u}(x)))\,.$$

${}^1\boldsymbol{u}(x)$ se určí tak, aby platilo

$$G(x, {}^1\boldsymbol{u}(x)) + \beta\, \phi_0(\boldsymbol{F}(x, {}^1\boldsymbol{u}(x))) = \min_{\boldsymbol{u}\in U} \{G(x, \boldsymbol{u}) + \beta\, \phi_0(\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{u}))\}\,.$$

Obecně

$$\phi_n(x) = G(x, {}^n\boldsymbol{u}(x)) + \beta\, \phi_n(\boldsymbol{F}(x, {}^n\boldsymbol{u}(x)))\,,$$

$$G(x, {}^{n+1}\boldsymbol{u}(x)) + \beta\, \phi_n(\boldsymbol{F}(x, {}^{n+1}\boldsymbol{u}(x))) = \min_{\boldsymbol{u}\in U} \{G(x, \boldsymbol{u}) + \beta\, \phi_n(\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{u}))\}\,,$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

Platí

$$\phi_n(x) \geqq \phi_{n+1}(x)\,, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \hat{\phi}(x)\,.$$

Příklad 4. Mějme r míst, označených čísly $1, 2, \ldots, r$ a kladná čísla g_{ij}, $i \neq j$, $i = 1, \ldots, r - 1$, $j = 1, \ldots, r$. Čísla g_{ij} představují náklad na pohyb z místa i do místa j. Naším cílem je dosažení místa r s nejmenším nákladem, vycházíme-li z libovolného místa $1, \ldots, r - 1$. Strategií rozumíme funkci $u(i)$, udávající místo, do něhož postupujeme z místa i. Minimální náklad na dosažení r z místa i, označený $\hat{\psi}(i)$, splňuje

$$\hat{\psi}(i) = \min_{j\neq i} \{g_{ij} + \hat{\psi}(j)\}\,, \quad i = 1, \ldots, r - 1\,, \quad \hat{\psi}(r) = 0\,.$$

Veličiny g_{ij} buďtež dány tabulkou 1, kde $r = 7$ a — značí číslo tak velké, že odpovídající přechod je možno z úvah vypustiti. Tabulky 2, 3 obsahují postupné aproximace v prostoru výsledkových funkcí a v prostoru strategií ($\hat{\psi}(j) = \hat{\psi}(j; 5) = \psi_2(j)$).

Tabulka 1.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	—	4	—	9	—	—	—
2	—	—	4	6	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	12
4	—	—	—	—	4	—	16
5	—	—	—	—	—	2	8
6	—	—	—	—	—	—	2

Tabulka 2.

j	1	2	3	4	5	6	7
$\psi(j; 0)$	0	0	0	0	0	0	0
$\psi(j; 1)$	4	4	12	4	2	2	0
$\psi(j; 2)$	8	10	12	6	4	2	0
$\psi(j; 3)$	14	12	12	8	4	2	0
$\psi(j; 4)$	16	14	12	8	4	2	0
$\psi(j; 5)$	17	14	12	8	4	2	0

Tabulka 3.

j	1	2	3	4	5	6	7
${}^0u(j)$	7	7	7	7	7	7	7
${}^1u(j)$	4	3	7	5	6	7	7
${}^2u(j)$	4	4	7	5	6	7	7

j	1	2	3	4	5	6	7
$\psi_0(j)$	—	—	12	16	8	2	0
$\psi_1(j)$	17	16	12	8	4	2	0
$\psi_2(j)$	17	14	12	8	4	2	0

4. Kombinace metody dynamického programování s metodou Lagrangeových násobitelů

Vraťme se k formulaci úlohy v odstavci 1. Předpokládejme, že máme navíc dánu posloupnost funkcí $H_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $k = 0, \ldots, N-1$, a číslo Δ. Hledáme minimum výsledkové funkce (1) za podmínky

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) = \Delta \,. \tag{10}$$

Při řešení metodou dynamického programování označíme

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, y; m, N) = \min \left\{ \sum_{k=m}^{N-1} G_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) : \sum_{k=m}^{N-1} H_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) = y \right\} .$$

Potom dle Bellmanova principu

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, y; m, N) = \min_{\boldsymbol{u} \in U} \{ G_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \hat{\phi}(F_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), y - H_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}); m+1, N) \} ,$$

což je při $m = N-1, N-2, \ldots, 0$ rekurentní relace k nalezení minima $\hat{\phi}(\boldsymbol{x}_0, \Delta; 0, N)$. Počet nezávisle proměnných u funkcí $\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, y; m, N)$, které je třeba při výpočtu tabelovati je $r + 1$. Tomuto růstu počtu proměnných a s tím i rozsahu výpočtů se lze vyhnout zavedením *neurčitého násobitele* a hledáním (nepodmíněného) minima výrazu

$$\Xi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}; N) = \sum_{k=0}^{N-1} (G(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda H_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)) .$$

Platí-li pro $\lambda = \hat{\lambda}$

$$\Xi(\boldsymbol{x}_0; \hat{\boldsymbol{u}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}; N) = \min_{\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}\}} \Xi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}; N)$$

a současně

$$\sum_{k=1}^{N-1} H_k(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \hat{\boldsymbol{u}}_k) = \Delta ,$$

kde $\{\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{x}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_N\}$ je trajektorie, odpovídající řízení $\{\hat{\boldsymbol{u}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}\}$, potom $\{\hat{\boldsymbol{u}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}\}$, $\{\hat{\boldsymbol{x}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_N\}$ je řešení výše formulované úlohy. Kdykoliv totiž při řízení $\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}\}$ platí (10), pak

$$\sum_{k=0}^{N-1} G_k(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \hat{\boldsymbol{u}}_k) + \hat{\lambda}\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} (G_k(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \hat{\boldsymbol{u}}_k) + \hat{\lambda}\, H_k(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \hat{\boldsymbol{u}}_k)) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{N-1} (G_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \hat{\lambda}\, H_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)) = \sum_{k=0}^{N-1} G_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \hat{\lambda}\Delta .$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{N-1} G(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \hat{\boldsymbol{u}}_k) \leqq \sum_{k=0}^{N-1} G_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) . \tag{11}$$

Poznamenejme, že Lagrangeův násobitel zde vystupuje v postačující podmínce pro extrém. Je-li $\hat{\lambda} \geqq 0$, pak (11) platí pro všechna řízení splňující

$$\sum_{k=0}^{N-1} H(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \leqq \Delta .$$

Příklad 5. V úloze příkladu 2 uvažujme další podmínku, že celková váha použitých prvků nepřekročí hodnotu v, je-li v_i váha jednotlivého prvku v agregátu A_i. Metoda Lagrangeova násobitele vede k veličině

$$\hat{\Xi}(x; m, N) = \max \{(1 - p_m^{k_m}) \ldots (1 - p_N^{k_N})\, e^{-\lambda \sum_{i=m}^{N} k_i v_i} : k_m c_m + \ldots + k_N c_N \leqq x\} ,$$

splňující

$$\hat{\Xi}(x; m, N) = \max_{k=0,1,\ldots} (1 - p_m^k)\, e^{-\lambda k v_m}\, \hat{\Xi}(x - k c_m; m + 1, N) ,$$

$$m = N - 1, \ldots, 1 .$$

Postupuje se tak, že po nalezení rozsahu agregátů $\{\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_N\}$, při kterém platí

$$\hat{\Xi}(c; 1, N) = (1 - p_1^{\hat{k}_1}) \ldots (1 - p_N^{\hat{k}_N})\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{N} \hat{k}_i v_i} ,$$

porovnáme celkovou váhu $\sum_{i=1}^{N} \hat{k}_i v_i$ s v. Je-li $\sum_{i=1}^{N} \hat{k}_i v_i > v$, λ zvětšíme. Je-li $\sum_{i=1}^{N} \hat{k}_i v_i < v$ a není-li shoda s v vyhovující s ohledem na celočíselné hodnoty parametru řízení, λ zmenšíme. Postupným přibližováním hledáme tak řešení úlohy.

5. Hamiltonova-Jacobiova rovnice

Spojitým rozhodovacím procesům je věnována kapitola III. Zde si pouze všimneme limitního přechodu v rovnici (2) a to bez nároků na matematickou přesnost. Zaveďme dobu trvání Δt jednotlivého stupně ($\Delta t \to 0$), $N\, \Delta t = T$. Abychom obdrželi v limitě spojitý proces, musí být změny stavu úměrné Δt. Předpokládáme proto

$$F_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(n\,\Delta t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,\Delta t$$

a obdobně

$$G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = g(n\,\Delta t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,\Delta t\,.$$

Z (2) vyplývá

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x};\, m\,\Delta t, T) = \operatorname*{opt}_{\boldsymbol{u}\in U}\{g(m\,\Delta t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,\Delta t + \hat{\psi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(m\,\Delta t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,\Delta t;\, \overline{m+1}\,\Delta t, T)\}\,,$$

neboli

$$(12)\qquad \operatorname*{opt}_{\boldsymbol{u}\in U}\{g(m\,\Delta t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,\Delta t + \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}\,\Delta t + \bar{\nabla}\hat{\psi}\,.\,\boldsymbol{f}(m\,\Delta t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,\Delta t + o(\Delta t)\} = 0\,.$$

$\bar{\nabla}$ značí gradient vzhledem ke stavovým proměnným. Gradient vzhledem k rozhodovacím proměnným je označován ∇. Tečka značí skalární součin. Pro $\Delta t \to 0$, $m\,\Delta t \to$ $\to t$, dostáváme z (12)

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x};\, t, T) + \operatorname*{opt}_{\boldsymbol{u}\in U}\{g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \bar{\nabla}\hat{\psi}(\boldsymbol{x};\, t, T)\,.\,\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\} = 0\,,$$

$$(14)\qquad \hat{\psi}(\boldsymbol{x};\, T, T) = 0\,.$$

Ve spojitém případě je řízení představováno funkcí $\{\boldsymbol{u}(t), 0 \leqq t \leqq T\}$. Typickou třídou přípustných řízení je množina po částech spojitých funkcí. V limitě dostáváme soustavu diferenciálních rovnic pro trajektorii procesu $\{\boldsymbol{x}(t), 0 \leqq t \leqq T\}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t))\,.$$

Výsledková funkce je $\int_0^T g(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t$. Přípustnou strategií se potom rozumí funkce $\{\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}), 0 \leqq t \leqq T, \boldsymbol{x} \in R^r\}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x}_0 \in R^r$ existuje řešení počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))\,, \quad t \in [0, T]\,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\,,$$

a $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}(t))$ je přípustným řízením. Předpokládá se, že $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ jsou spojité a mají spojité derivace vzhledem k x^i, $i = 1, \ldots, r$.

(13) se nazývá též *Hamiltonovou-Jacobiovou rovnicí* úlohy. Předpoklad diferencovatelnosti $\hat{\psi}(\boldsymbol{x};\, t, T)$ není v řadě důležitých případů splněn, což omezuje platnost této rovnice. Její řešitelnost však dává postačující podmínku pro optimum.

Věta 1. *Nechť* $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; t, T)$ *je řešení* (13), (14), *jehož derivace jsou spojité na* $R^r \times \times [0, T]$. *Nechť existuje přípustná strategie* $\hat{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{x})$ *tak, že platí*

$$g(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{x})) + \nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; t, T) \,.\, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{x})) =$$

$$= \operatorname*{opt}_{\boldsymbol{u} \in U} \{g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; t, T) \,.\, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\} \,.$$

Potom

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}; t, T) = \operatorname{opt} \left\{ \int_t^T g(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s)) \, \mathrm{d}s : \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x} \right\},$$

a $\hat{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{x})$ *je optimální strategie.*

Důkaz. Budiž pro určitost opt = max. Volme $t, \boldsymbol{x}$. Mějme libovolné řízení $\{\boldsymbol{u}(s), t \leqq s \leqq T\}$ a budiž $\{\boldsymbol{x}(s), t \leqq s \leqq T\}$, $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}$, odpovídající mu trajektorie. Z (13) vyplývá

$$\frac{\partial}{\partial s} \hat{\psi}(\boldsymbol{x}(s); s, T) + g(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s)) + \nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(s); s, T) \,.\, \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s)) \leqq 0 \,,$$

neboli

$$\frac{\partial}{\partial s} \hat{\psi} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} + g \leqq 0 \,.$$

Integrací vzhledem k $s \in [t, T]$ dostáváme

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(T); T, T) - \hat{\psi}(\boldsymbol{x}; t, T) + \int_t^T g(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s)) \, \mathrm{d}s \leqq 0 \,,$$

což je s ohledem na (14)

$$\int_t^T g(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s)) \, \mathrm{d}s \leqq \hat{\psi}(\boldsymbol{x}; t, T) \,.$$

Rovnost nastává při $\boldsymbol{u}(s) = \hat{\boldsymbol{u}}(s, \boldsymbol{x}(s))$.

Příklad 6. Budiž

$$\hat{\psi}(x; t, T) = \min_{\{u(s), t \leqq s \leqq T\}} \frac{1}{2} \int_t^T [q \, x(s)^2 + r \, u(s)^2] \, \mathrm{d}s \,,$$

kde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x(s) = a \, x(s) - b \, u(s) \,, \quad x(t) = x \,; \quad q \geqq 0 \,, \quad a, b, r > 0 \,.$$

(13) má tvar

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} + \min_u \left\{\tfrac{1}{2}(qx^2 + ru^2) + (ax - bu)\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} + \min_u \left\{\frac{r}{2}\left(u - \frac{b}{r}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(qx^2 - \frac{b^2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\right)^2\right) + ax\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} + \frac{1}{2}\left(qx^2 - \frac{b^2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\right)^2\right) + ax\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\,.$$

Není obtížné nahlédnouti, že $\hat{\psi}(x; t, T) = \frac{1}{2}x^2\, k(t)$ vyhovuje rovnici, je-li

$$\text{(15)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k = -q + \frac{b^2}{r}k^2 - 2ak\,, \quad k(T) = 0\,.$$

Řešením (15) je

$$k(t) = (A + B)\left(1 - \mathrm{e}^{2B(t-T)}\right)\left[1 + \frac{B + A}{B - A}\mathrm{e}^{2B(t-T)}\right]^{-1},$$

kde

$$A = arb^{-2}\,, \quad B = b^{-2}\sqrt{(a^2r^2 + b^2qr)}\,.$$

Optimální strategie je

$$\hat{u}(t, x) = \frac{b}{r}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}(x; t, T) = x\,k(t)\,b/r\,.$$

(Viz též příklad 2, III.)

II. DISKRÉTNÍ PRINCIP OPTIMALITY

1. Použití Lagrangeových násobitelů při vícestupňové optimalizaci

Proveďme nejprve jednoduchou úpravu původní formulace úlohy. Rozšiřme stavový vektor o novou souřadnici

$$x_n^0 = \sum_{k=0}^{n-1} G_k(x_k, u_k)\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x_0^0 = 0\,.$$

Budeme psát $\mathbf{x} = (x^0, x)$. Naším úkolem je optimalizovat x_N^0 při transformaci stavového vektoru $\mathbf{F}_n(\mathbf{x}, u) = (F_n^0(\mathbf{x}, u), \ldots, F_n^r(\mathbf{x}, u))$, kde

$$F_n^0(\mathbf{x}, u) = x^0 + G_n(x, u)\,, \quad F_n^j(\mathbf{x}, u) = F_n^j(x, u), \quad j = 1, \ldots, r\,.$$

Přitom hodnota $\mathbf{x}_0$ je dána. Vztahy

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{F}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}), \quad n = 1, \ldots, N,$$

představují podmínky optimalizační úlohy.

Předpokládejme, že zobrazení $\mathbf{F}_n$ mají spojité derivace pro všechna $\mathbf{x}$ a pro $\mathbf{u}$ z nějaké otevřené množiny obsahující U a použijme metody Lagrangeových násobitelů. Položme $\boldsymbol{\lambda}_n = (\lambda_n^0, \ldots, \lambda_n^r)$, $n = 1, \ldots, N$, a utvořme Lagrangeovu funkci

$$L = x_n^0 - \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\lambda}_n \,.\, (\mathbf{x}_n - \mathbf{F}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}))\,.$$

Nastává-li vázaný extrém ve vnitřním bodě množiny U, musí být Lagrangeova funkce stacionární. Podmínky stacionarity vzhledem ke stavovým proměnným jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x_N^0} = 1 - \lambda_N^0 = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial x_N^j} = -\lambda_N^j = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n^j} = -\lambda_n^j + \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \,.\, \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial x^j}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)\,,$$

$$j = 0, \ldots, r\,, \quad n = 1, \ldots, N - 1\,.$$

Zavedeme-li Jacobiovy matice

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left\| \frac{\partial F_n^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x^j} \right\|_{i,j=0}^{r},$$

můžeme psát

(1) $$\boldsymbol{\lambda}_N = (1, 0, \ldots, 0)\,, \quad \boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \mathbf{J}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)\,, \quad n = N - 1, \ldots, 1\,.$$

To je rekurentní vztah pro výpočet Lagrangeových násobitelů. Dáme násobitelům ještě jinou interpretaci. Ukážeme, že je $\lambda_n^j = \partial x_N^0 / \partial x_n^j$.

