KYBERNETIKA — JAHRGANG 7 (1971), HEFT 6

Ein Beitrag zu Stichprobenplänen mit mehreren Merkmalen

MILAN ULLRICH, JOSEF KŘEPELA

In dieser Arbeit werden Stichprobenpläne für mehrere Merkmale betrachtet. Die Verfasser haben über dieses Problem schon im Jahre 1967 in Magdeburg auf dem Kolloquium über Statistische Qualitätskontrolle referiert.

1. EINLEITUNG

In den Abnahmenkontrollen sind wir in meisten Fällen im Kontakt mit Erzeugnissen, welche wir vom Standpunkt mehrerer als einem Qualitätsmerkmale überprüfen müssen. Gewöhnlich werden in diesen Fällen die verschiedenen Sorten der Mängel nicht unterschieden und entweder werden die Erzeugnisse auf entsprechende oder nichtentsprechende klassifiziert, oder es wird die Anzahl der Mängel auf einem Erzeugniss gefolgt. Für diese vereinfachten Fälle wissen wir verschiedene Abnahmepläne festzulegen.

Dieser Zutritt ist für uns jedoch nicht entsprechend im Falle der Abnahme der verwickelten Erzeugnisse wie zum Beispiel bei den Radioempfängern, Fernsehgeräten und anderen, kurz gesagt, wenn wir intiutiv fühlen, dass die einzelnen Mängel verschiedene Bedeutung haben. Bei den obangeführten Typen der Erzeugnisse müssen wir mindestens zwei Type der Mängel unterscheiden – wichtige und unwichtige. In die wichtigen Mängel werden alle solche, die die Unbenutzbarkeit der Erzeugnisse verursachen (funktionelle, grobe Beschädigung des Aussehens, u.s.w.) begriffen. In die unwichtigen Mängel werden alle andere, die zwar nicht grundsätzlich die nötige Qualität des Erzeugnisses vermindern, die aber trotzdem auf dem Erzeugnisse nicht erscheinen sollen, begriffen. Ähnlich können die Mängel in drei und mehrere Gruppen geteilt werden. Die Lösung, bei welcher für jede Gruppe der Mängel der einzige Abnahmeplan festgelegt wurde und die Abnahme der kontrollierten Gabe realisiert wurde, wenn die Abnahme in Anbetracht aller erwägten Gruppen der Mängel realisiert wurde, hat auch nicht entsprochen. Die Anwendung dieses

Verfahrens wurde durch verschiedene Stichprobenumfänge und durch die Tatsache, dass gewöhnlich die resultierende Wahrscheinlichkeit der Annahme nicht erwogen wurde.

Wir erwägen in dieser Arbeit das Annahmeverfahren des Types (n, c_1, c_2, c), eventuell (n, c_1, c).

Die Lieferung wird, diesen Abnahmeplänen nach, als entsprechende betrachtet, wenn wir in den Stichprobenumfang n, die erste Gruppe der Mängel in Betracht nehmend, nicht mehr als c_1 nichtentsprechender Erzeugnisse finden werden, und die zweite Gruppe der Mängel in Betracht nehmend, nicht mehr als c_2 nichtentsprechender Erzeugnisse finden werden und zusammen nicht mehr als c mangelhafter Erzeugnisse finden werden. Analogisch wird es bei dem Abnahmeplan (n, c_1, c) sein, wo $c = c_2$.

Im folgenden Absatz werden Ausdrücke für Berechnung der Kennlinien dieser Abnahmepläne angeführt und im Absatz 3 wird die approximative Festlegung der Abnahmepläne des erwägten Types für die vorgeschriebenen Qualitätsforderungen angeführt.

2. BERECHNUNG DER KENNLINIEN DER ABNAHMEPLÄNE (n, c_1, c_2, c) RESP. (n, c_1, c)

In diesem Absatz werden wir uns mit der Ableitung der Ausdrücke für die Kennlinie der entworfenen Abnahmepläne befassen.

