

Das Verhalten dynamischer Systeme mit mehrfachen komplexen Wurzeln deren charakteristischer Gleichungen

JÚLIUS CSONTÓ

Es werden Eigentümlichkeiten der Wurzelbahnen algebraischer Gleichungen in der Nähe mehrfacher komplexer Wurzeln mit Rücksicht auf die Empfindlichkeit der Parameter-Einstellung des Übertragungsgliedes behandelt. Der Zusammenhang dieser Wurzelbahnen und der durch die Bewegung der Wurzeln hervorgerufenen Änderungen des Charakters von Übergangsvorgängen wird untersucht.

1. AUFGABESTELLUNG

Die vorliegende Abhandlung setzt sich zum Ziel:

1. die Wurzelbahnen einer algebraischen Gleichung in der Nähe mehrfacher komplexer Wurzeln zu untersuchen,
2. den Einfluss der Verstimmung der genauen Parameterwerte, die einer mehrfachen komplexen Wurzel entsprechen, zu beurteilen,
3. Folgerungen zu ziehen, die sich daraus für die Anwendung derartiger Wurzeln beim Entwurf und bei der Abstimmung von Regelkreisen ergeben,
4. den Charakter der Übergangsvorgänge zu ermitteln, die verschiedenen Alternativen der Verstimmung einer mehrfachen komplexen Wurzel entsprechen.

2. ANGEWANDTE METHODIK UND GRUNDSÄTZLICHE MATHEMATISCHE BEZIEHUNGEN

Im Anschluss an Evans [1] befasste sich eine Anzahl von Abhandlungen mit der Problematik der Bewegung von Wurzeln einer algebraischen Gleichung in der komplexen Ebene [2, 3]. Meistens handelt es sich dabei um die Untersuchung des Einflusses von Änderungen des absoluten Gliedes einer charakteristischen Gleichung, das heisst um den Einfluss der Änderung der Verstärkung. In [4] ist die Aufgabe allgemeiner gestellt, indem der Einfluss der Änderung einer beliebigen

Wurzel auf die Lage der dominanten Wurzel untersucht wird. Die grundsätzliche Frage dieser Problematik bleibt jedoch dabei unbeantwortet, nämlich wie die unabhängige Änderung eines beliebigen Koeffizienten der charakteristischen Gleichung in der Bewegung einer beliebigen Wurzel zum Vorschein kommt.

Für die Lösung der im vorgehenden formulierten Aufgabe ist es vorteilhaft, die in [5, 6] vorgeschlagene Methodik anzuwenden. Unter Bezugnahme auf [5] werden nachstehend diejenigen grundsätzlichen Beziehungen angeführt, die den Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen bilden.

Die charakteristische Gleichung sei in der nachstehenden Form gegeben:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n C_k \cdot p^k = 0.$$

Die Gleichung (1) ist für jedwede ihrer n Wurzeln erfüllt. Eine dieser Wurzeln, nämlich die Wurzel p_d , werde gewählt und einer der Koeffizienten, namentlich c_m , sei als kontinuierlich veränderlich vorausgesetzt. In diesem Falle kann die Beziehung (1) als eine implizite Formulierung der funktionalen Beziehung:

$$(2) \quad p_d = f(c_m)$$

betrachtet werden, wobei c_m den unabhängig veränderlichen Koeffizienten und p_d die abhängig veränderliche Wurzel bedeutet.

Die Derivation von (1) nach p ergibt die komplexe Funktion W_m , welche die Veränderlichkeit der Wurzel p_d bei den Änderungen des Koeffizienten c_m charakterisiert:

$$(3) \quad W_m = \frac{dp_d}{dc_m} = \frac{-p_d^m}{\sum_{k=1}^n k \cdot c_k \cdot p_d^{k-1}}.$$

Diese sogenannten Abstimmungsfunktionen W_m , für nacheinanderfolgende Koeffizienten sind durch die Rekurrentformel

$$(4) \quad W_{m+1} = W_m \cdot p_d$$

gebunden. Die Gesamtheit der komplexen Zahlen W_m für sämtliche Koeffizienten bildet für eine gegebene Wurzel in der Gauss-schem Ebene komplexer Zahlen einen Vektorenstern, dessen einzelne Vektoren die Richtungen und Geschwindigkeiten der Wurzelbewegung bei der Änderung des zugehörigen Koeffizienten angeben.

