KYBERNETIKA — ТОМ 8 (1972), ВЫПУСК 4

Нумерический метод спектральной факторизации полиномов

Зденек Востры

Задачей статьи описать выведение нового метода спектральной факторизации. Всё, что будет в дальнейшем сказано, касается дискретных передаточных функций.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A(z)$ функция комплексной переменной z, симметрическая по окружности $|z| = 1$. Это значит, что $A(z) = A(z^{-1})$. Потом разложение $A(z) = \Phi^+\Phi^-$, (где Φ^+ содержит все нули и полюсы лежащие внутри окужности $|z| = 1$; Φ^- содержит все нули и полюсы лежащие вне окружности $|z| = 1$) назовём спектральной факторизацией функции $A(z)$.

Очевидно будут

$$\Phi^+(z) = \bar{\Phi}^-(z) = \Phi^-(z^{-1})$$

где $\bar{}$ значит подставить z вместо z^{-1}. В дальнейшем $A(z)$ будет симметрический полином.

Метод спектральной факторизации выводим на основе регулировки статической системы по минимуму квадратичной площади.

Такую систему можно в Z трансформации записать при условии конечной памяти таким образом, что

$$S = s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \ldots + z^{-k-1} s_{k+1} . \tag{1}$$

Введём обозначение величин: S — система, X — выходная величина, Y — входная величина.

Замечание 1. Если регулированная статическая система имеет конечную память, то разностное уравнение для входной величины является правилом, как из прошедших входных величин конечного числа и з требований предъявленных к выходной величине вычислить новую входную величину.

Пусть система находится в начальном состоянии данном последовательностью прошедших входных величин системы. В двухсторонней Z трансформации можем начальные условия написать таким образом:

$$Y^{-} = \sum_{i=1}^{k} Y_{-i} z^{i} .$$

Пусть требуемая выходная величина равна нулю.

По замечанию 1 достаточно вычислить y_0 в зависимости от

$$y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-k} .$$

В двухсторонней Z трансформации можем писать

$$X = SY + SY^{-} . \tag{2}$$

Решение задачи об управлении выходной величины на ноль по минимуму квадратной площади сделаем классическим методом и потом приблизительно.

Критерий

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X\bar{X} z^{-1} \, dz , \tag{3}$$

где Γ окружность $|z| = 1$.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МИНИМАЛИЗАЦИИ (3)

Подставляя выражение (2) в уравнение (3), получим условие минимума с помощью первой производной по $\bar{Y}$, как показано в [1].

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{Y}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} S\bar{S}(Y - Y^{-}) z^{-1} \, dz = 0 . \tag{4}$$

Условие (4) выполним, когда $S\bar{S}(Y - Y^{-}) z^{-1}$ будет функция регулярная внутри Γ.

Вместе с (1.4) нужно выполнить условия реализуемости и стабильности Y.

Пусть, согласно с определением

$$S\bar{S} = A = \Phi^{+}\Phi^{-} , \tag{5}$$

$$z^{-1}\Phi^{+}\Phi^{-}(Y + Y^{-}) = \Lambda , \tag{6}$$

где Λ функция регулярная внутри Γ.

Отсюда, как известно, вытекает формула

$$Y = \frac{-z}{\Phi^+}\left[\frac{\Phi^+ Y^-}{z}\right]_+, \tag{7}$$

где $[\ ]_+$ значит расщепление

$$\frac{\Phi^+ Y^-}{z} = \left[\frac{\Phi^+ Y^-}{z}\right]_+ + \left[\frac{\Phi^+ Y^-}{z}\right]_- .$$

$[\ ]_+$ содержит полюсы, лежащие внутри Γ. $[\ ]_-$ содержит полюсы, лежащие вне Γ.

В выражение (7) можно подставлять $q \,.\, \Phi^+$ вместо Φ^+, q реальный коэффициент, и Y не изменяется.

То можно написать новое Φ^+ в виде

$$\Phi^+ = 1 + z^{-1}\varphi_1 + z^{-2}\varphi_2 + \ldots + z^{-k}\varphi_k , \tag{8}$$

где $1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ называют коэффициентами факторизованного полинома S.