Es seien $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ die zufälligen Veränderlichen, welche den Wert 0 resp. 1 gewinnen können, und das mit den Wahrscheinlichkeiten

$$(1) \qquad \begin{aligned} P(\xi^{(1)} = 1) &= \pi^{(1)} = 1 - P(\xi^{(1)} = 0)\,, \\ P(\xi^{(2)} = 1) &= \pi^{(2)} = 1 - P(\xi^{(2)} = 0)\,. \end{aligned}$$

Ferner bezeichnen wir

$$(2) \qquad \xi = \max\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}\right)$$

und

$$(3) \qquad P(\xi = 0) = 1 - p\,.$$

Im Falle, dass $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ unabhängige zufällige Veränderlichen sind, so

$$(4) \qquad p = \pi^{(1)} + \pi^{(2)} - \pi^{(1)}\pi^{(2)}\,.$$

Es seien $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ unabgängige Paare zufälliger Veränderlichen mit Wahrscheinlichkeitsverteilung (1) und (3) und es seien

$$\xi_i = \max\left(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Unsere erste Aufgabe ist die Festlegung der Wahrscheinlichkeiten

$$P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, k, l) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} = j, \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(2)} = k, \sum_{i=1}^{n} \xi_i = l\right), \tag{5}$$

für $\max(j, k) \leqq l \leqq j + k$.

Für $l < \max(j, k)$ und für $l > j + k$ ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 0.

Wir erhalten, dass (5) ist gleich

$$P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, k, l) = \frac{n!}{(l-k)!\,(j+k-l);\,(l-j)!\,(n-l)!} \,. \tag{6}$$
$$.\,(p - \pi^{(2)})^{l-k}(\pi^{(1)} + \pi^{(2)} - p)^{j+k-l}(p - \pi^{(1)})^{l-j}(1-p)^{n-l}$$

und für unabhängige zufällige Veränderlichen $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ ist

$$P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, k, l) = \frac{n!}{(l-k)!\,(j+k-l)!\,(l-j)!\,(n-l)!} \,. \tag{7}$$
$$.\,(\pi^{(1)})^j(1-\pi^{(1)})^{n-j}\,(\pi^{(2)})^k(1-\pi^{(2)})^{n-k} =$$
$$= \frac{j!\,k!}{(l-k)!\,(j+k-l)!\,(l-j)!}\,\frac{(n-j)!\,(n-k)!}{(n-l)!\,n!}\binom{n}{j}(\pi^{(1)})^j(1-\pi^{(1)})^{n-j}\,.$$
$$.\binom{n}{k}(\pi^{(2)})^k(1-\pi^{(2)})^{n-k}\,.$$

Bezeichnen wir für alle j, k und $\max(j, k) \leqq l \leqq j + k$

$$\gamma(j, k, l) = \frac{j!\,k!}{(l-k)!\,(j+k-l)!\,(l-j)!}\,. \tag{8}$$

Es gilt offenbar

$$\gamma(j, k+1, l) = \gamma(j, k, l)\,\frac{(k+1)(l-k)}{(j+k-l+1)}$$

wenn $\max(j, k+1) \leqq l \leqq j + k$ und

$$\sum_{\max(j,k) \leqq l \leqq j+k} \gamma(j, k, l)\,\frac{(n-j)!\,(n-k)!}{(n-l)!\,n!} = 1\,.$$

Die Kennlinie des Abnahmeplans (n, c_1, c_2, c) ist offenbar gleich

$$L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c) = \sum P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, k, l)\,, \tag{9}$$

wo die Summe über alle Indexe j, k, l durchgeführt wird, für welche gleichzeitig

$$j \leqq c_1\,, \quad k \leqq c_2\,, \quad l \leqq c\,.$$

Offenbar wird uns bei Berechnung der Kennlinien genügen, uns auf den Fall

$$c_1 \leqq c_2 \leqq c \leqq c_1 + c_2 \tag{10}$$

beschränken.

Wir erhalten dann

$$L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c) = \sum_{l=0}^{C} \sum_{k=0}^{\min(l,c_2)} \sum_{j=l-k}^{\min(l,c_1)} P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, k, l)\,. \tag{9}$$

Es gilt, aus Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit, für jedes $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$, p, n, und für $c_1 \leqq c_2 \leqq c \leqq c_1 + c_2$

$$\begin{aligned} L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_1, c_1) &\leqq L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c_2) \leqq \\ &\leqq L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c) \leqq L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c_1 + c_2)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei aber für jedes c

$$\begin{aligned} L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c, c, c) &= \sum_{l=0}^{c} \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=l-k}^{l} P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, k, l) = \\ &= \sum_{l=0}^{c} P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i = l\Big) = \sum_{l=0}^{c} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}\,, \end{aligned} \tag{12}$$

und für jedes $c_1 \leqq c_2$

$$L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c_1 + c_2) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} \leqq c_1\,, \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(2)} \leqq c_2\Big) \tag{13}$$

was für unabhängige zufällige Veränderlichen dem Produkt

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} \leqq c_1\Big) \,.\, P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(2)} \leqq c_2\Big) \tag{14}$$

gleich ist.