Uvažujme přírůstek n-tého stavového vektoru

$$^*\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n + \varepsilon\, \delta \mathbf{x}_n + o(\varepsilon)\,, \quad \varepsilon \to 0\,, \quad \varepsilon > 0\,,$$

při pevných hodnotách rozhodovacích proměnných $\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}$. Lineární část přírůstku, $\delta \mathbf{x}_n$, se nazývá *variací*. Přírůstek způsobí změnu $\mathbf{x}_{n+1}$ na

$$^*\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} + \varepsilon\, \delta \mathbf{x}_{n+1} + o(\varepsilon)\,,$$

kde je

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \delta \mathbf{x}_n \mathbf{J}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)'\,.$$

Čárka označuje transponovanou matici (případně v dalším sloupcový vektor).

Obdobně se transformuje variace $\delta \mathbf{x}_{n+1}$ ve variaci $\delta \mathbf{x}_{n+2}$ atd. Dle (1) je

$$\boldsymbol{\lambda}_n \,.\, \delta \mathbf{x}_n = \boldsymbol{\lambda}_{n+1}\, J_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)\, \delta \mathbf{x}_n' = \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \,.\, \delta \mathbf{x}_{n+1} = \ldots = \boldsymbol{\lambda}_N \,.\, \delta \mathbf{x}_N = \delta x_N^0 \,.$$

Vidíme, že $\boldsymbol{\lambda}_n$ je gradientem výsledkové funkce vzhledem k $\mathbf{x}_n$.

Abychom stanovili gradient vzhledem k rozhodovacím proměnným, uvažujme přírůstek

$$^*\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n + \varepsilon\, \delta \mathbf{u}_n + o(\varepsilon)$$

při pevných $\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}$. Odpovídající přírůstek $\mathbf{x}_{n+1}$ je

$$^*\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) + \varepsilon \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial u^j} \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)\, \delta u_n^j + o(\varepsilon)\,.$$

Variace výsledkové funkce je tedy rovna

$$\delta x_N^0 = \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \,.\, \delta \mathbf{x}_{n+1} = \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \,.\, \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial u^j}\, \delta u_n^j\,.$$

Utvořme

$$\mathscr{H}_n(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \,.\, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u})\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\,.$$

$\mathscr{H}_n(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \mathbf{x}_n, \mathbf{u})$ se nazývá *hamiltoniánem* a má tu vlastnost, že jeho gradient vzhledem k rozhodovacím proměnným je totožný s gradientem výsledkové funkce.

Budiž $\{\hat{\mathbf{u}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_{N-1}\}$ strategie, maximalizující výsledek, a nechť o $\delta \hat{\mathbf{u}}_n$ platí při $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$,

$$\hat{\mathbf{u}}_n + \varepsilon\, \delta \hat{\mathbf{u}}_n + o(\varepsilon) \in U\,. \tag{2}$$

Variaci, splňující (2), budeme nazývati přípustnou. Musí být $\delta \hat{x}_N^0 \leqq 0$, tj.

$$\nabla \mathscr{H}_n(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n) \,.\, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \leqq 0\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\,.$$

Je-li $\hat{\mathbf{u}}_n$ vnitřním bodem U, takže všechny variace jsou přípustné, platí

$$\nabla \mathscr{H}_n(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n) = \mathit{0}\,.$$

(To je ve skutečnosti podmínka stacionarity Lagrangeovy funkce.)

Obě podmínky jsou *lokální*, neboť berou v úvahu pouze chování hamiltoniánu v okolí optimálního řízení. *Globální* podmínku představuje diskrétní princip optimality.

2. Diskrétní princip optimality

Tento princip byl formulován na základě analogie s Pontrjaginovým principem. Říká, že „*optimální řízení optimalizuje hamiltonián*“. Přesněji vyjádřeno:

Je-li $\{\hat{u}_0, \ldots, \hat{u}_{N-1}\}$ optimální řízení a $\{x_0 = \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_N\}$ odpovídající trajektorie, potom

$$\mathscr{H}_n(\hat{\lambda}_{n+1}, \hat{x}_n, \hat{u}) = \operatorname*{opt}_{u \in U} \mathscr{H}_n(\hat{\lambda}_{n+1}, \hat{x}_n, u), \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Dokážeme (3) bez předpokladu derivovatelnosti $F_n(x, u)$ vzhledem k u. Budeme však předpokládat, že pro všechna x, $n = 0, \ldots, N - 1$, je množina hodnot funkce F_n, $\{F_n(x, u) : u \in U\}$, konvexní.

Budeme se zabývat úlohou poněkud obecnější než byla úloha předcházejícího odstavce: Nalézt řízení, optimalizující $g_0(x_N)$ za podmínky, že x_0 leží v počáteční množině $I = \{x : h_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, l\}$ a že x_N leží v koncové množině $F = \{x : g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\}$. Přitom $h_i(x)$, $g_i(x)$ se předpokládají spojitě diferencovatelné v R^{r+1}, vektory $\nabla h_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$, lineárně nezávislé pro $x \in I$, vektory $\nabla g_i(x)$, $i = 0, \ldots, m$, lineárně nezávislé pro $x \in F$. Omezíme se na případ $l + m \leqq r + 1$.

Předpokládejme, že $\{\hat{u}_0, \ldots, \hat{u}_{N-1}\}$, $\{\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_N\}$ představuje řešení formulované úlohy a budiž $\{u_0, \ldots, u_{N-1}\}$ libovolné řízení. Uvažujme následující optimalizační úlohu: Nalézt $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$, $0 \leqq a_n \leqq 1$, tak, aby $g_0(y_N)$ bylo optimálním (pro určitost maximálním), je-li

$$\begin{aligned} y_n = \Phi_{n-1}(y_{n-1}, a_{n-1}) &= a_{n-1} F_{n-1}(y_{n-1}, u_{n-1}) + \\ &+ (1 - a_{n-1}) F_{n-1}(y_{n-1}, \hat{u}_{n-1}), \quad n = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} h_i(y_0) &= 0, \quad i = 1, \ldots, l, \\ g_i(y_N) &= 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5}$$

Zřejmě za podmínek (4), (5), je $\max g_0(y_N) \geqq g_0(\hat{x}_N)$, neboť $g_0(\hat{x}_N)$ je výsledkem při řízení $\{a_n = 0, n = 0, \ldots, N - 1\}$ a počáteční poloze $y_0 = \hat{x}_0$. Dále, dle předpokladu o konvexnosti množiny hodnot zobrazení F_n, lze k libovolnému řízení $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ nalézt řízení $\{\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{N-1}\}$ tak, že platí

$$y_{n+1} = F_n(y_n, \bar{u}_n), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Každé $\{y_0, \ldots, y_{N-1}\}$ splňující (4) je tedy také trajektorií původní úlohy. Odtud $\max g_0(y_N) \leqq g_0(\hat{x}_N)$. Vidíme, že $\{a_n = 0, n = 0, \ldots, N - 1; \hat{y}_0 = \hat{x}_0\}$ je optimální řízení.

V úloze je celkem $(N + 1)(r + 1) + N$ proměnných $y_0^0, \ldots, y_0^r, \ldots, y_N^0, \ldots, y_N^r$, $a_0, \ldots, a_{N-1}$. Tyto proměnné jsou vázány $N(r + 1) + l + m$ podmínkami (4), (5). Používajíce věty o implicitních funkcích, budeme se snažit vyjádřit z těchto podmínek proměnné $y_1^0, \ldots, y_1^r, \ldots, y_N^0, \ldots, y_N^r$ a $l + m$ z proměnných $y_0^0, \ldots, y_0^r$ jako funkce $a_0, \ldots, a_{N-1}$ a zbývajících $r + 1 - l - m$ z proměnných $y_0^0, \ldots, y_0^r$ v okolí optimálního řešení. Všimněme si proto Jacobiovy matice $\hat{J}$ funkcí $h_1, \ldots, h_l$, $y_1^0 - \Phi_0^0$, $y_1^1 - \Phi_0^1, \ldots, y_N^r - \Phi_{N-1}^r$, $g_1, \ldots, g_m$ vzhledem k proměnným $y_0^0, \ldots, y_N^r$ v bodě

$\boldsymbol{y}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}_0, \ldots, \boldsymbol{y}_N = \hat{\boldsymbol{x}}_N$, $a_0 = 0, \ldots, a_{N-1} = 0$. Není obtížné nahlédnout, že $\hat{\boldsymbol{J}}$ má následující vyjádření:

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \nabla h_1, & & & & & \\ \vdots & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0}, & \ldots & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0} \\ \nabla h_l, & & & & & \\ -\boldsymbol{J}_0(\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{u}}_0), & \boldsymbol{E}, & \boldsymbol{0}, & \ldots & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}, & -\boldsymbol{J}_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_1), & \boldsymbol{E}, & \ldots & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0}, & \ldots & -\boldsymbol{J}_{N-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1}, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}), & \boldsymbol{E} \\ & & & & & \nabla g_1 \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0}, & \ldots & \boldsymbol{0}, & \vdots \\ & & & & & \nabla g_m \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{E}$ značí jednotkové matice $(r + 1)$-vého stupně. Řádky matice $\hat{\boldsymbol{J}}$ jsou lineárně nezávislé, platí-li

(6) $$\boldsymbol{0} = \lambda \hat{\boldsymbol{J}} \,, \quad \lambda = (\gamma_1, \ldots, \gamma_l, \gamma_0^0, \ldots, \gamma_0^r, \ldots, \gamma_N^0, \ldots, \gamma_N^r, \gamma_1', \ldots, \gamma_m') \,,$$

jen tehdy, je-li $\lambda = \boldsymbol{0}$. Snadno se nahlédne, že tato podmínka je ekvivalentní podmínce (P):

(P) Rovnost

(7) $$\gamma_1 \nabla h_1(\hat{\boldsymbol{x}}_0) + \ldots + \gamma_l \nabla h_l(\hat{\boldsymbol{x}}_l) = [\gamma_1' \nabla g_1(\hat{\boldsymbol{x}}_N) + \ldots$$
$$\ldots + \gamma_m' \nabla g_m(\hat{\boldsymbol{x}}_N)] \boldsymbol{J}_{N-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1}, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}) \ldots \boldsymbol{J}_0(\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{u}}_0)$$

nastává jen tehdy, je-li

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_l = \gamma_1' = \ldots = \gamma_m' = 0 \,.$$

Podmínka (P) nikterak nevymezuje platnost principu optimality. Je však splněna v řadě důležitých případů. Např. nejsou-li na koncový bod trajektorie kladena žádná omezení nebo nejsou-li kladena omezení na počáteční bod a je-li $|\boldsymbol{J}_0(\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{u}}_0)| \neq 0, \ldots, |\boldsymbol{J}_{N-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1}, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1})| \neq 0$.

Nechť platí podmínka (P). To znamená, že vektory

(8) $$\nabla h_1, \ldots, \nabla h_l, \nabla g_1 \boldsymbol{J}_{N-1} \ldots \boldsymbol{J}_0, \ldots, \nabla g_m \boldsymbol{J}_{N-1} \ldots \boldsymbol{J}_0 \,,$$

jsou lineárně nezávislé. Jak známo, existují pak indexy $0 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{l+m} \leqq r + 1$ tak, že $(l + m)$ rozměrné vektory, obsahující i_1-vou, i_2-hou, ..., i_{l+m}-tou složkou vektorů (8) jsou rovněž lineárně nezávislé. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $i_1 = 0, i_2 = 1, \ldots, i_{l+m} = l + m - 1$. Potom je

(9)
$$|\hat{\boldsymbol{J}}_*| = \left. \frac{\partial(h_1, \ldots, h_l, y_1^0 - \Phi_0^0, \ldots, y_N^r - \Phi_{N-1}^r, g_1, \ldots, g_m)}{\partial(y_0^0, \ldots, y_0^{l+m-1}, y_1^0, \ldots, y_1^r, \ldots, y_N^0, \ldots, y_N^r)} \right|_{\boldsymbol{y}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}_0, \ldots, \boldsymbol{y}_N = \hat{\boldsymbol{x}}_N, a_0 = 0, \ldots, a_{N-1} = 0} \neq 0 \,,$$

neboť matice $\hat{J}_*$, vzniklá z $\hat{J}$ vynecháním $(l + m + 1)$-vého až $(r + 1)$-vého sloupce má lineárně nezávislé řádky. Dle věty o implicitních funkcích existují funkce $Y_0^0(y_0^{l+m}, \ldots, y_0^r, a_0, \ldots, a_{N-1}), \ldots, Y_0^{l+m-1}(y_0^{l+m}, \ldots, a_{N-1}),\ Y_1^0(y_0^{l+m}, \ldots, a_{N-1}), \ldots$ $\ldots, Y_N^r(y_0^{l+m}, \ldots, a_{N-1})$, definované v okolí bodu $(\hat{x}_0^{l+m}, \ldots, \hat{x}_0^r, 0, \ldots, 0)$ tak, že v tomto okolí (4), (5) platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$y_0^0 = Y_0^0, \ldots, y_0^{l+m-1} = Y_0^{l+m-1}, y_1^0 = Y_1^0, \ldots, y_N^r = Y_N^r .$$

(Zde není třeba se omezovat na nezáporné hodnoty $a_0, \ldots, a_{N-1}$.)

Zaveďme Lagrangeovy násobitele $\hat{\lambda}_n = (\hat{\lambda}_n^0, \ldots, \hat{\lambda}_n^r)$, $n = 1, \ldots, N$, pro podmínky (4) a násobitele $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m$ pro podmínky (5). Utvořme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N, a_0, \ldots, a_{N-1}) =$$

$$= g_0(\mathbf{y}_N) - \sum_{n=1}^{N} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_n \cdot (\mathbf{y}_n - \boldsymbol{\Phi}_{n-1}(\mathbf{y}_{n-1}, a_{n-1})) + \sum_{i=1}^{l} \hat{\alpha}_i h_i(\mathbf{y}_0) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\beta}_i g_i(\mathbf{y}_N) .$$

$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_N, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m$ buďtež zvoleny tak, aby platilo

$$\frac{\partial}{\partial y_j^i} L(\hat{\mathbf{x}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_N, 0, \ldots, 0) = 0 , \tag{10}$$

$$i = 0 , \quad j = 0, \ldots, l + m - 1 , \quad i = 1, \ldots, N , \quad j = 0, \ldots, r .$$

Dle (9) lze vztahům (10) vyhovět jednoznačným způsobem. Není obtížné se přesvědčit, že (10) lze psát jako

$$0 = \nabla g_0(\hat{\mathbf{x}}_N) - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_N + \sum_{i=1}^{m} \hat{\beta}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}_N) , \tag{11}$$

$$0 = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1} \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n) - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_n , \quad n = 0, \ldots, N - 1 , \tag{12}$$

$$0 = \hat{\lambda}_0^j - \sum_{i=1}^{l} \hat{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x^j} h_i(\hat{\mathbf{x}}_0) , \quad j = 0, \ldots, l + m - 1 . \tag{13}$$

Vztah (12) pro $n = 0$ představuje definici $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0$. Z (11)–(13) je patrné, že Lagrangeovy násobitelé nezávisejí na řízení $\{\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}\}$, které jsme zvolili libovolně na počátku. Dále, dle (11), $\hat{\lambda}_N \neq 0$, neboť $\nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}_N)$, $i = 0, \ldots, m$, jsou dle předpokladu lineárně nezávislé.