Für eine mehrfache Wurzel ist der Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Formel (3) gleich Null und die Formel verliert jede Bedeutung für die Bestimmung der Komponenten des Abstimmungsdiagrammes. In [5] wurde für den Fall einer mehrfachen Wurzel die Formel

$$(5) \quad \lim_{\Delta c_m \rightarrow 0} \Delta p_d = \lim_{\Delta c_m \rightarrow 0} \left(\frac{-p_d^m}{\sum_{k=0}^n c_k \cdot \binom{k}{r} \cdot p_d^{k-r}} \Delta c_m \right)^{1/r}$$

406 abgeleitet, wo r die Mehrfachheit der Wurzel p_d bedeutet. Mittels der Formel (5) ist es möglich, unter gewissen Voraussetzungen das Abstimmungsdiagramm einer mehrfachen Wurzel zu definieren und zu berechnen.

3. VERSTIMMUNG EINES UNVERÄNDERLICHEN KOEFFIZIENTEN

Eine nähere Untersuchung des Abstimmungsdiagrammes einer mehrfachen Wurzel unter Anwendung der Formel (5) ergibt, dass sich bei der Änderung eines jeden Koeffizienten c_m ein Vektorenstern von $2r$ Vektoren bildet, soweit eine genaue Einhaltung der Werte aller Koeffizienten der Gleichung (1) vorausgesetzt wird, welche die Bildung dieser mehrfachen Wurzel gewährleisten. Schon eine kleine Verstimmung des Wertes eines jeden Koeffizienten c_k (ausschliesslich des Koeffizienten c_m , für dessen Variabilität das Abstimmungsdiagramm gesucht wird) ändert wesentlich den Charakter des Abstimmungsdiagrammes. In diesem Falle ist es nämlich allgemein nicht mehr möglich, durch die Veränderung des Koeffizienten c_m die mehrfache Wurzel genau zu erreichen, und es entsteht die Notwendigkeit, Abstimmungsdiagramme für jede Wurzel aus der Wurzelmenge, die durch dem Zerfall der mehrfachen Wurzel entstanden ist, separat unter Anwendung von der Beziehung (3) zu berechnen.

Eine Analyse der Beziehung (5) führt zur Schlussfolgerung, dass der durch die Elementarvektoren $\lim_{\Delta c_m \rightarrow 0} \Delta p_d$ und $\lim_{\Delta c_{m+1} \rightarrow 0} \Delta p_d$ gebildete Winkel den r -ten Teil des Positionswinkels φ der Wurzel p_d beträgt, wobei unter dem Positionswinkel derjenige Winkel verstanden wird, den der Radiusvektor der betreffenden Wurzel mit der positiven Richtung der reellen Koordinatenachse bildet und r die Mehrfachheit der Wurzel bedeutet.

Führt man dagegen eine ähnliche Analyse der Beziehung (3) durch, gelangt man zum Resultat, dass der Winkel der benachbarten Vektoren W_m und W_{m+1} dem vollen Positionswinkel φ der Wurzel p_d gleich ist.

Die Wurzelbahnen verlieren deshalb bei einer beliebig kleinen Verstimmung eines unbeteiligten Koeffizienten c_k ($k \neq m$) den Charakter gebrochener Linien und gehen in glatte Kurvenlinien über.