Im weiteren werden wir den Ausdruck für die Kennlinie des Abnahmeplans (n, c_1, c) angeben. In diesem Falle ist für jedes j und l $(l \geqq j)$

$$\begin{aligned} P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, l) &= P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} = j, \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(2)} = l\Big) = \\ &= \frac{n!}{j!\,(l-j)!\,(n-l)!} (\pi^{(1)})^j (p - \pi^{(1)})^{l-j} (1-p)^{n-l} \end{aligned} \tag{15}$$

und für unabhängiges $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$

$$P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, l) = \binom{n}{j}\binom{n-j}{l-j} (\pi^{(1)})^j (1 - \pi^{(1)})^{n-j} (\pi^{(2)})^{l-j} (1 - \pi^{(2)})^{n-l}\,. \tag{16}$$

 Die Kennlinie für den Abnahmeplan $(n, c_1, c), (c_1 \leqq c)$ ist also

$$L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c) = \sum_{j=0}^{c_1} \sum_{l=j}^{c} P(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p; n, j, l) . \tag{17}$$

3. FESTLEGUNG DER ABNAHMEPLÄNE (n, c_1, c_2, c) UND (n, c_1, c)

Die Forderungen auf die Abnahmepläne (n, c_1, c) sind die folgende: Für gegebene Risiken α und β und gegebene p_2, $\pi_1^{(1)}$ und $\pi_2^{(1)}$ ist es notwendig den Abnahmeplan (n, c_1, c) so zu bestimmen, damit

(18) (a) $$L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p_2; n, c_1, c) \leqq \beta ,$$

(b) $$L(\pi_2^{(1)}, 0, \pi_2^{(1)}; n, c_1, c) \leqq \beta ,$$

(c) $$L(\pi_1^{(1)}, 0, \pi_1^{(1)}; n, c_1, c) \geqq 1 - \alpha ,$$

für alle $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$ und p.

Ähnlich die Forderungen auf den Abnahmeplan (n, c_1, c_2, c) sind die folgende: Für gegebenes α, β, p_2, $\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}$, $\pi_2^{(2)}$, ist es notwendig n, c_1, c_2, c so zu bestimmen, damit

(19) (a) $$L(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, p_2; n, c_1, c_2, c) \leqq \beta ,$$

(b) $$L(\pi_2^{(1)}, 0, \pi_2^{(1)}; n, c_1, c_2, c) \leqq \beta ,$$

(c) $$L(\pi_1^{(1)}, 0, \pi_1^{(1)}; n, c_1, c_2, c) \geqq 1 - \alpha ,$$

(d) $$L(0, \pi_2^{(2)}, \pi_2^{(2)}; n, c_1, c_2, c) \leqq \beta$$

für alle $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$ und p.

Diesen Forderungen nach ist die analytische Bestimmung nicht möglich und man muss nur die approximative Lösung bestimmen.

Solche approximative Lösung stellt folgendes Verfahren dar: aus Forderungen werden wir mit Hilfe von p_2 die Paare (n, c) bestimmen, die die erste aus den angeführten Forderungen (19) erfüllen. Aus denen werden wir dann solche ausnehmen, für deren kleinsten Stichprobenumfang n solche c_1 und c_2 $(c_2 \leqq c)$ existieren, dass die Forderungen (b), (c) und (d) erfüllt werden.