Uvažujme konečně funkci

$$\tilde{g}_0(y_0^{l+m}, \ldots, y_0^r, a_0, \ldots, a_{n-1}) = g_0(Y_N(y_0^{l+m}, \ldots, y_0^r, a_0, \ldots, a_{n-1})) .$$

Jelikož $\tilde{g}_0(y_0^{l+m}, \ldots, y_0^r, 0, \ldots, 0)$ nabývá pro $y_0^{l+m} = \hat{x}_0^{l+m}, \ldots, y_0^r = \hat{x}_0^r$ maximální hodnoty, platí

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_0^j} \tilde{g}(\hat{x}_0^{l+m}, \ldots, \hat{x}_0^r\, 0, \ldots, 0) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_0^j} L(Y_0^0, \ldots, Y_0^{l+m-1}, y_0^{l+m}, \ldots, y_0^r, Y_1^0, \ldots, Y_N^r, a_0, \ldots, a_{N-1}) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial y_0^j} + \sum_{k=0}^{l+m-1} \frac{\partial L}{\partial y_0^k} \frac{\partial Y_0^k}{\partial y_0^j} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{r} \frac{\partial L}{\partial y_i^k} \frac{\partial Y_i^k}{\partial y_0^j}\bigg|_{y_0 = \hat{x}_0, \ldots, y_N = \hat{x}_N, a_0 = 0, \ldots, a_{N-1} = 0},$$

$$j = l + m, \ldots, r .$$

Odkud vzhledem k (10)

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_0^j} L(\hat{\mathbf{x}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_N, 0, \ldots, 0)\,, \quad j = l + m, \ldots, r . \tag{14}$$

(14) je ekvivalentní

$$0 = \hat{\lambda}_0^j - \sum_{i=1}^{l} \hat{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x^j} h_i(\hat{\mathbf{x}}_0)\,, \quad j = l + m, \ldots, r . \tag{15}$$

Dále platí $\tilde{g}_0(\hat{x}_0^{l+m}, \ldots, \hat{x}_0^r, 0, \ldots, 0) \geqq \tilde{g}_0(\hat{x}^{l+m}, \ldots, \hat{x}_0^r, a_0, \ldots, a_{N-1})$ pro $a_0 \geqq 0, \ldots$ $\ldots, a_{N-1} \geqq 0$ dostatečně malá. Musí tedy být

$$0 \geqq \frac{\partial}{\partial a_j} \tilde{g}_0 = \frac{\partial}{\partial a_j} L(\hat{\mathbf{x}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_N, 0, \ldots, 0)\,, \quad j = 0, \ldots, N - 1 .$$

Tj.

$$0 \geqq \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1} \cdot (\mathbf{F}_n(\hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{u}_n) - \mathbf{F}_n(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n))\,, \quad n = 0, \ldots, N - 1 . \tag{16}$$

Jelikož $\mathbf{u}_n$ bylo zvoleno libovolně, vyjadřuje nerovnost (16) princip optimality, který formulujeme jako větu.

Věta 1. *Budiž* $\{\hat{\mathbf{x}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_N\}$, $\{\hat{\mathbf{u}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_{N-1}\}$ *řešení optimalizační úlohy, formulované na počátku tohoto odstavce, pro něž je splněna podmínka* (P). *Potom existuje nenulová posloupnost* $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_N$ *splňující*

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1} \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)\,, \quad n = 0, \ldots, N - 1\,, \tag{17}$$

tak, že platí

$$\mathscr{H}_n(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n) = \operatorname*{opt}_{\mathbf{u} \in U} \mathscr{H}_n(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}, \hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{u})\,, \quad n = 0, \ldots, N - 1\,, \tag{18}$$

(19) $$\hat{\lambda}_0 = \sum_{i=1}^{l} \hat{\alpha}_i \nabla h_i(\hat{\mathbf{x}}_0)\,, \quad \hat{\lambda}_N = \sum_{i=0}^{m} \hat{\beta}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}_N)$$

pro vhodná $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_m, \hat{\beta}_0 > 0$.

Řízení $\{\hat{\mathbf{u}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_{N-1}\}$ a příslušnou trajektorii $\{\hat{\mathbf{x}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_N\}$, $\hat{\mathbf{x}}_0 \in I$, $\hat{\mathbf{x}}_N \in F$, budeme nazývat *extrémálními*, platí-li (17)–(19) pro vhodnou nenulovou posloupnost $\hat{\lambda}_0, \ldots, \hat{\lambda}_N$. Vztahy (19) se nazývají *podmínkami transverzálnosti*.

3. Příklady

Příklad 1. V následujícím příkladě není princip optimality splněn:

$$U = [-2, -1] \cup [1, 2]\,, \quad x \in R^1\,,$$
$$F_0(x, u) = x + u\,, \quad F_1(x, u) = x^2 + u^2\,, \quad x_0 = 0\,.$$

Úlohou je minimalizovati $x_2 = u_0^2 + u_1^2$. Volba $\hat{u}_0 = \hat{u}_1 = 1$ představuje optimální řízení. Potom je

$$\hat{x}_1 = 1\,, \quad \hat{\lambda}_2 = 1\,, \quad \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2(2\hat{x}_1) = 2\,;$$
$$\hat{\lambda}_1 F_0(\hat{x}_0, \hat{u}_0) = 2 > \min_{u \in U} \hat{\lambda}_1 F_0(\hat{x}_0, u) = -4\,.$$

Příklad 2. Všimněme si numerického řešení úvodního příkladu 1, I. Transformaci stavového vektoru

$$x_n^0 = x_{n-1}^0 + 2(x_{n-1}^1 + u_{n-1}x_{n-1}^3) + x_{n-1}^2 + (1 - u_{n-1})\,x_{n-1}^3\,,$$
$$x_n^1 = x_{n-1}^1 + u_{n-1}x_{n-1}^3\,,$$
$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + (1 - u_{n-1})\,x_{n-1}^3\,,$$
$$x_n^3 = 0{,}5\,(x_{n-1}^1 + u_{n-1}x_{n-1}^3) + 0{,}9\,(x_{n-1}^2 + (1 - u_{n-1})\,x_{n-1}^3)$$

přísluší hamiltonián

(20) $$\mathscr{H}_n(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \mathbf{x}_n, u) = \lambda_{n+1}^0[x_n^0 + 2(x_n^1 + ux_n^3) + x_n^2 + (1 - u)\,x_n^3] + \\ + \lambda_{n+1}^1(x_n^1 + ux_n^3) + \lambda_{n+1}^2(x_n^2 + (1 - u)\,x_n^3) + \lambda_{n+1}^3[0{,}5\,(x_n^1 + ux_n^3) + \\ + 0{,}9\,(x_n^2 + (1 - u)\,x_n^3)]\,.$$

Úkolem je maximalizovat x_5^0 při počátečním stavu $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, y)$. Z (20) vidíme, že při optimálním řízení $\{\hat{u}_0, \ldots, \hat{u}_4\}$ musí platit

(21) $$\hat{u}_n = 0 \quad \text{při} \quad \hat{\lambda}_{n+1}^0 + \hat{\lambda}_{n+1}^1 - \hat{\lambda}_{n+1}^2 - 0{,}4\hat{\lambda}_{n+1}^3 < 0\,,$$
$$\hat{u}_n = 1 \quad \text{při} \quad \hat{\lambda}_{n+1}^0 + \hat{\lambda}_{n+1}^1 - \hat{\lambda}_{n+1}^2 - 0{,}4\hat{\lambda}_{n+1}^3 > 0\,.$$

K řešení úlohy je třeba znáti Jacobiovu matici při $u = 0$ a $u = 1$. Máme

$$J_n(\mathbf{x}, 0) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0{,}5, & 0{,}9, & 0{,}9 \end{pmatrix}, \quad J_n(\mathbf{x}, 1) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0{,}5, & 0{,}9, & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Tabulka 4.

n	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{\lambda}_n^0 + \hat{\lambda}_n^1 - \hat{\lambda}_n^2 - 0{,}4\hat{\lambda}_n^3$	$\hat{u}_{n-1}$
5	(1, 0, 0, 0)	1	1
4	(1, 2, 1, 2)	1,2	1
3	(1, 5, 3,8, 5)	0,2	1
2	(1, 9,5, 9,3, 9,5)	−2,6	0
1	(1, 16,25, 18,85, 18,85)	−9,14	0

Při řešení (viz tabulka 4) vycházíme z hodnoty $\hat{\lambda}_N = (1, 0, 0, 0)$. Postupně pro $n = N, N - 1, \ldots, 1$ dle znaménka výrazu $\hat{\lambda}_n^0 + \hat{\lambda}_n^1 - \hat{\lambda}_n^2 - 0{,}4\hat{\lambda}_n^3$ určujeme, zda $\hat{u}_{n-1} = 0$ neb $\hat{u}_{n-1} = 1$ a vypočítáváme $\hat{\lambda}_{n-1}$ ze vztahu $\hat{\lambda}_{n-1} = \hat{\lambda}_n J_{n-1}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}, \hat{u}_{n-1})$. Jacobiova matice na stavové souřadnici nezávisí. $\{\hat{u}_0, \ldots, \hat{u}_4\}$ je jediné extrémální řízení. Je rovněž optimálním řízením, protože řešení optimalizační úlohy zřejmě existuje. Optimální trajektorie pro $y = 1$ je uvedena v tabulce 5.

Tabulka 5.

n	$\hat{x}_n^0$	$\hat{x}_n^1$	$\hat{x}_n^2$	$\hat{x}_n^3$
0	0	0	0	1
1	1	0	1	0,9
2	1,9	0	1,9	1,71
3	7,22	1,71	1,9	2,565
4	17,67	4,275	1,9	3,8475
5	35,815	8,1225	1,9	5,77125

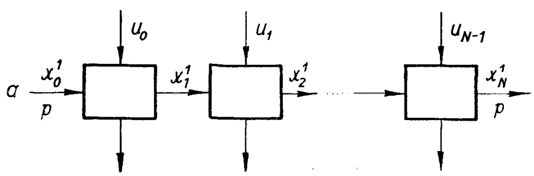
Příklad 3 (L. T. Fan, C. S. Wang) – extrakce látky z roztoku. Uvažujme soustavu, skládající se z N stupňů, ve kterých je určitá látka získávána z roztoku pomocí vody. Soustava je schematicky znázorněná na obrázku 2, kde značí:

p – rychlost průtoku roztoku,
w_n – množství vody proháněné $(n + 1)$-vým stupněm za jednotku času,

$u_n = w_n/p$ – parametr řízení,
x_n^1 – koncentraci látky v roztoku, vstupujícím do $(n+1)$-vého stupně,
a – počáteční koncentraci.

Budiž dále $z = \varphi(x^1)$ koncentrace látky ve vodě v závislosti na její koncentraci v roztoku, opouštějícím stupeň (φ je rostoucí derivovatelnou funkcí x^1).

Platí tedy



Obr. 2.

$$x_n^1 = x_{n-1}^1 - u_{n-1}\,\varphi(x_n^1)\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{22}$$

Vztah (22) definuje transformaci

$$x_n^1 = F^1(\mathbf{x}_{n-1}, u_{n-1})\,.$$

Výnos z procesu se předpokládá rovným množství získané látky (za jednotku času), zmenšenému o veličinu, úměrnou množství spotřebované vody. Tj.

$$p(a - x_N^1) - \varrho \sum_{n=0}^{N-1} w_n\,.$$

Bereme-li v úvahu počáteční podmínku $x_0^1 = a$, můžeme výnos psát jako

$$p[x_0^1 - x_N^1 - \varrho \sum_{n=0}^{N-1} u_n]\,.$$

Maximalizovat výnos znamená tedy maximalizovat x_N^0, kde

$$x_n^0 = x_{n-1}^0 + x_{n-1}^1 - x_n^1 - \varrho u_{n-1}\,, \quad x_0^0 = 0\,,$$

neboli

$$x_n^0 = x_{n-1}^0 + u_{n-1}[\varphi(F^1(\mathbf{x}_{n-1}, u_{n-1})) - \varrho] = F^0(\mathbf{x}_{n-1}, u_{n-1})\,.$$

Ke stanovení Jacobiovy matice použijeme (22). Ze vztahu $F^1 - x^1 + u\,\varphi(F^1) = 0$ obdržíme

$$\frac{\partial F^1}{\partial x^1} = \frac{1}{1 + u\,\varphi'(F_1)}\,, \quad \frac{\partial F^1}{\partial u} = -\frac{\varphi(F^1)}{1 + u\,\varphi'(F_1)}\,.$$

Odkud

$$J(\mathbf{x}_n, u_n) = \begin{pmatrix} 1, & \dfrac{u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)}{1 + u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)} \\ 0, & \dfrac{1}{1 + u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)} \end{pmatrix}.$$

Lagrangeovy násobitelé splňují

$$(23) \qquad \lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0\,, \quad \lambda_n^1 = \frac{\lambda_{n+1}^0 u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1) + \lambda_{n+1}^1}{1 + u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)}\,.$$

Hamiltonián je

$$\mathscr{H}_n(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \mathbf{x}_n, u) = \lambda_{n+1}^0\,F^0(\mathbf{x}_n, u) + \lambda_{n+1}^1\,F^1(\mathbf{x}_n, u)\,.$$

Je-li $\{u_0, \ldots, u_{N-1}\}$ optimálním řízením, musí být

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \mathbf{x}_n, u)\big|_{u=u_n} = \lambda_{n+1}^0\Bigg[\varphi(x_{n+1}^1) -$$

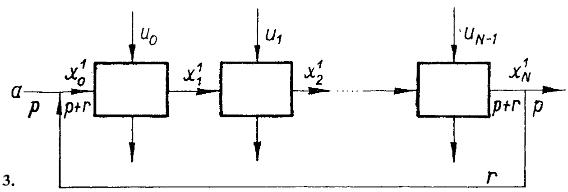
$$- \frac{u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)\,\varphi(x_{n+1}^1)}{1 + u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)} - \varrho\Bigg] - \lambda_{n+1}^1\,\frac{\varphi(x_{n+1}^1)}{1 + u_n\,\varphi'(x_{n+1}^1)}\,,$$

neboli

$$(24) \qquad u_n = \frac{\lambda_{n+1}^0[\varphi(x_{n+1}^1) - \varrho] - \lambda_{n+1}^1\,\varphi(x_{n+1}^1)}{\lambda_{n+1}^0\varrho\,\varphi'(x_{n+1}^1)}\,.$$

Při numerickém řešení můžeme postupovat takto: Položíme $\boldsymbol{\lambda}_N = (1, 0)$ a zvolíme x_N^1. Z (24) vypočteme u_{N-1} a potom x_{N-1}^1 z (22). Z (23) lze pak vypočíst $\boldsymbol{\lambda}_{N-1}$. Stejným způsobem se vypočte u_{n-2}, x_{n-2}^1 atd. Výpočet opakujeme, vycházejíce z opravené hodnoty x_N^1 tak dlouho, až je dosaženo vyhovujícího souhlasu x_0^1 s počáteční hodnotou a.

Příklad 4 — podmínky mísení. Předpokládejme, že v soustavě z příkladu 3 dochází ke zpětnému oběhu roztoku, jak je ukázáno na obrázku 3. r značí rychlost zpětného



Obr. 3.

oběhu. Další označení je stejné jako v předchozím příkladě. Počáteční koncentrace splňuje vztah

$$x_0^1 = \frac{pa + rx_N^1}{p + r}. \tag{25}$$

Rovnost (25) představuje podmínku mísení.

Omezení na Lagrangeovy násobitele, vyplývající z podmínek mísení, uvádějících do vztahu počáteční a konečnou hodnotu trajektorie odvodíme z věty 1. Zobrazení $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, mějtež vlastnosti formulované v odstavci 2. Úloha spočívá v nalezení řízení $\{\hat{\boldsymbol{u}}_0, \hat{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}\}$ a odpovídající trajektorie $\{\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_N\}$, splňující

$$m_i(\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{x}}_N) = 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$

tak, aby $g(\hat{\boldsymbol{x}}_N)$ bylo optimálním. Předpokládá se, že funkce $g, m_0, \ldots, m_l$ mají spojité parciální derivace. K odvození podmínky transversálnosti v tomto případě rozšiřme stavový vektor na $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = (x^0, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^{2r+1})$ a definujme zobrazení

$$\mathbf{F}_n(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{x}').$$

Jacobiovou maticí tohoto zobrazení je

$$\mathbf{J}_n(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), & 0 \\ 0 & , \boldsymbol{E} \end{pmatrix}.$$

Počáteční množinou budiž $\{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\}$, koncovou množinou $\{\boldsymbol{X} : m_i(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \ldots, l\}$. Zřejmě každému řešení $\{\hat{\boldsymbol{u}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}\}$, $\{\hat{\boldsymbol{x}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_N\}$ původní úlohy odpovídá řešení $\{\hat{\boldsymbol{u}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{N-1}\}$, $\{\hat{\boldsymbol{X}}_0 = (\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{x}}_0), \ldots, \hat{\boldsymbol{X}}_N = (\hat{\boldsymbol{x}}_N, \hat{\boldsymbol{x}}_0)\}$ úlohy s rozšířeným stavovým vektorem, optimalizující $G(\hat{\boldsymbol{X}}_N) = g(\hat{\boldsymbol{x}}_N)$ a naopak. Mějme tedy takové řešení. Potom ze vztahů

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{n+1} \mathbf{J}_n(\hat{\boldsymbol{X}}_n, \hat{\boldsymbol{u}}_n), \quad n = 0, \ldots, N-1, \quad \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n = (\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_n'),$$

dostáváme $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1} \boldsymbol{J}_n(\hat{\boldsymbol{x}}_n, \hat{\boldsymbol{u}}_n)$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n' = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}'$. Dle věty 1, (je-li splněna podmínka (P)), máme z počátečních podmínek $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0 = -\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0' = -\hat{\boldsymbol{\lambda}}_N'$. Dále z koncových podmínek

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_N = \left(\hat{\beta} \frac{\partial g}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{l} \hat{\beta}_i \frac{\partial m_i}{\partial x_N^j}, \quad j = 0, \ldots, r; \quad \sum_{i=1}^{l} \hat{\beta}_i \frac{\partial m_i}{\partial x_0^j}, \quad j = 0, \ldots, r\right) =$$

$$= (\hat{\boldsymbol{\lambda}}_N, -\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0),$$

kde $\hat{\beta} > 0$.