Уравнение (5) изменяется в

$$S\bar{S} = q^2 \,.\, \Phi^+\Phi^- .$$

Если подставим (1) и (8) в (7), то

$$Y = -z(1 + \varphi_1 z^{-1} + \ldots + \varphi_k z^{-k})^{-1} \,.$$

$$.\, [(1 + \varphi_1 z^{-1} + \ldots + \varphi_k z^{-k})(y_{-1}z + y_{-2}z^2 + \ldots + y_{-k}z^k)\, z^{-1}]_+ ,$$

$$Y = -z(1 + z^{-1}\Theta) \,.$$

$$.\, [(1 + \varphi_1 z^{-1} + \ldots + \varphi_k z^{-k})(y_{-1}z + y_{-2}z^2 + \ldots + y_{-k}z^k)\, z^{-1}]_+ ,$$

где $(1 + z^{-1}\Theta) = (1 + \varphi_1 z^{-1} + \ldots + \varphi_k z^{-k})^{-1}$.

Теперь не трудно показать, что

$$y_0 = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_j y_{-j} \,. \tag{9}$$

По замечанию 1 можно написать возвратное уравнение для управления на ноль выходной величины.

$$y_i = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_i y_{i-k} \,. \tag{10}$$

Известно, что рассматриваемая система управляется на ноль выходной величины таким образом, что входная величина стремится к нулю.

Можно сказать, что к $\varepsilon > 0$ существует целое N, так что для $i > N$, будет $|y_i| < \varepsilon$.

Это значит, что критерий (3) является функцией конечного числа входных величин с небольшой ошибкой, которая с увеличением N стремится к нулю.

Отсюда

$$I = I(y_0, y_1, \ldots, y_N)\,. \tag{11}$$

Условия минимума (11)

$$\frac{\partial I}{\partial y_r} = 0\,, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, N\,. \tag{12}$$

Подставив (3) в (12), получим

$$\frac{\partial I}{\partial y_r} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} S\bar{S}\,.\,\frac{\partial}{\partial y_r}\left((Y + Y^-)\,.\,(\bar{Y} + \bar{Y}^-)\right) z^{-1}\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

отсюда следует условие

$$\frac{\partial I}{\partial y_r} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} S\bar{S}(Y + Y^-)\, z^{r-1}\,\mathrm{d}z = 0\,, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, N\,. \tag{13}$$

Теперь распишем подынтегральное выражение

$$S\bar{S} = a_0 + a_1(z + z^{-1}) + \ldots + a_k(z^k + z^{-k})\,, \tag{14}$$

где

$$a_i = \sum_{j=1}^{k-i+1} s_j\,.\,s_{i+j}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k\,. \tag{15}$$

Подставив (14) и (15) в (13), получим после интегрирования для $r = 0$ уравнение

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_r y_r + a_1 y_{-1} + a_2 y_{-2} + \ldots + a_r y_{-r} = 0\,,$$

для $r = 1$

$$a_1 y_0 + a_0 y_1 + a_1 y_2 + \ldots + a_r y_{r+1} + a_2 y_{-1} + a_3 y_{-2} + \ldots + a_r y_{-r+1} = 0$$

и т. д.

Все уравнения (13) можно написать в матричной форме

$$
(16)\qquad
\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_r & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & & & \ddots & & & \vdots\\
a_r & & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\
0 & \ddots & & \ddots & & & \ddots & 0\\
\vdots & & \ddots & & \ddots & & & \\
0 & \cdots & 0 & a_r & \cdots a_1 & a_0 & a_1 \cdots & a_r
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_r\\ y_{r+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ y_{N+k}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_r\\
a_2 & a_3 & \cdots & a_r & 0\\
\vdots & & ⋰ & ⋰ & \vdots\\
a_r & ⋰ & & & \vdots\\
0 & & & & \vdots\\
\vdots & & & & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_{-1}\\ y_{-2}\\ \vdots\\ \vdots\\ y_{-r}
\end{bmatrix}
= 0
$$

Система уравнений (16) не имеет решения, потому что число неизвестных y_i больше числа уравнений.

Но мы знаем, что для достаточно больших N справедливо

$$|y_{N+i}| < \varepsilon\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

То добавим к уравнениям (16) условия

$$y_{N+i} = 0\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Явно, что это условие вызывает ошибку, которая для $N \to \infty$ стремится к нулю.