Zur Festlegung dieser Abnahmepläne ist es entsprechend, die folgende Tabelle 1 zu benützen, in der für gegebene Werte c die Poissonsverteilungparameter $\lambda_1(c)$ und $\lambda_2(c)$ für das Risiko $\alpha = \beta = 0{,}05$ festgelegt sind, für welche

$$P(X \leqq c/\lambda_2(c)) = 0{,}05 \tag{20}$$

resp.

$$P(X \leqq c/\lambda_1(c)) = 0{,}95 .$$

Für gegebenes c gilt für $\lambda(c) > \lambda_i(c)$

$$(21) \qquad P(X \leqq c/\lambda(c)) \leqq P(X \leqq c/\lambda_i(c)), \quad i = 1, 2.$$

Beispiel. Wir wollen den Abnahmeplan (n, c_1, c_2, c) festlegen, bei den an sich unabhängigen Qualitätsmermalen für folgende Werte:

$$p_2 = 0{,}105\,; \quad \pi_1^{(1)} = 0{,}008\,, \quad \pi_2^{(1)} = 0{,}064\,; \quad \pi_2^{(2)} = 0{,}093\,; \quad \alpha = \beta = 0{,}05\,.$$

Dann erfüllen alle Abnahmepläne (n, c) für $n \geqq \lambda_2(c)/p_2$ die Bedingung (a).

Für jedes diese (n, c) werden wir festlegen, ob die Bedingung (b) erfüllt wird und dann werden wir aus denen das kleinste n wählen, für welches auch die Bedingungen (c) und (d) erfüllt werden. Die Werte $n\pi_2^{(1)}$ in der vierten Spalte der Tabelle 2 für gegebene $\pi_2^{(1)}$ und n aus der dritten Spalte vergleichen wir mit $\lambda_2(c_1)$ aus der Tabelle 1. Für $c = 0$ und 1 sind die Werte $n\pi_2^{(1)} \leqq \lambda_2(0)$, das bedeutet, dass für diese zwei Fälle kein c_1 existiert. Erst für $c = 2$ erhalten wir $c_1 = 0$ für $c = 3$, ist $c_1 = 1$ usw. Ähnlich vergleichen wir die Werte $n\pi_1^{(1)}$ mit $\lambda_1(c_1)$ und mit + bezeichnen wir die für welche $n\pi_1^{1)} \leqq \lambda_1(c_1)$, das ist aber erst für $c_1 = 2$, $n = 100$. Die Fälle mit + bezeichnet entsprechen dem Risiko α.

Endlich suchen wir die kleinsten Werte c_2 für entsprechende Werte $n\pi_2^{(2)}$ aus, so dass $n\pi_2^{(2)} \geqq$ $\geqq \lambda_2(c_2)$.

Zu diesem Zweck ist für diesen Fall für konkrete Werte die Tabelle 2 berechnet und wir sehen, dass unseren Forderungen die Pläne (100, 2, 4, 5), (125, 3, 5, 7), (137, 3, 6, 8), (150, 4, 7, 9) u.s.w. entsprechen und wir wählen also den Plan:

$$n = 100\,, \quad c_1 = 2\,, \quad c_2 = 4\,, \quad c = 5\,.$$

Für diesen Plan wurde mit Hilfe der im früheren Absatz angeführten Ausdrücke die Kennlinie berechnet, die Werte deren für verschiedene $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$ in der Tabelle 3 angeführt sind. Aus dieser Tabelle können auch die Wahrscheinlichkeiten der Abnahme der Lieferungen, mit dem Anteil der Ausschussteile p, für den erwägten Abnahmeplan festgelegt werden. Wir möchten nur darauf aufmerksam machen, dass

$$(22) \qquad L(0, \pi^{(2)}, p; n, c_1, c_2, c) = L(0, p, p; n, c_1, c_2, c) = \sum_{i=0}^{c_2} e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

und ähnlich

$$(23) \qquad L(\pi^{(1)}, 0, p; n, c_1, c_2, c) = L(p, 0, p; n, c_1, c_2, c) = \sum_{i=0}^{c_1} e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}.$$

Für $p > p_2$, für $\pi^{(1)} > \pi_2^{(1)}$ und $\pi^{(1)} \leqq \pi_1^{(1)}$ und für $\pi^{(2)} \geqq \pi_2^{(2)}$ die Forderungen (a), (b), (c) und (d) sind erfüllt. Eventuell können wir die Forderungen (19) etwas ändern.

Wir lassen die Forderungen (a), (b), (d) und anstatt der Forderung (c) wollen wir den Stichprobenplan mit dem kleinsten n wählen. In unserem Beispiel ist aus dieser Hinsicht der Plan

$$n = 60\,, \quad c_1 = 0\,, \quad c_2 = 1\,, \quad c = 2$$

der beste. Weil aber $c > c_1 + c_2$ entspricht dieser Plan den getrennten Plänen für beide Merkmale.