V našem případě ze vztahu (25) vyplývá

$$\hat{\lambda}_N^1 = \hat{\beta}_1 r/(p + r), \quad \hat{\lambda}_0^1 = \hat{\beta}_1, \quad \text{tj.} \quad \hat{\lambda}_N^1 = \hat{\lambda}_0^1 r/(p + r).$$

III. PONTRJAGINŮV PRINCIP

1. Úvod

Pontrjaginův princip se týká soustav se spojitým evolučním parametrem. Předpokládá se, že vývoj soustavy je popsán diferenciálními rovnicemi, závisejícími na parametru řízení. Úkolem je najít řízení soustavy, při kterém výsledkový funkcionál integrálního tvaru nabývá optimální hodnoty.

Příklad 1 (M. M. Connors, D. Teichroew) – náklady na reklamu. Vycházíme z těchto předpokladů: Neprovádí-li firma reklamu, potom intenzita $S(t)$ prodeje jejího výrobku klesá úměrně své velikosti. Naopak intenzita prodeje vzrůstá úměrně velikostí reklamy prováděné v minulých obdobích. Máme tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t) = -\mu\, S(t) + \gamma \int_{-\infty}^{t} A(\tau)\, \mathrm{e}^{\tau - t}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

kde $A(t)$ značí intenzitu reklamní činnosti v čase t. Integrál na pravé straně představuje diskontovanou hodnotu reklamní činnosti v minulosti. Derivováním dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} S(t) + (\mu + 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t) + \mu\, S(t) = \gamma\, A(t)\,,$$

s počátečními podmínkami $S(0) = s^1$, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, S(0) = s^2$. Cílem je voliti $0 \leqq A(t) \leqq \bar{A}$ tak, aby celkový výnos do doby T, daný integrálem

$$\int_0^T [S(t) - \alpha\, A(t)]\, \mathrm{d}t\,,$$

byl maximální. α, γ, μ jsou vesměs nezáporné konstanty.

Formulace úlohy. Budiž $f(x, u) = (f^1(x, u), \ldots, f^r(x, u))$ r funkcí proměnných $x = (x^1, \ldots, x^r) \in R^r$, $u = (u^1, \ldots, u^s) \in U \subset R^s$, majících prvé derivace vzhledem k x^i, $i = 1, \ldots, r$, spojité v (x, u) na $R^r \times U$. x nechť představuje stavový vektor, u parametr řízení soustavy, jejíž trajektorie vyhovuje systému diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u)\,. \tag{1}$$

V (1) je parametr řízení volen v závislosti na čase, $u = u(t)$. *Přípustnými řízeními* budeme rozumět funkce, které jsou po částech spojité a spojité zprava. Přesnější smysl (1) je tedy tento: Trajektorie $x(t)$ je spojitá funkce, jež vyhovuje systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u(t)) \tag{2}$$

ve všech bodech spojitosti řízení $\boldsymbol{u}(t)$. Z našich předpokladů vyplývá, že počáteční poloha $\boldsymbol{x}(0)$ určuje při zvoleném řízení $\boldsymbol{u}(t)$ trajektorii jednoznačně. V některých případech však trajektorie existuje pouze v časovém intervalu kratším než odpovídá formulaci úlohy.

Přejděme nyní k definici *výsledkového funkcionálu*. Nechť $f^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ má stejné vlastnosti jako funkce dříve zavedené. Úlohou jest nalézti řízení $\boldsymbol{u}(t)$ a odpovídající trajektorii $\boldsymbol{x}(t)$, splňující (2), tak, aby

$$\psi = \int_0^T f^0(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t$$

nabývalo nejmenší hodnoty. Budeme se zabývat minimalizací ψ za těchto podmínek:

1. $T > 0$ je dané číslo. Rovněž počáteční poloha trajektorie $x(0) = x_0$ je dána.
2. Jsou dány: počáteční množina

$$I = \{\boldsymbol{x} : h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l\}$$

a koncová množina

$$F = \{\boldsymbol{x} : g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\},$$

kde $h_i(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x})$ jsou spojitě diferencovatelné, $\nabla h_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, l$, $\nabla g_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, m$, lineárně nezávislé pro $\boldsymbol{x} \in I$, resp. $\boldsymbol{x} \in F$. Hledá se minimum ψ za podmínek

$$\boldsymbol{x}(0) \in I, \quad \boldsymbol{x}(T) \in F.$$

Jiná omezení na číslo T se nekladou. V důležitém speciálním případě, kdy $f^0(\boldsymbol{x}, u) \equiv 1$, představuje ψ čas potřebný k přechodu řízeného objektu z I do F.

Výklad Pontrjaginova principu je zde veden snahou podat důkaz co nejnázorněji. Bude proto nejprve probrána optimalizační úloha za podmínek 1. Úloha za podmínek 2 bude vyšetřena metodou dynamického programování. Předpoklady této metody podstatně omezují platnost důkazu. Proto je dokázán Pontrjaginův princip v úloze o nejkratším čase znovu metodou Boltjanského.

Formulace se zjednoduší, rozšíříme-li stavový vektor $\boldsymbol{x}$ na $\mathbf{x} = (x^0, \boldsymbol{x}) = (x^0, \ldots \ldots, x^r)$. Trajektorií soustavy budeme pak rozuměti $\mathbf{x}(t) = (x^0(t), \boldsymbol{x}(t))$, kde

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = f^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Potom je

$$x^0(T) = x^0(0) + \int_0^T f^0(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Nultá souřadnice stavového vektoru v čase T tedy představuje výsledkový funkcionál. Budeme značit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{u}) = (f^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \ldots, f^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})).$$

Potom systém rovnic pro rozšířenou trajektorii lze psát ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) . \tag{3}$$

2. Minimalizace ψ při předem daných T, $\mathbf{x}(0)$.

Nejprve provedeme heuristické úvahy, založené na limitním přechodu od procesu s diskrétním evolučním parametrem (odstavec 1,II) k procesu s parametrem spojitým, nechávajíce dobu trvání stupně Δt konvergovat k nule. Přitom

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, \Delta t .$$

Platí tedy

$$\mathbf{x}(\overline{n + 1}\, \Delta t) = \mathbf{x}(n\, \Delta t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n\, \Delta t), \mathbf{u}(n\, \Delta t))\, \Delta t .$$

Odkud limitním přechodem pro $\Delta t \to 0$, $n\, \Delta t \to t$ vyplývá (3). Soustava rovnic pro Lagrangeovy násobitele se odvodí z (1,II). Je totiž

$$\boldsymbol{\lambda}(n\, \Delta t) = \boldsymbol{\lambda}(\overline{n + 1}\, \Delta t)\, \mathbf{J}(\mathbf{x}(n\, \Delta t), \mathbf{u}(n\, \Delta t)) ,$$

kde

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left\| \frac{\partial F_n^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x^j} \right\|_{i,j=0}^r = \left\| \delta_{ij} \right\|_{i,j=0}^r + \left\| \frac{\partial f^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x^j} \right\|_{i,j=0}^r \Delta t .$$

Označíme-li poslední z matic $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, můžeme psát

$$\boldsymbol{\lambda}(\overline{n + 1}\, \Delta t) - \boldsymbol{\lambda}(n\, \Delta t) = -\boldsymbol{\lambda}(\overline{n + 1}\, \Delta t)\, \mathbf{j}(\mathbf{x}(n\, \Delta t), \mathbf{u}(n\, \Delta t))\, \Delta t .$$

Pro $\Delta t \to 0$, $n\, \Delta t \to t$, $N\, \Delta t \to T$, odtud dostáváme

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\lambda} \mathbf{j}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) , \quad \boldsymbol{\lambda}(T) = (1, 0, \ldots, 0) .$$

Lagrangeovy násobitelé mají stejnou interpretaci jako v diskrétním případě. Je-li

$$^*\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x} + o(\varepsilon) ,$$

potom

$$^*x^0(T) = x^0(T) + \varepsilon\, \boldsymbol{\lambda}(t) \,.\, \delta \mathbf{x} + o(\varepsilon) .$$

Násobitelé tedy udávají gradient výsledkové funkce vzhledem ke stavovému vektoru.

Formulovaná tvrzení nyní dokážeme. Budiž $\mathbf{u}(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, přípustné řízení. $\mathbf{x}(t)$, $^*\mathbf{x}(t)$ bude označovati trajektorie, odpovídající řízení $\mathbf{u}(t)$, tj. řešení soustavy rovnic

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t)) , \quad t \in [0, T] .$$

Předpokládáme, že trajektorie $\mathbf{x}(t)$ existuje na celém intervalu $[0, T]$.

Lemma 1. *Platí-li*

$$(4) \qquad {}^*\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) + \varepsilon\, \delta\mathbf{x}(0) + o(\varepsilon)\,,$$

potom

$${}^*\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon\, \delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon)\,,$$

kde $\delta\mathbf{x}(t)$ *je spojité a splňuje*

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta\mathbf{x}(t) = \delta\mathbf{x}(t)\, \boldsymbol{j}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t))'$$

(*v bodech spojitosti řízení* $\boldsymbol{u}(t)$).

Důkaz. Lze dokázat, že pro dostatečně malá ε trajektorie ${}^*\mathbf{x}(t)$ rovněž existuje na celém intervalu $[0, T]$. $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{u}(t))$ zřejmě splňuje pro $0 \leqq t \leqq T$ Lipschitzovu podmínku

$$\|\boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{u}(t)) - \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{u}(t))\| \leqq k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

v libovolné ohraničené oblasti prostoru R^{r+1}. Označme $\Delta(t) = \|{}^*\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)\|$ a budiž $t_1 > 0$ první bod nespojitosti řízení $\boldsymbol{u}(t)$. Máme

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \Delta(t) \leqq \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ({}^*\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)) \right\| \leqq k\, \Delta(t)\,, \quad 0 \leqq t \leqq t_1\,,$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{e}^{-kt}\, \Delta(t) \leqq 0\,, \quad \Delta(t) \leqq \mathrm{e}^{kt}\, \Delta(0)\,.$$

Je tedy

$$(7) \qquad \Delta(t) \leqq \mathrm{e}^{kt}(\varepsilon \|\delta\mathbf{x}(0)\| + o(\varepsilon))\,.$$

Dále

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ({}^*\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)) = \boldsymbol{f}({}^*\mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) - \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) =$$

$$= ({}^*\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t))\, \boldsymbol{j}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t))' + o(\Delta(t))\,.$$

Budiž $\delta\mathbf{x}(t)$ řešení (5), kde $\delta\mathbf{x}(0)$ je totéž jako v (4). Položme

$$\vartheta(t) = \|\varepsilon^{-1}({}^*\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)) - \delta\mathbf{x}(t)\|\,.$$

Z (7) a (8) plyne celkem snadno, že pro dostatečně malá ε máme vzhledem k (4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \vartheta(t) \leqq m\, \vartheta(t) + \varepsilon_1\,,$$

kde m je konstanta a $\varepsilon_1 > 0$ libovolné. Odtud plyne

$$\vartheta(t) \leqq e^{mt}(\vartheta(0) + \varepsilon_1/m) .$$

Jelikož (4) má za následek $\vartheta(0) \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$, a ε_1 je libovolné, usoudíme, že $\vartheta(t) \to$ $\to 0$. To dokazuje tvrzení lemmatu pro $0 \leqq t \leqq t_1$. K dokončení důkazu opakujeme provedenou úvahu na všech intervalech spojitosti $\boldsymbol{u}(t)$. □

Lemma 2. *Platí-li*

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) , \quad t \in [0, T] , \tag{9}$$

potom

$$\delta\boldsymbol{x}(t) \,.\, \boldsymbol{\lambda}(t) \equiv \text{const} , \quad t \in [0, T] . \tag{10}$$

Důkaz. V každém bodě spojitosti řízení $\boldsymbol{u}(t)$ máme

$$\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{x}(t) \,.\, \boldsymbol{\lambda}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{x}(t)\right) . \,\boldsymbol{\lambda}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t) \,.\, \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t) =$$
$$= \delta\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))' \,\boldsymbol{\lambda}(t)' - \delta\boldsymbol{x}(t)\,(\boldsymbol{\lambda}(t)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)))' = 0 .$$

Odtud a ze spojitosti $\delta\boldsymbol{x}(t) \,.\, \boldsymbol{\lambda}(t)$ snadno vyplývá (10). □

Důsledek 1. *Je-li* $\boldsymbol{\lambda}(T) = (1, 0, \ldots, 0)$ *potom za předpokladů lemmatu* 1 $\delta\boldsymbol{x}(t)$. $. \,\boldsymbol{\lambda}(t) = \delta x^0(T)$.

Budiž $\boldsymbol{x}_0$ daný počáteční stav objektu a budiž $\boldsymbol{u}(s)$, $0 \leqq s \leqq T$, přípustné řízení. Zvolme $t \in (0, T)$, $\boldsymbol{v} \in U$. t budiž bodem spojitosti řízení $\boldsymbol{u}(s)$. Uvažujme variaci řízení $\boldsymbol{u}(s)$

$$^*\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{u}(s) \quad \text{pro} \quad s \notin [t - \varepsilon, t) , \quad ^*\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{v} \quad \text{pro} \quad s \in [t - \varepsilon, t) .$$

Značí-li $\boldsymbol{x}(s)$, $^*\boldsymbol{x}(s)$ trajektorii odpovídající řízení $\boldsymbol{u}(s)$, resp. $^*\boldsymbol{u}(s)$ při $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 =$ $= {}^*\boldsymbol{x}(0)$, potom platí

$$^*\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))]\,\varepsilon + o(\varepsilon) .$$

Odtud, dle důsledku 1,

$$^*x^0(T) - x^0(T) = \boldsymbol{\lambda}(t) \,.\, [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))]\,\varepsilon + o(\varepsilon) , \tag{11}$$

kde $\boldsymbol{\lambda}(t)$ je řešení (9), splňující $\boldsymbol{\lambda}(T) = (1, 0, \ldots, 0)$. Je-li $\boldsymbol{u}(s)$ řízení, pro něž $x^0(T)$ nabývá minimální hodnoty, musí být koeficient u ε na pravé straně (11) nezáporný. Odtud vyplývá následující věta.

Věta 1. *Řízení $u(t)$, $t \in [0, T]$, minimalizuje výsledkový funkcionál pouze tehdy, je-li*

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \min_{\boldsymbol{v} \in U} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{v}), \quad t \in [0, T), \tag{12}$$

kde $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda} \,.\, \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{u})$.

Platnost (12) pro ta t, pro něž $\boldsymbol{u}(t)$ je spojité pouze zprava, se odvodí limitním přechodem.

Poznámka 1. Kdybychom místo $\lambda(T) = (1, 0, \ldots, 0)$ volili $\lambda(T) = (-1, 0, \ldots, 0)$, dostali bychom nutnou podmínku pro minimum ve tvaru

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \max_{\boldsymbol{v} \in U} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{v}), \quad t \in [0, T).$$

Tento vztah je v souhlase s názvem princip maxima.