Обозначим

$$
(17)\qquad
\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_r & 0 & \cdots & 0\\
a_1 & a_0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0\\
a_r & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_r\\
0 & & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & a_1\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & a_r & \cdots a_1 & a_0
\end{bmatrix}
= \mathbf{A}
$$

и уравнение (16) изменится в

$$\mathbf{AY} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{Y}^{-} = \mathbf{0}\,.$$

Мы хотим из (18) вычислимь только y_0, из этого следует, что достаточно вычислить первую строку матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Обозначим её

$$\overline{\mathbf{M}} = [m_1 \;\; m_2 \ldots m_N]\,.$$

Из формы матрицы $\overline{\mathbf{B}}$ вытекает, что достаточно вычислить только часть первой строки $\mathbf{A}^{-1}$

(19) $$\mathbf{M} = [m_1 \;\; m_2 \ldots m_k]$$

и

(20) $$y_0 = -[m_1 \;\; m_2 \ldots m_k] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_2 & \cdots & a_k & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_{-2} \\ \vdots \\ y_{-k} \end{bmatrix}$$

в сокращенной форме

(21) $$y_0 = -\mathbf{MBY}^{-} .$$

Вычислением (20) получим результат в форме

(22) $$y_0 = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_{-j} ,$$

где α_j приблизительно коэффициент факторизованного полинома.

Удалось доказать, что для $N \to \infty$, стремится геометрически $\alpha_j \to \varphi_j$.

Теперь надо составить метод для вычисления части первой строки матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, порядок которой может быть 100 и больше.

Используем метод вычисления обратной матрицы от блочной матрицы.

Видно, что $\mathbf{A}$ является положительно определенной. Введем

(23) $$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} \\ a_1 & a_0 & a_1 & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & a_1 \\ a_{k-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_0 \text{ порядка } k,$$

(24) $$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_2 & \cdots & a_k & 0 \\ & & & \vdots \\ a_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \quad \text{порядка } k,$$

(25) $$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \mathbf{P} \quad \text{порядка} \quad k \times 1 , \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}} \quad \text{порядка} \quad (k+1) \times 1 ,$$

$$(26)\qquad \begin{bmatrix} [\,a_0\,] & [\quad \mathbf{P}^T \quad] \\ \begin{bmatrix} \\ \mathbf{P} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{i-1} \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{Q}}_i \quad \text{порядка} \quad k + 1\,,$$

$$(27)\qquad \begin{bmatrix} [\,e_i\,] & [\quad \mathbf{G}_i^T \quad] \\ \begin{bmatrix} \\ \mathbf{G}_i \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{H}_i \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{Q}}^{-1} \quad \text{порядка} \quad k + 1\,.$$

Из уравнения $\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{1}$ следуют четыре уравнения

$$(28)\qquad \begin{aligned} a_0 e_i \ &+ \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{G}_i &&= 1\,, \\ \mathbf{P}e_i \ &+ \mathbf{Q}_{i-1}\mathbf{G}_i &&= \mathbf{0}\,, \\ a_0\mathbf{G}_i^\mathsf{T} &+ \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{H}_i &&= \mathbf{0}\,, \\ \mathbf{P}\mathbf{G}_i^\mathsf{T} &+ \mathbf{Q}_{i-1}\mathbf{H}_i &&= \mathbf{1}\,, \end{aligned}$$

оттуда следуют формулы для определения субматриц матрицы $\overline{\mathbf{Q}}_i^{-1}$

$$(29)\qquad \begin{aligned} e_i &= (a_0 - \mathbf{P}\mathbf{Q}_{i-1}^{-1}\mathbf{P}^\mathsf{T})^{-1}\,, \\ \mathbf{G}_i &= -\mathbf{Q}_{i-1}^{-1}\mathbf{P}e_i\,, \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{Q}_{i-1}^{-1} + \mathbf{G}_i^\mathsf{T}\mathbf{G}_i\,.\,e_i^{-1}\,. \end{aligned}$$

Теперь добавим первую строку и первый столбец к матрице $\overline{\mathbf{Q}}_i$ и получим матрицу $\overline{\mathbf{Q}}_{i+1}$

$$(30)\qquad \overline{\mathbf{Q}}_{i+1} = \begin{bmatrix} a_0 & [\ \mathbf{P}^\mathsf{T}\ ]\ 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{Q}}_i \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(31)\qquad \overline{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} e_{i+1} & [\quad \mathbf{G}_{i+1}^\mathsf{T} \quad] \\ \begin{bmatrix} \\ \mathbf{G}_{i+1} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{H}_{i+1} \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

 Для определения $\overline{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$ можем применить формулы (29)

$$e_{i+1} = \left(a_0 - [[\mathbf{P}^{\mathsf{T}}]\ 0] \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_i^{-1} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ * \cdots\cdots * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{P}] \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \tag{32}$$

(элементы $*$ умножены на нуль),

$$\mathbf{G}_{i+1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_i^{-1} & \begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{P}] \\ 0 \end{bmatrix} . e_{i+1} . \tag{33}$$

Последний элемент матрицы $\mathbf{G}_{i+1}$ не употребляется в следующем шагу и его не нужно определить.