Als Wurzelbahnen der genauen Einstellung werden im weiteren solche Wurzelbahnen bezeichnet, bei denen die Werte unveränderlichen (an der Bildung der Wurzelbahn unbeteiligten) Koeffizienten c_k in solcher Art und Weise einander abgestimmt sind, dass bei der Änderung des veränderlichen Koeffizienten c_m , die mehrfache Wurzel tatsächlich genau erreicht wird. Diese Wurzelbahnen der genauen Einstellung teilen die Wurzelebene in $2r$ Sektoren.

Die Verstimmung eines jeden unbeteiligten Koeffizienten hat zur Folge, dass die mehrfache Wurzel in r unterschiedliche Wurzeln zerfällt. Dieser Zerfall der mehrfachen Wurzel ist durch einen Vektorenstern charakterisiert, dessen Komponenten die komplexen Zuwächse angeben, wodurch die mehrfache Wurzel in eine Gruppe

unterschiedlicher Wurzelwerte umwandelt wird (Zuwachsvektoren). Diese Zuwachsvektoren bilden wiederum einen regelmässigen Stern von $2r$ Zweigen, wobei sich in jedem obenerwähnten Sektor ein Zuwachsvektor befindet. Zuwachsvektoren in benachbarten Sektoren entsprechen immer Koeffizientenänderungen Δc_k mit unterschiedlichen Vorzeichen.

Es entsteht in der komplexen Wurzelebene ein geometrisches Gebilde, wo die mehrfache Wurzel einem Sattelpunkt entspricht. Die Wurzelbahnen der genauen Ein-

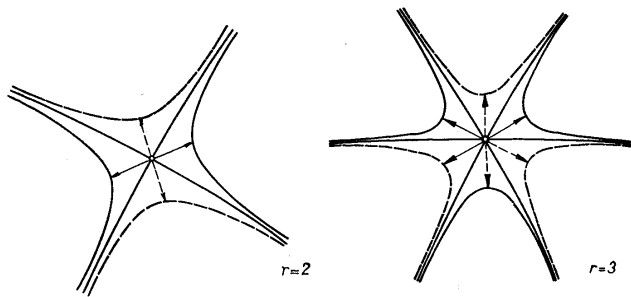


Bild 1.

Bild 2.

stellung entsprechen singulären Trajektorien, welche die mehrfache Wurzel durchlaufen. Bei Verstimmung der unbeteiligten Koeffizienten erhält man Wurzelbahnen, die sich in den durch die singulären Trajektorien gebildeten Sektoren befinden, wobei die singulären Trajektorien an „kurvenförmige Asymptoten“ dieser Wurzelbahnen erinnern. Je nach dem Vorzeichen des Zuwachses Δc_k liegen die verstimmten Wurzelbahnen abwechselnd in „geraden“ und „ungeraden“ Sektoren.

Die Sachlage für die Umgebung einer zweifachen Wurzel ist im Bild 1 schematisch dargestellt. Bild 2 entspricht den Verhältnissen in der Umgebung einer dreifachen Wurzel. Es sind sowohl die singulären Wurzelbahnen der genauen Einstellung, als auch die durch die Verstimmung eines beliebigen Koeffizienten c_k ($k \neq m$) gebildeten Wurzelbahnen angedeutet. Sämtliche singulären und nicht singulären Wurzelbahnen entstehen durch die Veränderung eines und desselben Koeffizienten c_m . Ausserdem sind in den Bildern Sterne der Zuwachsvektoren eingetragen. Durch volle Linien sind die Wurzelbahnen bei einem Vorzeichen der Abweichung des Koeffizienten c_k abgebildet, gestrichelte Linien entsprechen dem anderen Vorzeichen der Koeffizientenabweichung. Es ist ersichtlich, dass die mehrfache Wurzel tatsächlich einen Sattelpunkt dieses Wurzelbahngebildes darstellt.

Der qualitative Sprung im Charakter der Wurzelbahnen entsteht jedenfalls, wie klein auch immer der Wert der Verstimmung des unbeteiligten Koeffizienten sein möge. Daraus folgt, dass die Wurzelbahnen in der Umgebung einer mehrfachen

Wurzel bezüglich der Änderungen eines jeden unbeteiligten Koeffizienten im Ljapunovschen Sinne instabil sind.