Poznámka 2. V (3) nezávisí pravá strana na evolučním parametru t. Jedná se tedy o autonomní (časově homogenní) soustavu. Úvahy, prováděné v tomto odstavci, zůstávají v platnosti pro neautonomní soustavy:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{u}). \tag{13}$$

Podmínce (12) odpovídá potom

$$\mathscr{H}(t, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \min_{\boldsymbol{v} \in U} \mathscr{H}(t, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{v}), \quad t \in [0, T), \tag{12'}$$

kde $\mathscr{H}(t, \lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{u}) = \lambda \,.\, \boldsymbol{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{u})$. (13) se převede na autonomní soustavu zavedením další stavové souřadnice $x^{r+1} = t$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}x^{r+1}}{\mathrm{d}t} \equiv 1, \quad x^{r+1}(0) = t_0.$$

Pomocí *Hamiltonovy funkce* $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \boldsymbol{u})$ lze (3) a (9) zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda^j}, \quad \frac{\mathrm{d}\lambda^j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^j}.$$

Hamiltoniánem (v čase t) budeme rozumět $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u})$ jako funkci proměnné $\boldsymbol{u}$. Následující lemma říká, že za platnosti (12) je $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$ konstantní.

Lemma 3. *Budiž*

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \min_{\boldsymbol{v} \in U} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{v}), \quad 0 \leqq t < T,$$

kde $\mathbf{x}(t)$ *splňuje* (3) *a* $\boldsymbol{\lambda}(t)$ (9). *Potom je*

$$\mathscr{M}(t) = \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \equiv \text{const}, \quad 0 \leqq t < T.$$

Důkaz. Budiž $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$. Máme

$$\mathscr{M}(\tau_2) - \mathscr{M}(\tau_1) \leqq \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(\tau_2), \boldsymbol{x}(\tau_2), \boldsymbol{u}(\tau_1)) - \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(\tau_1), \boldsymbol{x}(\tau_1), \boldsymbol{u}(\tau_1)) =$$

$$= (\tau_2 - \tau_1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(\tau_1))\Big|_{t=\xi},$$

kde ξ leží mezi τ_1 a τ_2. Dále,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), x(t), \boldsymbol{u}(\tau_1))\Big|_{t=\xi} = \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda^j} (\boldsymbol{\lambda}(\xi), \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{u}(\tau_1)) \frac{\mathrm{d}\lambda^j}{\mathrm{d}t} (\xi) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^j} (\boldsymbol{\lambda}(\xi), \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{u}(\tau_1)) \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} (\xi) = - \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda^j} (\boldsymbol{\lambda}(\xi), \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{u}(\tau_1)) \,.$$

$$. \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^j} (\boldsymbol{\lambda}(\xi), \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{u}(\xi)) + \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^j} (\boldsymbol{\lambda}(\xi), \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{u}(\tau_1)) \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda^j} (\boldsymbol{\lambda}(\xi), \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{u}(\xi)) \,.$$

Je-li τ_1 bodem spojitosti $\boldsymbol{u}(t)$ plyne odtud

$$\lim_{\tau_2 \to \tau_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(\tau_1))\Big|_{t=\xi} = 0 \,.$$

Obdobně platí

$$\mathscr{M}(\tau_2) - \mathscr{M}(\tau_1) \geqq (\tau_2 - \tau_1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(\tau_2))\Big|_{t=\xi'} .$$

Z ohraničenosti $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(\tau_i))$, $i = 1, 2$, usoudíme, že $\mathscr{M}(t)$ je spojitá na $[0, T]$. Dále vidíme, že je $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, \mathscr{M}(t) = 0$ ve všech bodech spojitosti $\boldsymbol{u}(t)$. Je tedy $\mathscr{M}(t) \equiv \text{const.}$ □

Dokončení příkladu 1. Položme

$$S^0(t) = \int_0^t [S(s) - \alpha\, A(s)]\, \mathrm{d}s \,, \quad S^1(t) = S(t) \,, \quad S^2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t) \,.$$

Můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S^0 = S^1 - \alpha A \,, \quad S^0(0) = 0 \,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S^1 = S^2 \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S^2 = -(1 + \mu)\, S^2 - \mu S^1 + \gamma A \,.$$

Hamiltonián má tedy tvar

$$\mathscr{H} = \lambda^0 (S^1 - \alpha A) + \lambda^1 S^2 + \lambda^2 [-(1 + \mu)\, S^2 - \mu S^1 + \gamma A] \,.$$

Dále,

$$\lambda^0 \equiv 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^1 = -1 + \mu\lambda^2\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^2 = -\lambda^1 + (1 + \mu)\,\lambda^2\,.$$

Odtud vyplývá pro λ^2 rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\lambda^2 - (1 + \mu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^2 + \mu\lambda^2 - 1 = 0\,, \quad \lambda^2(T) = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^2(T)\,.$$

Řešení je

$$\lambda^2(t) = \mu^{-1} + \frac{1}{\mu(\mu - 1)}\,\mathrm{e}^{\mu(t-T)} - \frac{1}{\mu - 1}\,\mathrm{e}^{t-T} \quad \text{pro} \quad \mu \neq 1\,,$$

$$\lambda^2(t) = 1 + t\mathrm{e}^{t-T} - (1 + T)\,\mathrm{e}^{t-T} \quad \text{pro} \quad \mu = 1\,.$$

Poznamenejme, že $\lambda^2(t)$ je klesající na $[0, T]$.

Platí $\mathscr{H} = (\gamma\lambda^2 - \alpha)\,A + \mathscr{H}'$, kde $\mathscr{H}'$ nezávisí na A. Má-li řízení $\{\hat{A}(t),\, 0 \leqq t \leqq T\}$ maximalizovat Hamiltonián, musí být

$$\hat{A}(t) = \bar{A} \quad \text{pro} \quad \gamma\lambda^2(t) - \alpha > 0\,, \quad \hat{A}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad \gamma\lambda^2(t) - \alpha < 0\,.$$

Existuje-li $\tau \in (0, T]$ splňující $\gamma\lambda^2(\tau) = \alpha$, je k dosažení optimálního výsledku třeba provádět reklamu do doby τ, a to s maximální intenzitou. V opačném případě je nejvýhodnější reklamu vůbec neprovádět.

3. Lineární soustavy s kvadratickým výsledkovým funkcionálem

Nechť systém rovnic pro trajektorii má tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{B}(t)\,, \tag{14}$$

kde $\boldsymbol{A}(t)$ je matice typu $r \times r$, $\boldsymbol{B}(t)$ matice typu $s \times r$, $\boldsymbol{u} \in R^s$. Výsledkový funkcionál budiž

$$\psi = \frac{1}{2}\int_0^T [\boldsymbol{x}(t)\,\boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{x}(t)' + \boldsymbol{u}(t)\,\boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{u}(t)']\,\mathrm{d}t\,, \tag{15}$$

kde $\boldsymbol{Q}(t)$ je symetrická pozitivně semidefinitní matice typu $r \times r$, $\boldsymbol{R}(t)$ symetrická pozitivně definitní matice typu $s \times s$. Předpokládá se, že všechny matice jsou spojitými funkcemi t.

Hamiltonova funkce úlohy je

$$\mathscr{H}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}\lambda^0[\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{Q}(t)\, \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{R}(t)\, \boldsymbol{u}'] + \boldsymbol{\lambda} \,.\, (\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{B}(t))\,.$$

Zde jsme použili označení $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^r)$. Platí $\lambda^0 \equiv 1$, $\boldsymbol{\lambda}(T) = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{Q}(t) - \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{A}(t)'\,. \tag{16}$$

Abychom nalezli $\boldsymbol{u}$, které Hamiltonovu funkci minimalizuje, položme

$$\nabla\mathscr{H} = \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{B}(t)' = 0\,.$$

Řešením této soustavy je

$$\hat{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{B}(t)'\, \boldsymbol{R}(t)^{-1}\,. \tag{17}$$

$\boldsymbol{R}(t)^{-1}$ existuje, neboť $\boldsymbol{R}(t)$ je pozitivně definitní. Rovněž tak matice druhých derivací $\|\partial^2\mathscr{H}/\partial u_i\, \partial u_j\|_{i,j=1}^{s} = \boldsymbol{R}(t)$ je pozitivně definitní. Hamiltonova funkce tedy nabývá v bodě $\hat{\boldsymbol{u}}$ minimální hodnoty. Ze (14) vyplývá pro optimální trajektorii

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t} = \hat{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{A}(t) - \hat{\boldsymbol{\lambda}}\, \boldsymbol{B}(t)'\, \boldsymbol{R}(t)^{-1}\, \boldsymbol{B}(t)\,. \tag{18}$$

Pokusme se vyhovět (16) a (18) dosazením $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t)\, \boldsymbol{K}(t)$, kde matici $\boldsymbol{K}(t)$ je třeba vhodně zvoliti. Dosazením do (16) dostáváme s použitím (18)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{K}) = \hat{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{K} - \hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{B}(t)'\, \boldsymbol{R}(t)^{-1}\, \boldsymbol{B}(t)\, \boldsymbol{K} + \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = -\hat{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{Q}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{A}(t)'\,.$$

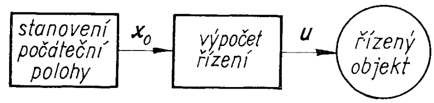
Splňuje-li $\boldsymbol{K}$ maticovou Riccatiovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{A}(t)' + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{B}(t)'\, \boldsymbol{R}(t)^{-1}\, \boldsymbol{B}(t)\, \boldsymbol{K} - \boldsymbol{Q}(t) \tag{19}$$

s podmínkou $\boldsymbol{K}(T) = 0$, potom $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t)\, \boldsymbol{K}(t)$ je Lagrangeův násobitel. Ze (17) dostáváme optimální řízení

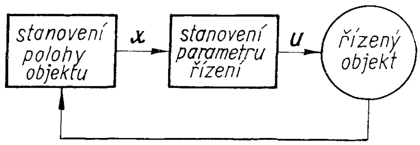
$$\hat{\boldsymbol{u}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{K}(t)\, \boldsymbol{B}(t)'\, \boldsymbol{R}(t)^{-1}\,. \tag{20}$$

Vztah (20) vyjadřuje optimální hodnotu parametru řízení přímo jako funkci stavového vektoru (a evolučního parametru t). V kapitole I jsme tento popis zamýšleného řízení objektu nazvali strategií. Zde vysvětlíme ještě termíny, které jsou v nynější souvislosti běžněji používány. Při formulaci úlohy na počátku této kapitoly jsme vycházeli z následující představy: Ze znalosti počátečního stavu řízeného objektu se stanoví optimální řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ na intervalu $0 \leqq t \leqq T$. Při tomto stanovení je třeba vzít v úvahu možné trajektorie objektu v časovém intervalu $[0, T]$. Při vlastním řízení se okamžitý stav objektu v úvahu dále nebere, parametr řízení se volí jako funkce času. Hovoříme o *programovaném řízení* (řízení s otevřenou smyčkou) (obr. 4).



Obr. 4.

Znalost závislosti optimálního řízení na poloze řízené soustavy dává možnost stanovovat parametr řízení až při průběhu řízeného jevu podle trajektorie soustavy. Hovoříme o *řízení se zpětnou vazbou* (s uzavřenou smyčkou) (obr. 5). Určení závislosti parametru řízení na stavu soustavy se nazývá *syntézou řízení.*



Obr. 5.

Příklad 2. Jest nalézt $u(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, tak aby výsledkový funkcionál $\frac{1}{2}\int_0^T [q\, x(t)^2 + r\, u(t)^2]\, dt$, kde je $q \geqq 0$, $r > 0$, nabyl minimální hodnoty. Předpokládá se, že platí

$$\frac{d}{dt} x(t) = a\, x(t) - b\, u(t)\,, \quad a, b > 0\,. \tag{21}$$

Máme dle (20) $\hat{u} = \hat{x}\, k(t)\, b/r$, kde

$$\frac{d}{dt} k = -2ak + \frac{b^2}{r} k^2 - q\,, \quad k(T) = 0\,.$$

Řešením je

$$k(t) = (A + B)\left(1 - e^{2B(t-T)}\right)\left[1 + \frac{B + A}{B - A}\, e^{2B(t-T)}\right]^{-1},$$

pro

$$A = arb^{-2}\,, \quad B = b^{-2}\sqrt{(a^2r^2 + b^2qr)}\,.$$

Optimální trajektorie se určí dosazením do (21).

4. Minimalizace ψ za podmínek $x(0) \in I$, $x(T) \in F$

Věnujme se nyní druhé úloze formulované na počátku. S odvoláním na konec odstavce 1 předpokládáme, $\psi = x^0(T)$. Označme $\hat{E}$ množinu všech $\boldsymbol{x} = (x^0, x) \in R^{r+1}$ takových, že existuje optimální trajektorie z $\boldsymbol{x}$ do F. Tj. existuje řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, a jemu odpovídající trajektorie $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, $\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}$, $\hat{x}(\hat{T}) \in F$, tak, že $\hat{x}^0(\hat{T}) \leqq x^0(T)$ pro všechny trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, splňující $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}$, $x(T) \in F$. Pro $\boldsymbol{x} \in \hat{E}$ budeme klást $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \hat{x}^0(\hat{T})$. Rovnice

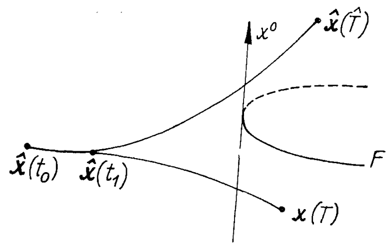
$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = C$$

určuje jednoparametrickou množinu ploch $\{\Sigma\}$, které budeme nazývat *hraničními plochami.*

Bellmanův princip, který jsme formulovali pro procesy s diskrétním evolučním parametrem, má ve spojitém případě tento tvar:

Lemma 4. *Je-li $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, $t_0 \leqq t \leqq \hat{T}$, optimální trajektorie z $\hat{\boldsymbol{x}}(t_0)$ do F, potom pro libovolné $t_1 \in [t_0, \hat{T}]$ je $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq T$, optimální trajektorie z $\hat{\boldsymbol{x}}(t_1)$ do F.*

Důkaz. Kdyby pro nějaké $\boldsymbol{u}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq T$, trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq T$, splňovala $\boldsymbol{x}(t_1) = \hat{\boldsymbol{x}}(t_1)$, $x(T) \in F$, $x^0(T) < \hat{x}^0(\hat{T})$, potom trajektorie $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$, $t_0 \leqq t \leqq T$, $\bar{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}(t_0)$ při řízení $\bar{\boldsymbol{u}}(t) = \hat{\boldsymbol{u}}(t)$ pro $t_0 \leqq t < t_1$, $\bar{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t)$ pro $t_1 \leqq t \leqq T$, by byla trajektorií z $\hat{\boldsymbol{x}}(t_0)$ do F, lepší než $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ (viz obr. 6). □



Obr. 6.

Stručné vyjádření principu je, že *část optimální trajektorie je opět optimální trajektorií.*

Lemma 5. *Budiž $\boldsymbol{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, trajektorie a budiž $\boldsymbol{x}(0) \in \hat{E}$, $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(0)) = C$. Potom*

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(t)) < C \tag{22}$$

není splněno pro žádné $t \in [0, T]$. Je-li $\boldsymbol{x}(t)$ optimální trajektorií z $\boldsymbol{x}(0)$ do F, potom $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(t)) = C$, $t \in [0, T]$.

Důkaz. První tvrzení vyplývá z Bellmanova principu. Platí-li totiž (22), potom existuje trajektorie $\mathbf{y}(s)$, $t \leqq s \leqq T'$, z $\mathbf{x}(t)$ do F, splňující $y^0(T') = \hat{\psi}(\mathbf{x}(t)) < C$. Položíme-li $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s)$ pro $0 \leqq s \leqq t$, dostáváme trajektorii z $\mathbf{x}(0)$ do F. Musí tedy být $y^0(T') \geqq C$, což je spor. Druhé tvrzení lemmatu je důsledkem prvého. □

$\mathbf{x} \in \hat{E}$ nazveme *regulárním* bodem, je-li $\mathbf{x}$ vnitřním bodem $\hat{E}$ a je-li $\nabla\hat{\psi}$ spojité v okolí $\mathbf{x}$. Vzhledem k $\partial\hat{\psi}/\partial x^0 = 1$, je $\nabla\hat{\psi} \neq 0$. Trajektorii $\mathbf{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, nazveme regulární, jsou-li všechny body $\mathbf{x}(t)$, $0 \leqq t < T$, regulární.