Смотря на (32) и (33), видно, что матрицу $\overline{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$ порядка $k+1$ можно пропущением $(k+1)$-ой строки и $(k+1)$-ого столбца изменить в матрицу $\mathbf{Q}_{i+1}^{-1}$ k-го порядка.

Элементы матрицы $\mathbf{Q}_{i+1}^{-1}$ определяются по формулам (29), только не определяется последний элемент матрицы $\mathbf{G}_i$, и последняя строка и последний столбец матрицы $\mathbf{H}_i$.

Эти оформления представляют нам возможность определения субматрицы порядка k в левом верхнем углу матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, на основе действий над матрицей k-ого порядка, причем порядок $\mathbf{A}^{-1}$ довольно высок.

Теперь знаем, как определить $\mathbf{Q}_{i+1}^{-1}$, когда знаем $\mathbf{Q}_i^{-1}$ и что $\mathbf{Q}_0^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ (см. 17)).

Удалось доказать, что последовательность матриц $\mathbf{Q}_i^{-1}$ сходится равномерно и геометрически к матрице $\mathbf{Q}^{-1}$, и что по (1.21) $y_0 = -\mathbf{MBY}^{-} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_{-j}$, где α_j коэффициенты факторизованного полинома.

Переход от $\mathbf{Q}_i^{-1}$ до $\mathbf{Q}_{i+k}^{-1}$ будем считать как одну итерацию. Этот метод был проверен на вычислительной машине Еллиот 4100.

Для иллюстрации приведем три примера.

Пример 1.

$$S = 1 + 2{,}7z^{-1} + 1{,}41z^{-2} + 0{,}02z^{-3}$$

	итерация 1	итерация 6	точно	ошибка
φ_1	1,1513887	1,1999992	1,2000000	$8 \cdot 10^{-8}$
φ_2	0,33657962	0,35999958	0,36000000	$4{,}2 \cdot 10^{-7}$
φ_3	0,00466865	0,00499999	0,00500000	10^{-8}

$$\Phi^+ = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_3 z^{-3}.$$

Пример 2.

$$S = 1 + 4z^{-2}$$

	итерация 1	итерация 6	точно	ошибка
φ_1	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0
φ_2	0,24908425	0,25000000	0,25000000	0

$$\Phi^+ = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2}.$$

Пример 3.

$$S = 1 - 7{,}3z^{-1} - 25{,}59z^{-2} - 13{,}9^{-3} - 0{,}2z^{-4}$$

	итерация 1	итерация 4	точно	ошибка
φ_1	1,0636866	1,0843677	1,0843696	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$
φ_2	0,22510956	0,23315103	0,23315184	$8{,}1 \cdot 10^{-7}$
φ_3	0,02935514	0,03022127	0,03022136	$9 \cdot 10^{-8}$
φ_4	0,00047999	0,00049449	0,00049449	0

$$\Phi^+ = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_3 z^{-3} + \varphi_4 z^{-4}.$$

Из примеров, которые были вычислены, видно, что метод очень быстро сходится для таких полиномов, корни которых не лежат на Γ. Если некоторые корни полинома лежат на Γ, то метод тоже сходится, но уже не так быстро.

(Поступила в редакцию 7 июля 1970 г.)

[1] Strejc a kol.: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, Praha 1965.
[2] Vostrý Z.: Algoritmus číslicové regulace. ČVUT FEL 1969.
[3] Ф. Р. Гантмахер: Теория матриц. Наука, Москва 1966.

VÝTAH

Numerická metoda spektrální faktorizace polynomů

ZDENĚK VOSTRÝ

Řešení diskrétních regulačních procesů podle kritéria minima kvadrátů vede na Wienerovu-Hopfovu rovnici. Při řešení této rovnice se neobejdeme bez spektrální faktorizace polynomů.

V článku popsaná metoda je odvozena pomocí optimální regulace statické soustavy podle minima kvadrátů výstupní veličiny. Regulace probíhá z počátečního stavu do nulového ustáleného výstupu. Soustava je dána impulsní charakteristikou konečné délky, kde pořadnice impulsní charakteristiky jsou právě koeficienty faktorizovaného polynomu.

Při sestavování algoritmu je použita rekurentní metoda inverze matice.

Výpočty ukazují, že metoda konverguje pro libovolné kořeny zadaného polynomu. Pro kořeny, jejichž absolutní hodnota je blízká nebo rovna 1, je konvergence poměrně pomalá.

Ing. Zdeněk Vostrý, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV (Институт теории информации и автоматизации — Чехословацкая Академия наук), Vyšehradská 49, Praha 2.