(Eingegangen am 17. Juni 1971.)

Tabelle 1.

Poinssonverteilungparameter $\lambda_1^{(c)}$, $\lambda_2^{(c)}$ für die Risiken
$P(x \leq c/\lambda_1^{(c)}) = 1 - \alpha = 0{,}95$ und $P(x \leq c/\lambda_2^{(c)}) = \beta = 0{,}05$

c	$\lambda_1^{(c)}$	$\lambda_2^{(c)}$
0	0,05	3,0
1	0,4	4,7
2	0,9	6,3
3	1,4	7,8
4	2,0	9,2
5	2,6	10,5
6	3,3	11,8
7	4,0	13,1
8	4,7	14,4
9	5,4	15,7
10	6,2	17,0

Tabelle 2.

Berechnung des Abnahmeplans für $p_2 = 0{,}105$; $\pi_1^{(1)} = 0{,}008$, $\pi_2^{(1)} = 0{,}064$;
$\pi_2^{(2)} = 0{,}093$; $\alpha = \beta = 0{,}05$

c	$\lambda_2(c) = np_2$	n	$n\pi_2^{(1)}$	c_1	$n\pi_1^{(1)}$	$n\pi_2^{(2)}$	c_2
1	2	3	4	5	6	7	8
0	3,0	29	1,86	—	0,232—	2,79	—
1	4,7	45	2,88	—	0,360—	4,18	0
2	6,3	60	3,84	0	0,480—	5,58	1
3	7,8	75	4,80	1	0,600—	6,97	2
4	9,2	88	5,63	1	0,704—	8,18	3
5	10,5	100	6,40	2	0,800+	9,30	4
6	11,8	113	7,23	2	0,904—	10,51	5
7	13,1	125	8,00	3	1,000+	11,62	5
8	14,4	137	8,77	3	1,096+	12,74	6
9	15,7	150	9,60	4	1,200+	13,95	7

Tabelle 3.

Kennlinie für den Stichprobenplan (100, 2, 4, 5)

	$L(\pi_2\ 100{,}4)$	0,996	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029
$L(\pi_1, 100, 2)$	π_1 \ π_2	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090	0,100
0,920	0,010	0,916	0,870	0,747	0,576	0,403	0,260	0,158	0,091	0,050	0,027
0,677	0,020	0,674	0,639	0,548	0,421	0,294	0,190	0,115	0,066	0,036	0,019
0,423	0,030	0,421	0,399	0,342	0,263	0,183	0,118	0,072	0,041	0,023	0,012
0,238	0,040	0,237	0,225	0,192	0,174	0,103	0,066	0,040	0,023	0,013	0,007
0,125	0,050	0,124	0,118	0,101	0,077	0,054	0,035	0,020	0,012	0,007	0,004
0,062	0,060	0,062	0,058	0,050	0,038	0,027	0,017	0,010	0,006	0,003	0,002
0,030	0,070	0,040	0,028	0,024	0,018	0,013	0,008	0,005	0,003	0,002	0,001
0,014	0,080	0,014	0,013	0,011	0,008	0,006	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000
0,006	0,090	0,006	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000
0,003	0,100	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000

Příspěvek ke stanovení přejímacích plánů pro více jakostních vlastností

Milan Ullrich, Josef Křepela

Práce pojednává o stanovení přejímacích postupů při kontrole posuzováním, je-li sledováno více jakostních vlastností. Jakostní vlastnosti jsou děleny do dvou kategorií a pro tento případ jsou navrženy dva typy přejímacích plánů, (n, c_1, c_2, c) resp. (n, c_1, c), kde n je rozsah náhodného výběru, c_1 přejímací číslo pro vady prvého typu, c_2 přejímací číslo pro vady druhého typu a c je nejvýše přípustný počet pro všechny vady.

Pro uvedené přejímací plány je odvozena operativní charakteristika a podán návrh na postup při stanovení přejímacího plánu podle předem zvolených speciálních podmínek (výrazy (18) resp. (19)). Navržený postup je demonstrován na konkrétním příkladu.

Dr. Milan Ullrich, CSc., Ing. Josef Křepela, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV (Institut für Informationstheorie und Automatisation - Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften), Vyšehradská 49, Praha 2.