Budiž $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, regulární optimální trajektorie z $\hat{\mathbf{x}}(0)$ do F, odpovídající řízení $\hat{\mathbf{u}}(t)$. Budiž $\hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}(0)) = C$. Hraniční plocha Σ, určená vztahem $\hat{\psi}(\mathbf{x}) = C$, rozděluje množinu $\hat{E}$ na dvě části

$$\hat{E}_- = \{\mathbf{x} \in \hat{E} : \hat{\psi}(\mathbf{x}) < C\}, \quad \hat{E}_+ = \{\mathbf{x} \in \hat{E} : \hat{\psi}(\mathbf{x}) \geqq C\}.$$

Dle lemmatu 5 je trajektorie $\hat{\mathbf{x}}(t)$ celá obsažena v Σ. Všimněme se, jak se chová tečná nadrovina k Σ při pohybu po této trajektorii. Tečnou nadrovinu v bodě $\hat{\mathbf{x}}(0)$ lze vyjádřit jako

$$\pi_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{z},\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}(0) \,.\, \mathbf{z} = 0\},$$

kde $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(0) = -\nabla\hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}(0))$ je vektor normály k ploše Σ, směřující dovnitř $\hat{E}_-$. Označme $L_0 = \{\mathbf{z} : \hat{\boldsymbol{\lambda}}(0) \,.\, \mathbf{z} = 0\}$. Ke každému $\mathbf{z} \in L_0$ lze nalézt křivku $\mathbf{x}_\varepsilon \in \Sigma$, závisející na nezáporném parametru ε, takovou, že

$$\mathbf{x}_\varepsilon = \hat{\mathbf{x}}(0) + \varepsilon\mathbf{z} + o(\varepsilon) \quad \text{pro} \quad \varepsilon \to 0\,. \tag{23}$$

Uvažujme trajektorii $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ odpovídající řízení $\hat{\mathbf{u}}(t)$, která vychází z $\mathbf{x}_\varepsilon$. Dle lemmatu 1

$$\mathbf{x}_\varepsilon(s) = \hat{\mathbf{x}}(s) + \varepsilon\,\mathbf{z}(s) + o(\varepsilon)\,, \tag{24}$$

kde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t)\,\mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))'\,, \quad 0 \leqq t \leqq s\,, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}\,. \tag{25}$$

Z vlastností soustavy (25), vyplývá toto: Probíhá-li $\mathbf{z}$ podprostor L_0, potom $\mathbf{z}(s)$ probíhá rovněž r-rozměrný podprostor, který označíme L_s. Dokážeme, že

$$\pi_s = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{z},\ \mathbf{z} \in L_s\}$$

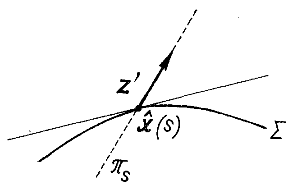
je tečnou nadrovinou k Σ v bodě $\hat{\mathbf{x}}(s)$. To bude dokázáno, ověříme-li, že v dostatečně malém okolí bodu $\hat{\mathbf{x}}(s)$ nadrovina π_s plochu Σ neprotíná. Předpokládejme naopak, že π_s protíná Σ. Potom existuje $\mathbf{z}' \in L_s$, směřující dovnitř $\hat{E}_-$ (viz obr. 7). Tj. platí

$$\hat{\mathbf{x}}(s) + \varepsilon\mathbf{z}' \in \hat{E}_-$$

pro dostatečně malá ε. Přitom vzdálenost $\hat{\mathbf{x}}(s) + \varepsilon\mathbf{z}'$ od Σ je řádu ε. V soustavě (25) můžeme volit počáteční hodnotu $z \in L_0$ tak, aby $z(s) = z'$. Potom pro křivku na Σ splňující (23), platí o odpovídající trajektorii $x_\varepsilon(t)$ dle (24)

$$x_\varepsilon(s) = \hat{x}(s) + \varepsilon z' + o(\varepsilon) .$$

Odtud $x_\varepsilon(s) \in \hat{E}_-$ pro dostatečně malá ε. To je spor s lemmatem 5.



Obr. 7.

Uvažujme řešení soustavy

$$\frac{d}{dt} \hat{\lambda}(t) = -\hat{\lambda}(t) j(\hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad t \in [0, T], \tag{26}$$

s počáteční podmínkou

$$\hat{\lambda}(0) = -\nabla\hat{\psi}(\hat{x}(0)) . \tag{27}$$

Jelikož je $\hat{\lambda}(0) . z = 0$ pro $z \in L_0$, je vzhledem k (25) a k lemmatu 2, $\hat{\lambda}(s) . z = 0$ pro $z \in L_s$. Vidíme, že $\hat{\lambda}(s)$ je vektorem normály k Σ v bodě $\hat{x}(s)$. Z (26) plyne $\hat{\lambda}^0 \equiv -1$ a tedy

$$\hat{\lambda}(s) = -\nabla\hat{\psi}(\hat{x}(s)) . \tag{28}$$

Výsledky, ke kterým jsme doposud dospěli, umožňují dokázat následující větu. Ve větě se předpokládá, že nultá souřadnice počáteční polohy $x^0(0)$ je předem dána.

Věta 2. *Budiž $\hat{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, regulární optimální trajektorie z I do F, odpovídající řízení $\hat{u}(t)$. Budiž $\hat{\lambda}(t)$ řešení (26) s počáteční podmínkou (27). Potom*

$$0 \equiv \mathscr{H}(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathscr{H}(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), u), \quad 0 \leqq t < \hat{T}, \tag{29}$$

kde

$$\mathscr{H}(\lambda, x, u) = \lambda . f(x, u) . \tag{30}$$

Dále

$$(\lambda^1(0), \ldots, \lambda^n(0)) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \nabla h_i(\hat{x}(0)) . \tag{31}$$

Důkaz. Nechť $\hat{\psi}(\hat{\boldsymbol{x}}(0)) = C$. Dle lemmatu 5 je $\hat{\psi}(\hat{\boldsymbol{x}}(t)) = C$ pro $t \in [0, \hat{T}]$. Definujme variaci řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(s)$

$$\boldsymbol{u}(s) = \hat{\boldsymbol{u}}(s) \quad \text{pro} \quad s \notin [t, t + \varepsilon)\,, \quad \boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{u} \quad \text{pro} \quad s \in [t, t + \varepsilon)\,,$$

a označme $\boldsymbol{x}(s)$ odpovídající trajektorii, vycházející z $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$. Platí

$$\boldsymbol{x}(t + \varepsilon) = \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u})\,\varepsilon + o(\varepsilon)\,.$$

Odkud dle (28), (30)

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(t + \varepsilon)) = \hat{\psi}(\hat{\boldsymbol{x}}(t)) + \overline{\nabla}\hat{\psi}(\hat{\boldsymbol{x}}(t)) \,.\, \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u})\,\varepsilon + o(\varepsilon) =$$
$$= C - \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) \,.\, \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u})\,\varepsilon + o(\varepsilon) = C - \mathscr{H}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u})\,\varepsilon + o(\varepsilon)\,.$$

Kdyby platilo $\mathscr{H}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}) > 0$, bylo by pro dostatečně malá ε $\hat{\psi}(x(t + \varepsilon)) < C$, což je spor s lemmatem 5, neboť $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}(0)) = C$. Tedy je $\mathscr{H}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}) \leqq 0$.

Dále platí

$$C = \hat{\psi}(\hat{\boldsymbol{x}}(t + \varepsilon)) = C - \mathscr{H}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t))\,\varepsilon + o(\varepsilon)\,,$$

odkud $\mathscr{H}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t)) = 0$. Tím je (29) dokázáno.

Zbývá ověřit *podmínku transverzálnosti* (31). Jelikož $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ je optimální trajektorie z I do F, nabývá $\hat{\psi}(x^0(0), \boldsymbol{x})$ svého minima na I v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$. Dle věty o vázaném extrému existují Lagrangeovy násobitelé $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ tak, že platí

$$\overline{\nabla}[\hat{\psi}(\hat{\boldsymbol{x}}(0)) + \alpha_1 h_1(\hat{\boldsymbol{x}}(0)) + \ldots + \alpha_l h_l(\hat{\boldsymbol{x}}(0))] = 0\,. \tag{32}$$

$\overline{\nabla}$ zde značí gradient vzhledem k proměnným $x^1, \ldots, x^r$. (32) je s ohledem (28) totožné s (31). □

Poznámka 1. Povšimněme si bez nároků na přesnost otázky, zda soustava podmínek věty 2 je rozsáhlá natolik, abychom z ní mohli určovati řešení optimalizační úlohy. Předpokládejme nejprve, že F obsahuje jediný bod ${}^+x$. Vztah (29) určuje $\hat{u}(t)$ v závislosti na $\hat{\lambda}(t)$, $\hat{x}(t)$. Obecné řešení soustav

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}}(t))\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\mathrm{d}t} = -\hat{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t))\,,$$

obsahuje $2r + 2$ nezávislých konstant a další neurčenou veličinou je $\hat{T}$. Ve vztazích (31) je l konstant, tedy celkem $2r + l + 3$ neznámých. K jejich stanovení máme r podmínek (31), r podmínek plynoucích ze vztahu $\hat{x}(\hat{T}) = {}^+x$ a l podmínek

$$h_1(\hat{x}(0)) = 0, \ldots, h_l(\hat{x}(0)) = 0\,.$$

K nim přistupuje předpoklad, že počáteční hodnota $x^0(0)$ je předem dána a podmínka nulovosti hamiltoniánu (29). Celkem $2r + l + 2$ podmínek. To je postačující počet rovnic, neboť k řešení úlohy je třeba míti funkci $\hat{\lambda}(t)$ určenu až na vynásobení kladnou konstantou.

V případě, že F je určena vztahy

$$(33) \qquad g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\,,$$

máme při $m < r$ k dispozici $r + l + m + 2$ podmínek, což nedostačuje. Lze však dokázat, že je splněna podmínka transverzálnosti v koncovém bodě, tj.

$$(34) \qquad (\lambda^1(\hat{T}), \ldots, \lambda^r(\hat{T})) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, \nabla g_i(\hat{x}(\hat{T}))\,.$$

(34) představuje r vztahů s m novými konstantami. Je tedy celkem $2r + l + m + 2$ rovnic k určení $2r + l + m + 3$ konstant. To je právě tolik, kolik je zapotřebí.

Příklad 3. Stejně jako v příkladě 2 budiž trajektorie soustavy určena rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x^1(t) = a\, x^1(t) - b\, u(t)\,, \quad a, b > 0\,.$$

Úkolem je převést soustavu z polohy $x_0^1 > 0$ do polohy 1 tak, aby

$$\frac{1}{2}\int_0^T [q\, x^1(t)^2 + r\, u(t)^2]\, \mathrm{d}t\,, \quad q \geqq 0\,, \quad r > 0\,,$$

byl minimální.

Vztah (29) má tvar

$$\begin{aligned} 0 &\equiv -\tfrac{1}{2}[q\, \hat{x}^1(t)^2 + r\, \hat{u}(t)^2] + \hat{\lambda}^1(t)\, [a\, \hat{x}^1(t) - b\, \hat{u}(t)] = \\ &= \max_u \{-\tfrac{1}{2}[q\, \hat{x}^1(t)^2 + r u^2] + \hat{\lambda}^1(t)\, [a\, \hat{x}^1(t) - b u]\} = \\ &= \max_u \{-\tfrac{1}{2} q\, \hat{x}^1(t)^2 + \hat{\lambda}^1(t)\, a\, \hat{x}^1(t) + b^2\, \hat{\lambda}^1(t)^2/(2r) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2} r(u + b\hat{\lambda}^1(t)/r)^2\}\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^1(t) &= b^{-2}[-ar \pm \sqrt{(a^2 r^2 + b^2 q r)}]\, \hat{x}^1(t)\,, \\ \hat{u}(t) &= b^{-1}[a \mp \sqrt{(a^2 + b^2 q/r)}]\, \hat{x}^1(t)\,. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \hat{x}^1(t) = \pm \sqrt{(a^2 + b^2 q/r)}\, \hat{x}^1(t)\,,$$

tj., označíme-li $C = \sqrt{(a^2 + b^2 q/r)}$,

$$\begin{aligned} \hat{x}^1(t) &= x_0^1 \mathrm{e}^{Ct} \quad \text{pro} \quad x_0^1 < 1\,, \\ \hat{x}^1(t) &= x_0^1 \mathrm{e}^{-Ct} \quad \text{pro} \quad x_0^1 > 1\,. \end{aligned}$$

K dosažení polohy 1 je zapotřebí doby $\hat{T} = |\ln x_0^1|/C$. Výpočtem se určí

$$\hat{\psi}(x_0) = x_0^0 \pm [q + rb^{-2}(a \mp C)^2] [(x_0^1)^{-1} - x_0^1]/(4C).$$

Vyšetřeme nyní *podmínku transverzálnosti v koncovém bodě*. Budiž $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, optimální trajektorie z $_+\mathbf{x}$ do F, odpovídající řízení $\hat{\mathbf{u}}(t)$. Potom $\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{T} - t)$ představuje trajektorii z F do $_+\mathbf{x}$ při řízení $\hat{\mathbf{v}}(t) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{T} - t)$ (v bodech spojitosti), odpovídající soustavě rovnic

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}),$$

$\hat{x}^0(\hat{T})$ je pro dané $\hat{x}^0(0)$ nejmenší hodnotou nulté souřadnice, kterou lze dosáhnout při přechodu z $_+\mathbf{x}$ do F. Je proto naopak $\hat{y}^0(\hat{T}) = \hat{x}^0(0)$ největší hodnotou, kterou lze dosáhnout při přechodu z F do $_+\mathbf{x}$ při $\hat{y}^0(0) = \hat{x}^0(\hat{T})$. $\hat{\mathbf{y}}(t)$ je tedy optimální (ve smyslu maximalizace) trajektorií z F do $_+\mathbf{x}$. Platí tedy dle věty 2

$$0 \equiv -\mathscr{H}(\hat{\mathbf{v}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{v}}(t)) = \min_{\mathbf{v} \in U} (-\mathscr{H}(\hat{\mathbf{v}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t), \mathbf{v})), \quad 0 \leqq t \leqq \hat{T},$$

$$(\hat{v}^1(0), \ldots, \hat{v}^r(0)) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \overline{\nabla} g_i(\hat{y}(0)),$$

kde $\hat{\mathbf{v}}(t)$ splňuje

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{v}}(t) = \hat{\mathbf{v}}(t) \mathbf{j}(\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{v}}(t)).$$

Odtud zpětným dosazením $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(\hat{T} - t)$, $\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{v}}(\hat{T} - t)$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \hat{\mathbf{v}}(\hat{T} - t)$ dostáváme (26), (29), (34). Poznamenejme, že z našich úvah nelze ještě bezprostředně vyvodit platnost obou podmínek transverzálnosti současně v obecné úloze převodu soustavy z I do F.

5. Úloha o nejkratším čase

V tomto odstavci si ještě všimneme jiné metody důkazu Pontrjaginova principu v úloze převedení řízeného objektu ze stavu $_+\mathbf{x}$ do stavu $^+\mathbf{x} \neq {}_+\mathbf{x}$ v nejkratším čase. Budiž $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, trajektorie v R^r, splňující

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = {}_+\mathbf{x}, \quad \hat{\mathbf{x}}(\hat{T}) = {}^+\mathbf{x},$$

a taková, že $\hat{T} \leqq T$ pro každou trajektorii $\mathbf{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, $\mathbf{x}(0) = {}_+\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(T) = {}^+\mathbf{x}$. $\hat{T}$ budiž bodem spojitosti řízení $\hat{\mathbf{u}}(t)$. Variace řízení $\hat{\mathbf{u}}(t)$:

$$^*\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t), \quad t \notin [\tau - l\varepsilon, \tau), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}, \quad t \in [\tau - l\varepsilon, \tau),$$

kde $l > 0$, $\boldsymbol{v} \in U$, $\tau < \hat{T}$ je bodem spojitosti řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, má za následek

$$(35) \qquad {}^*\boldsymbol{x}(\tau) = \hat{\boldsymbol{x}}(\tau) + l[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\tau), \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\tau), \hat{\boldsymbol{u}}(\tau))]\, \varepsilon + o(\varepsilon)\,.$$

Odtud dle lemmatu 1

$${}^*\boldsymbol{x}(\hat{T}) = {}^+\boldsymbol{x} + \delta\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{T})\, \varepsilon + o(\varepsilon)\,,$$

kde $\delta\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ je řešení

$$(36) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \delta\hat{\boldsymbol{x}}(t)\, \boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t))'\,,$$

splňující $\delta\hat{\boldsymbol{x}}(\tau) = l[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\tau), \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\tau), \hat{\boldsymbol{u}}(\tau))]$ a kde

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \left\|\frac{\partial f^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial x^j}\right\|_{i,j=1}^{r}\,.$$

Budeme rovněž uvažovat variaci času $\hat{T}$, které odpovídá změna stavu, určená vztahem

$$\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{T} - l\varepsilon) = {}^+\boldsymbol{x} - l\boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))\, \varepsilon + o(\varepsilon)\,, \quad l > 0\,.$$

Budiž K_0 množina všech $\boldsymbol{y} \in R^r$ takových, že buď $\boldsymbol{y} = {}^+\boldsymbol{x} + \delta\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{T})$ při nějaké variaci řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ nebo $\boldsymbol{y} = {}^+\boldsymbol{x} - l\boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))$, $l \geqq 0$. K_0 je kužel s vrcholem v ${}^+\boldsymbol{x}$. (${}^+\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \in K_0 \Rightarrow {}^+\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{z} \in K_0$, $\alpha \geqq 0$). Variace konce trajektorie odpovídající variaci řízení v několika bodech současně je součtem jednotlivých variací. Budiž proto

$$K = \{\boldsymbol{y} \in R^r : \boldsymbol{y} = {}^+\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_1 + \ldots + \boldsymbol{z}_n,\ {}^+\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_i \in K_0,$$
$$i = 1, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots\}\,.$$

K je opět kužel s vrcholem ${}^+\boldsymbol{x}$ a navíc je konvexní. (Platí totiž

$$\boldsymbol{y}_i = {}^+\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_i \in K\,, \quad i = 1, 2\,, \quad 0 \leqq p \leqq 1\,, \quad \Rightarrow {}^+\boldsymbol{x} + p\boldsymbol{z}_1 \in K\,,$$
$${}^+\boldsymbol{x} + (1 - p)\, \boldsymbol{z}_2 \in K \Rightarrow {}^+\boldsymbol{x} + p\boldsymbol{z}_1 + (1 - p)\, \boldsymbol{z}_2 = p\boldsymbol{y}_1 + (1 - p)\, \boldsymbol{y}_2 \in K)\,.$$

Nahlédneme, že z optimálnosti trajektorie $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ vyplývá $K \neq R^r$. Předpokládejme naopak $K = R^r$. Potom zejména

$${}^+\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T})) \in K\,.$$

$\boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))$ představuje směr tečny k trajektorii v bodě ${}^+\boldsymbol{x}$. Odtud vyplývá, že pro vhodnou (vícenásobnou) variaci řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ platí $\delta\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{T}) = \boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))$, tj.

$${}^*\boldsymbol{x}(\hat{T} - \varepsilon) = {}^*\boldsymbol{x}(\hat{T}) - \boldsymbol{f}({}^*\boldsymbol{x}(\hat{T}), \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))\, \varepsilon + o(\varepsilon) =$$
$$= {}^+\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))\, \varepsilon + o(\varepsilon) - \boldsymbol{f}({}^+\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T}))\, \varepsilon + o(\varepsilon) = {}^+\boldsymbol{x} + o(\varepsilon)\,.$$

To znamená, že nová trajektorie se v čase $\hat{T} - \varepsilon$ přiblíží k ${}^+\boldsymbol{x}$ na vzdálenost řádu

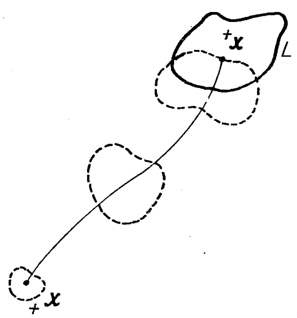
$o(\varepsilon)$. Lze tedy nevelkou změnou variace trajektorie docílit, že bude ${}^{+}\boldsymbol{x}$ dosaženo již před časem $\hat{T}$.

Přesný důkaz postupuje v podstatě takto: Budiž C kulová plocha v R^r o poloměru 1 se středem v 0. Dle předpokladu je ${}^{+}\boldsymbol{x} + C \subset K$. Ke každému $\boldsymbol{c} \in C$ existuje proto variace řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ tak, že o příslušné trajektorii platí

$$ {}^{*}\boldsymbol{x}_c(\hat{T} - l_c\varepsilon) = {}^{+}\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{c} + o(\varepsilon)\,. $$

Lze docílit, že ${}^{*}\boldsymbol{x}_c(t)$ je spojitou funkcí $(\boldsymbol{c}, t)$, l_c spojitou funkcí $\boldsymbol{c}$ a že $o(\varepsilon)$ platí stejnoměrně vzhledem k $\boldsymbol{c} \in C$. Pro ε dostatečně malé (v dalším zvolené pevně), je tedy ${}^{+}\boldsymbol{x}$ uvnitř oblasti, ohraničené plochou

$$ L = \{{}^{*}\boldsymbol{x}_c(\hat{T} - l_c\varepsilon) : \boldsymbol{c} \in C\}\,. $$



Obr. 8.

Zaveďme pomocný parametr σ, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, a označme

$$ L = \{{}^{*}\boldsymbol{x}_c(\sigma(\hat{T} - l_c\varepsilon)) : \boldsymbol{c} \in C\}\,. $$

L_σ, které je na obr. 8 vyznačeno čárkovaně, se mění spojitě v závislosti na σ a je $L_0 = \{{}_{+}\boldsymbol{x}\}$. Tedy pro nějaké $0 < \sigma' < 1$ je ${}^{+}\boldsymbol{x} \in L_{\sigma'}$, tj. ${}^{*}\boldsymbol{x}_c(T) = {}^{+}\boldsymbol{x}$ pro nějaké $\boldsymbol{c} \in C$, kde $T = \sigma'(\hat{T} - l_c\varepsilon) < \hat{T}$. To je spor s minimálností $\hat{T}$. Tímto sporem je dokázáno, že platí $K \neq R^r$.

K je konvexní kužel s vrcholem v ${}^{+}\boldsymbol{x}$ různý od celého prostoru. Existuje tedy v R^r nadrovina Π, procházející bodem ${}^{+}\boldsymbol{x}$ taková, že K leží v jednom z poloprostorů nadrovinou Π vymezených. Označme $\boldsymbol{v}$ směr normály k Π, tj.

$$ \Pi = \{\boldsymbol{x} \in R^r : \boldsymbol{x} = {}^{+}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\,;\ \ \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{y} = 0\}\,. $$

$\boldsymbol{v}$ nechť směřuje do poloprostoru, který K neobsahuje. Potom platí ${}^{+}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in K \Rightarrow$ $\Rightarrow \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{y} \leqq 0$. Zejména tedy

$$ \boldsymbol{v} \,.\, \delta\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{T}) \leqq 0 \tag{37} $$

při každé variaci dle (35) a

$$-\boldsymbol{v} \, . \boldsymbol{f}({}^{+}\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T})) \leqq 0 \,. \tag{38}$$

Uvažujme řešení soustavy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{\lambda} = -\hat{\lambda} j(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \,, \tag{39}$$

splňující $\hat{\lambda}(\hat{T}) = \boldsymbol{v}$. Zaveďme dále hamiltonián $H(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), \boldsymbol{u})$, kde $H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda} \, . \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$. Z lemmatu 2 vyplývá s ohledem na (36), (37), že pro každou variaci dle (35) platí

$$\hat{\lambda}(t) \, . \, \delta\hat{x}(t) \equiv \text{const} = \hat{\lambda}(\hat{T}) \, . \, \delta\hat{x}(\hat{T}) \leqq 0 \,.$$

Odtud

$$\hat{\lambda}(\tau) \, . \, [f(\hat{x}(\tau), v) - f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] \leqq 0 \,,$$

neboli

$$H(\hat{\lambda}(\tau), \hat{x}(\tau), v) \leqq H(\hat{\lambda}(\tau), \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) \tag{40}$$

v každém bodě spojitosti řízení $\hat{u}(t)$. Platnost (40) se snadno rozšíří na všechna $t \in [0, \hat{T}]$.

Dokázali jsme toto tvrzení: Je-li $\hat{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, optimální trajektorie, potom existuje nenulové řešení $\hat{\lambda}(t)$ soustavy (39) takové, že

$$H(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t) \, \hat{u}(t)) = \max_{v \in U} H(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), v) \,, \quad 0 \leqq t \leqq \hat{T} \,, \tag{41}$$

a

$$H(\hat{\lambda}(\hat{T}), \hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T})) \geqq 0 \,. \tag{42}$$

Nerovnost (42) plyne z (38). Poznamenejme, že dle lemmatu 3 je $H(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv \equiv \text{const}$.

6. Pontrjaginův princip

Formulujme nyní *Pontrjaginův princip* vcelku jako větu. Přitom stejně jako v odstavci 4 budeme uvažovat trajektorii v prostoru R^{r+1}.

Věta 3. *Budiž $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, optimální trajektorie z I do F, odpovídající řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$. Označme $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda} \, . \, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$. Potom existuje nenulové řešení $\hat{\lambda}(t)$ soustavy*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{\lambda} = -\hat{\lambda} \, j(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t)) \tag{43}$$

tak, že platí

$$0 \equiv \mathscr{H}(\hat{\lambda}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t)) = \max_{\boldsymbol{u} \in U} \mathscr{H}(\hat{\lambda}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}) \,, \quad 0 \leqq t < T \,, \tag{44}$$

(45) $$\lambda^0(t) \equiv \text{const} \leqq 0\,,$$

(46) $$(\hat{\lambda}^1(0), \ldots, \hat{\lambda}^r(0)) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, \nabla h_i(\hat{x}(0))\,,$$

(47) $$(\hat{\lambda}^1(\hat{T}), \ldots, \hat{\lambda}^r(\hat{T})) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, \nabla g_i(\hat{x}(\hat{T}))\,.$$

Řízení a trajektorie, splňující nutné podmínky obsažené ve větě 3, budeme nazývat *extrémálními*. Používání Pontrjaginova principu spočívá ve stanovení všech extrémálních řízení a ve zjištění, která z extrémálních řízení jsou optimální.

Všimněme si nyní *neautonomních soustav*. Jak bylo již uvedeno v poznámce 2, princip maxima se v neautonomním případě

(48) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

odvodí převedením na případ autonomní. Přitom se čas považuje za stavovou souřadnici $t = x^{r+1}$, tj. $\mathrm{d}x^{r+1}/\mathrm{d}t \equiv 1$, $x^{r+1}(0) = t_0$. Budiž $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, $0 \leqq t \leqq \hat{T}$, optimální trajektorie z I do F, vyhovující soustavě (48) při řízení $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$. Označme

$$\mathscr{H}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda} \,.\, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\,, \quad \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \left\| \frac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial x^j} \right\|_{i,j=0}^{r}.$$

Z věty 3 vyplývá, že existuje nenulové řešení $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\lambda}^{r+1}(t))$ soustavy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\lambda}} = -\hat{\boldsymbol{\lambda}}\,\boldsymbol{j}(t, \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t))\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\lambda}^{r+1} = -\sum_{k=0}^{r} \hat{\lambda}^k \frac{\partial}{\partial t} f^k(t, \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t))\,,$$

tak, že platí

$$0 \equiv \mathscr{H}(t, \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t)) + \hat{\lambda}^{r+1}(t) = \max_{\boldsymbol{u}\in U} \mathscr{H}(t, \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}) + \hat{\lambda}^{r+1}(t)\,.$$

(45)–(47) zůstávají v platnosti. Jelikož však $x^{r+1}(\hat{T}) = \hat{T} + t_0$ je neurčeno, přistupuje podmínka transverzálnosti $\hat{\lambda}^{r+1}(\hat{T}) = 0$. Je tedy

$$\hat{\lambda}^{r+1}(t) = \int_t^{\hat{T}} \sum_{k=0}^{r} \hat{\lambda}^k(s) \frac{\partial}{\partial s} f^k(s, \hat{\boldsymbol{x}}(s), \hat{\boldsymbol{u}}(s))\,\mathrm{d}s\,,$$

a proto $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\lambda}^{r+1}(t))$ je jen tehdy nenulové, je-li $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ nenulové. Docházíme k závěru, že v neautonomním případě je třeba (44) nahraditi vztahem

(49) $$\mathscr{H}(t, \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{u}}(t)) = \max_{\boldsymbol{u}\in U} \mathscr{H}(t, \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}) =$$
$$= -\int_t^{\hat{T}} \sum_{k=0}^{r} \hat{\lambda}^k(s) \frac{\partial}{\partial s} f^k(s, \hat{\boldsymbol{x}}(s), \hat{\boldsymbol{u}}(s))\,\mathrm{d}s\,, \quad 0 \leqq t < \hat{T}\,.$$

Příklad 4 (E. Zermelo). Loď, unášená proudem rychlosti s, jehož směr budeme ztotožňovati s kladným směrem osy x^1, se může pohybovat vzhledem k proudu rychlostí nejvýš rovnou jedné v libovolném směru. Úkolem je dopravit loď z výchozího bodu, zvoleného za počátek souřadnic $({}_+\boldsymbol{x} = (0, 0))$, do bodu ${}^+\boldsymbol{x} = ({}^+x^1, {}^+x^2)$ v nejkratším čase. Parametrem řízení je vektor $\boldsymbol{u}$ rychlosti lodi vzhledem k proudu. Platí tedy

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 \leqq 1 .$$

Rovnice trajektorie jsou

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = s + u^1 , \quad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = u^2 .$$

Budeme postupovat podle odstavce 5. Máme

$$H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \lambda^1(s + u^1) + \lambda^2 u^2 ,$$

odkud

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\lambda}^i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = 0 , \quad i = 1, 2 .$$

Je proto $\hat{\lambda}^i \equiv \text{const}$, $i = 1, 2$. Řízení, maximalizující hamiltonián, je $\hat{\boldsymbol{u}} \equiv \hat{\boldsymbol{\lambda}}/\|\hat{\boldsymbol{\lambda}}\|$. Vidíme, že extrémální trajektorie jsou přímočaré. Je-li $s < 1$, může loď dosáhnout libovolného bodu ${}^+\boldsymbol{x} \in R^2$. Je-li $s \geqq 1$, lze dosáhnout pouze těch ${}^+\boldsymbol{x} \in R^2$, pro něž platí

$${}^+x^1 > 0 , \quad -(s^2 - 1)^{-1/2} \leqq {}^+x^2/{}^+x^1 \leqq (s^2 - 1)^{-1/2} .$$

Příklad 5 – soustava, pohybující se na přímce při působení síly omezené velikosti. Rovnice pro trajektorii jsou

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = x^2 , \quad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = u , \quad |u| \leqq 1 .$$

Úkolem je převést soustavu z počátečního stavu ${}_+\boldsymbol{x}$ do stavu ${}^+\boldsymbol{x} = (0, 0)$ v nejkratším čase. Máme

$$H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, u) = \lambda^1 x^2 + \lambda^2 u .$$

Soustava rovnic (39) má tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\lambda}^1 \equiv 0 , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\lambda}^2 = -\hat{\lambda}^1 ,$$

odkud $\hat{\lambda}^1(t) \equiv c_1$, $\hat{\lambda}^2(t) \equiv c_2 - c_1 t$. Vidíme, že bude $\hat{u}(t) = 1$ pro $\hat{\lambda}^2(t) > 0$ a $\hat{u}(t) = -1$ pro $\hat{\lambda}^2(t) < 0$. Přitom vzhledem k lineárnosti $\hat{\lambda}^2(t)$ k přepnutí dojde nejvýš jedenkrát.

Všimněme si soustav rovnic

$$(50)\qquad \frac{dx^1}{dt} = x^2\,,\quad \frac{dx^2}{dt} = 1\,;\quad \frac{dx^1}{dt} = x^2\,,\quad \frac{dx^2}{dt} = -1\,.$$

Jejich řešením je

$$x^2(t) = \pm(t - t_0) + x^2(t_0)\,,$$

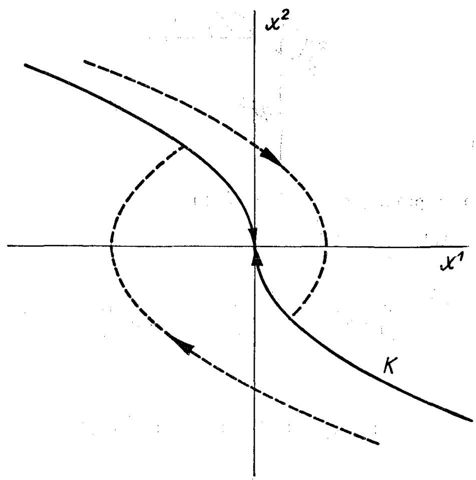
$$x^1(t) = \pm\tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 + (t - t_0)\,x^2(t_0) + x^1(t_0)\,.$$

Odtud

$$x^1(t) = \pm\tfrac{1}{2}x^2(t)^2 \mp \tfrac{1}{2}x^2(t_0)^2 + x^1(t_0)\,.$$

Trajektoriemi jsou tedy paraboly. Má-li trajektorie, příslušející některé ze soustav (50), procházeti počátkem, musí být

$$(51)\qquad \begin{aligned} x^1(t_0) &= \tfrac{1}{2}x^2(t_0)^2\,,\quad x^2(t_0) \leqq 0\,,\quad \text{nebo} \\ x^1(t_0) &= -\tfrac{1}{2}x^2(t_0)^2\,,\quad x^2(t_0) \geqq 0\,. \end{aligned}$$



Obr. 9.

Vidíme, že extrémální trajektorie mají tento průběh: Je-li $\hat{x}(t)$ nad křivkou K určenou vztahy (51) je $\hat{u}(t) = -1$, je-li $\hat{x}(t)$ pod K, je $\hat{u}(t) = 1$. Po dosažení křivky K trajektorií dojde ke změně parametru řízení a trajektorie se pohybuje po K do bodu $(0, 0)$ (viz obr. 9). Tím je extrémální řízení vyjádřeno v závislosti na poloze řízené soustavy (zpětná vazba).

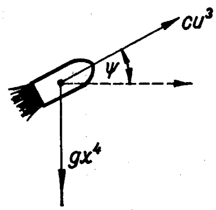
Příklad 6 (G. Leitmann) – maximální dolet rakety s omezeným tahem při zanedbání aerodynamických vlivů. Buďtež x^0, x^1 vodorovná a svislá souřadnice polohy rakety. (Předpokládá se, že let probíhá ve svislé rovině.) Dále buďtež x^2, x^3 souřadnice rychlosti rakety, x^4 její hmota. Parametry řízení jsou u^1, u^2 – kosinus a sinus směru tahu, u^3 – rychlost průtoku paliva. Platí

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1 \,, \quad 0 \leqq u^3 \leqq \bar{u}^3 \,.$$

g bude značit velikost gravitačního zrychlení, c efektivní výfukovou rychlost. Úkolem je převést raketu z počátečního stavu ${}_{+}\boldsymbol{x}$ do množiny stavů

$$F = \{x : x^1 = {}^{+}x^1, \; x^4 = {}^{+}x^4\} \tag{52}$$

tak, aby $x^0(T)$ bylo maximální. V (51) hodnota ${}^{+}x^1$ určuje výšku, ve které je třeba maximálního doletu dosáhnouti, ${}^{+}x^4$ pak je hmota rakety bez pohonných látek.



Obr. 10.

Soustava rovnic pro trajektorii je (viz obr. 10):

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = x^2 \,, \quad \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = x^3 \,, \tag{53}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{x^4} u^1 u^3 \,, \quad \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{x^4} u^2 u^3 - g \,, \quad \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}t} = -u^3 \,.$$

Dále máme

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \lambda^0 x^2 + \lambda^1 x^3 + \lambda^2 \frac{c}{x^4} u^1 u^3 +$$

$$+ \lambda^3 \left(\frac{c}{x^4} u^2 u^3 - g \right) - \lambda^4 u^3 = \left[\frac{c}{x^4} (\lambda^2 u^1 + \lambda^3 u^2) - \lambda^4 \right] u^3 +$$

$$+ \lambda^0 x^2 + \lambda^1 x^3 - \lambda^3 g \,.$$

Jelikož cílem je maximalizace $x^0(T)$, za extrémální se považují ta řízení, která hamiltonián minimalizují. Rovnice pro Lagrangeovy násobitele jsou

(54)
$$\frac{d\hat{\lambda}^0}{dt} = 0 = \frac{d\hat{\lambda}^1}{dt}, \quad \frac{d\hat{\lambda}^2}{dt} = -\hat{\lambda}^0,$$

$$\frac{d\hat{\lambda}^3}{dt} = -\hat{\lambda}^1, \quad \frac{d\hat{\lambda}^4}{dt} = \frac{c}{(\hat{x}^4)^2}(\hat{\lambda}^2\hat{u}^1 + \hat{\lambda}^3\hat{u}^2)\,\hat{u}^3.$$

Podmínky transverzálnosti mají tvar

$$\hat{\lambda}^2(\hat{T}) = 0 = \hat{\lambda}^3(\hat{T}).$$

Odtud

$$\hat{\lambda}^0(t) \equiv \text{const}, \quad \hat{\lambda}^1(t) \equiv \text{const},$$

$$\hat{\lambda}^2(t) = (\hat{T} - t)\,\hat{\lambda}^0, \; \hat{\lambda}^3(t) = (\hat{T} - t)\,\hat{\lambda}^1.$$

Není obtížné ověřit, že vztah $\hat{\lambda}^0 \equiv 0 \equiv \hat{\lambda}^1$ má za následek $\hat{\lambda}(t) \equiv 0$, zatímco dle předpokladu $\hat{\lambda}(t)$ má být nenulové. Hamiltonián je minimalizován při

$$\hat{u}^1(t) = \frac{-\hat{\lambda}^2(t)}{\sqrt{[\hat{\lambda}^2(t)^2 + \hat{\lambda}^3(t)^2]}} \equiv \frac{-\hat{\lambda}^0}{\sqrt{[(\hat{\lambda}^0)^2 + (\hat{\lambda}^1)^2]}},$$

$$\hat{u}^2(t) = \frac{-\hat{\lambda}^3(t)}{\sqrt{[\hat{\lambda}^2(t)^2 + \hat{\lambda}^3(t)^2]}} \equiv \frac{-\hat{\lambda}^1}{\sqrt{(\hat{\lambda}^0)^2 + (\hat{\lambda}^1)^2]}}.$$

Směr extrémálního tahu je tedy konstantní. Všimněme si $\hat{u}^3(t)$. Označme

$$\sigma(t) = \frac{c}{\hat{x}^4(t)}(\hat{\lambda}^2(t)\,\hat{u}^1 + \hat{\lambda}^3(t)\,\hat{u}^2) - \hat{\lambda}^4(t) =$$

$$= \frac{c}{\hat{x}^4(t)}(-\sqrt{[(\hat{\lambda}^0)^2 + (\hat{\lambda}^1)^2]}\,(\hat{T} - t)) - \hat{\lambda}^4(t).$$

Platí

$$\hat{u}^3(t) = \bar{u}^3 \quad \text{je-li} \quad \sigma(t) < 0, \quad \hat{u}^3(t) = 0 \quad \text{je-li} \quad \sigma(t) > 0.$$

S použitím (54) se vypočte

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{c}{\hat{x}^4(t)}\sqrt{[(\hat{\lambda}^0)^2 + (\hat{\lambda}^1)^2]}.$$

Vidíme, že $\sigma(t)$ je rostoucí. Je tedy

$$\hat{u}^3(t) = \bar{u}^3 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq t < T', \quad \hat{u}^3(t) = 0 \quad \text{pro} \quad T' \leqq t \leqq \hat{T}.$$

Okamžik přepnutí T' se určí ze zřejmého vztahu

$$\bar{u}^3 T' = {}_{+}x^4 - {}^{+}x^4.$$

Zbývá stanoviti směr extrémálního tahu. Musí být $\hat{\lambda}^0 \neq 0$. ($\hat{\lambda}^0 = 0 \Rightarrow \hat{u}^1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{x}^0(t) \equiv {}_+x^0$, což zřejmě není optimální.) Ze vztahu

$$0 = \mathscr{H}(\hat{\lambda}(\hat{T}), \hat{\boldsymbol{x}}(\hat{T}), \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{T})) = \hat{\lambda}^0 \hat{x}^2(\hat{T}) + \hat{\lambda}^1 \hat{x}^3(\hat{T})$$

dostáváme pro úhel $\hat{\psi}$ extrémálního tahu

$$\operatorname{tg} \hat{\psi} = -\hat{x}^2(\hat{T})/\hat{x}^3(\hat{T}).$$

Integrací třetí a čtvrté z rovnic (53) na intervalu $[T', \hat{T}]$ se dostane

$$\hat{x}^2(\hat{T}) = \hat{x}^2(T'), \quad \hat{x}^3(\hat{T}) = \hat{x}^3(T') - g(\hat{T} - T').$$

Úpravou druhé rovnice za použití vztahu

$$\hat{x}^3(T')(\hat{T} - T') - \tfrac{1}{2}g(\hat{T} - T')^2 = {}^+x^1 - x^1(T'),$$

vyplývá

$$\hat{x}^3(\hat{T}) = -[\hat{x}^3(T')^2 + 2g(x^1(T') - {}^+x^1)]^{1/2}.$$

Z příslušných rovnic soustavy (53) dále obdržíme

$$\hat{x}^2(T') = {}_+x^2 + c(\cos \hat{\psi}) \ln \frac{{}_+x^4}{{}^+x^4},$$

$$\hat{x}^3(T') = {}_+x^3 + c(\sin \hat{\psi}) \ln \frac{{}_+x^4}{{}^+x^4} - gT',$$

$$\hat{x}^1(T') = {}_+x^1 + c(\sin \hat{\psi}) \int_0^{T'} \left(\ln \frac{{}_+x^4}{{}_+x^4 - \bar{u}^3 t} \right) dt - \tfrac{1}{2}gT'^2.$$

Tato soustava rovnic spolu s předchozími může sloužiti k numerickému výpočtu $\hat{\psi}$.

Příklad 7 (J. S. Meditch) – přistání rakety. Budiž $y(t)$ hodnota vertikální souřadnice rakety v čase t, $m(t)$ její hmota, $g = \text{const}$ gravitační zrychlení. Počáteční poloha rakety budiž $y(0) = {}_+x^1 > 0$ počáteční rychlost $(d/dt)\, y(0) = {}_+x^2 < 0$. $m(0) - m(t)$ představuje spotřebu paliva do doby t. Pohonná soustava rakety může vytvářet tah působící v kladném směru souřadnice y. Jedinou další silou, působící na raketu, je její vlastní váha mg (viz obr. 11). Velikost tahu je dána součinem $-k\, dm/dt$, kde $k > 0$ je rychlost výfukových plynů vzhledem k raketě. Pohyb rakety je tedy popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\frac{dm}{dt} - g. \tag{55}$$

dm/dt může nabývat hodnot z intervalu $[-\omega, 0]$, kde $\omega > 0$. Úkolem je přivést raketu do stavu $y(T) = 0$, $dy(T)/dt = 0$ s nejmenší celkovou spotřebou paliva $m(0) - m(T)$.

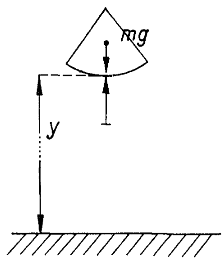
Integrací (55) dostáváme

$$-{}_{+}x^2 = \frac{d}{dt}\,y(T) - \frac{d}{dt}\,y(0) = -k \ln\left(m(T)/m(0)\right) - gT\,.$$

Odtud

$$m(0) - m(T) = m(0)\left[1 - \exp\left\{\frac{{}_{+}x^2 - gT}{k}\right\}\right].$$

Vidíme, že spotřeba paliva je nejmenší, je-li čas, potřebný k přistání rakety nejkratší.



Obr. 11.

Chápejme raketu jako soustavu, jejíž stav je charakterizován souřadnicemi (x^1, x^2, x^3), kde $x^1(t) = y(t)$, $x^2(t) = dy(t)/dt$, $x^3(t) = m(t)$. Pohybové rovnice jsou

$$\frac{d}{dt}\,x^1 = x^2\,, \quad \frac{d}{dt}\,x^2 = -\frac{k}{x^3}\,u - g\,, \quad \frac{d}{dt}\,x^3 = u\,. \tag{56}$$

$u = dm/dt$ představuje parametr řízení, nabývající hodnot z $U = [-\omega, 0]$. Úlohou je převést soustavu z počátečního stavu ${}_{+}\boldsymbol{x}$ do množiny $F = \{\boldsymbol{x} : x^1 = 0,\ x^2 = 0\}$ v nejkratším čase. Máme

$$H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, u) = \lambda^1 x^2 - \lambda^2\left(\frac{k}{x^3}\,u + g\right) + \lambda^3 u = \lambda^1 x^2 - \lambda^2 g + h(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})\,u\,,$$

kde

$$h(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}) = \lambda^3 - \lambda^2 k/x^3\,.$$

Pro extrémální trajektorii $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ a jí příslušející řízení musí platit

$$H(\boldsymbol{\lambda}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} H(\boldsymbol{\lambda}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), u) \geqq 0\,,$$

tj. $\hat{u}(t) = 0$ při $\hat{h}(t) = h(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t)) > 0$, $\hat{u}(t) = -\omega$ při $\hat{h}(t) < 0$. Přitom

$$\frac{d}{dt}\hat{\lambda}^1 = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\hat{\lambda}^2 = -\hat{\lambda}^1\,, \quad \frac{d}{dt}\hat{\lambda}^3 = -\hat{\lambda}^2 \frac{k\hat{u}(t)}{(\hat{x}^3(t))^2}\,. \tag{57}$$

V koncovém bodě musí být splněna podmínka transverzálnosti $\hat{\lambda}^3(\hat{T}) = 0$.

S použitím (56), (57) dostáváme $(d/dt)\,\hat{h}(t) = \hat{\lambda}^1 k/\hat{x}^3(t)$. $\hat{h}(t)$ je tedy monotonní funkcí t. Při extrémálním řízení je proto po určité době volného pádu rakety spuštěn plný brzdící pohon až do jejího zastavení. (Případ, kdy je pohon spuštěn trvale se nevylučuje.) Řízení, spočívající v opačném postupu, odporují fyzikálnímu smyslu úlohy.

Budeme se snažit provést syntézu řízení. Brzdění bude v činnosti ve stavech $\tilde{x}$, majících tuto vlastnost: Raketa vycházející z $\tilde{x}$ má při plném brzdění ve výšce 0 rychlost 0. Při úplném brzdění platí

$$\frac{d}{dt}x^1 = x^2\,, \quad \frac{d}{dt}x^2 = \frac{k\omega}{x^3} - g\,, \quad \frac{d}{dt}x^3 = -\omega\,.$$

Odtud

$$x^3(t) = \tilde{x}^3 - \omega t\,, \quad x^2(t) = \tilde{x}^2 - k\ln\left(1 - \frac{\omega t}{\tilde{x}^3}\right) - gt\,,$$

$$x^1(t) = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 t + \frac{k\tilde{x}^3}{\omega}\left(1 - \frac{\omega t}{\tilde{x}^3}\right)\ln\left(1 - \frac{\omega t}{\tilde{x}^3}\right) + kt - \tfrac{1}{2}gt^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}gt^2 + \left(k - \frac{\tilde{x}^3 g}{\omega}\right)t + \tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^2\tilde{x}^3}{\omega} + \left(t - \frac{\tilde{x}^3}{\omega}\right)x^2(t)\,.$$

Označíme-li T okamžik dosažení výšky nula, dostáváme vztahy

$$0 = \tilde{x}^2 - k\ln\left(1 - \frac{\omega T}{\tilde{x}^3}\right) - gT\,, \tag{58}$$

$$0 = \tfrac{1}{2}gT^2 + \left(k - \frac{\tilde{x}^3 g}{\omega}\right)T + \tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^2\tilde{x}^3}{\omega}\,. \tag{59}$$

Vypočtením T z (59) a dosazením do (58) obdržíme pro oblast brzdění vztah tvaru $B(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) = 0$.

LITERATURA

R. Aris: The Optimal Design of Chemical Reactors. New York, Londýn 1961.

R. Bellman: Dynamic Programming. Princeton N. J. 1957.

R. Bellman, S. E. Dreyfus: Applied Dynamic Programming. Princeton N. J. 1962.

В. Т. Болтянский: Математические методы оптимального управления. Moskva 1966.

M. M. Connors, D. Teichroew: Optimal Control of Dynamic Operations Research Models. Pennsylvania 1967.

L. T. Fan, C. S. Wang: The Discrete Maximum Principle. New York, Londýn, Sydney 1964.

H. Halkin: A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations. SIAM Journal on Control *4* (1966), 90—111.

G. Leitmann: An Introduction to Optimal Control. New York, Toronto, Londýn 1966.

P. Mandl: Řízené Markovovy řetězce. Kybernetika *6* (1969), příloha, 1—74.

J. S. Meditch: The Pontryagin Maximum Principle and some of its applications. Advances in Control Systems *1* (1964), 55—74.

Л. С. Понтрягин, В. Т. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко: Математическая теория оптимальных процессов. Moskva 1961.

D. J. Wilde, C. S. Beightler: Foundations of Optimization. Englewood Cliffs N. J. 1967.