Ein konkretes Beispiel der Umgebung einer zweifachen Wurzel ist in Bildern 3 bis 7 dargestellt. Es bezieht sich auf die algebraische Gleichung vierten Grades mit zweifachen komplexen Wurzeln

$$-2 \pm i.$$

Die Bilder 3 und 4 zeigen die Abstimmungsdiagramme für $+\Delta c_m$ und $-\Delta c_m$ ($m = 0, 1, 2$) der zweifachen komplexen Wurzel. Bei einer Verstimmung des Koeffizien-

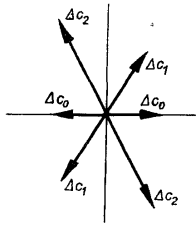


Bild 3.

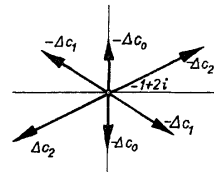


Bild 4.

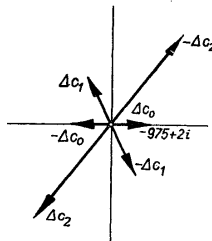


Bild 5.

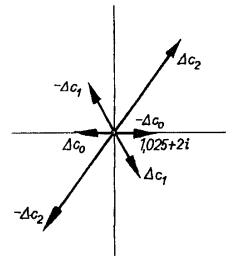


Bild 6.

ten c_0 um $+0,01$ entsteht das in den Bildern 5 und 6 dargestellte Gebilde. Der Verlauf der Wurzelbahnen bei einer kontinuierlichen Veränderung des Koeffizienten c_1 ist im Bild 7 wiedergegeben, wobei die kurvenförmige „Asymptoten“ den gebrochenen Wurzelbahnen bei genau eingestellten Koeffizientenwerten entsprechen und die beiden Kurven die Wurzelbewegung bei einer Verstimmung des Koeffizienten c_0 um den Betrag $\pm 0,01$ darstellen. (In Bild 5 soll $-0,975 + 2i$ sein.)

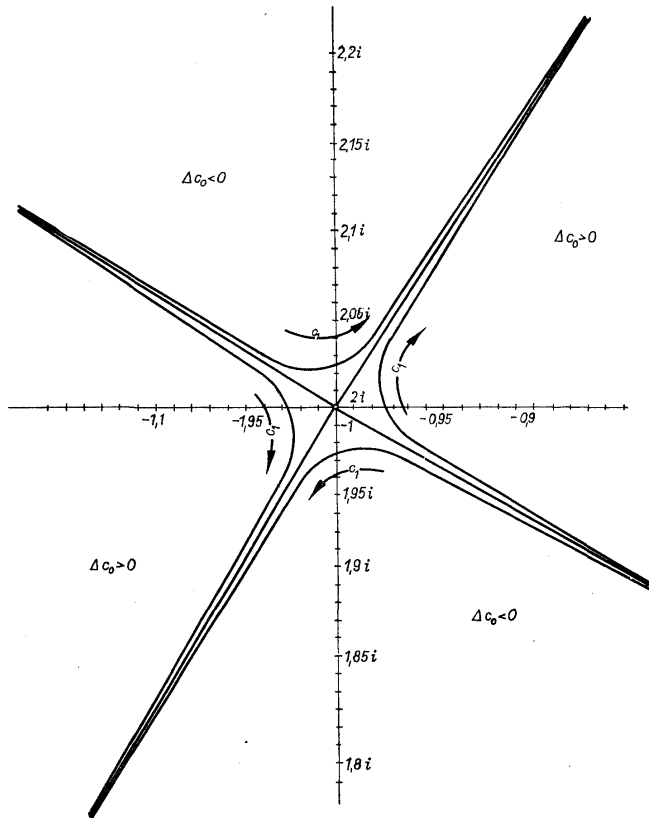


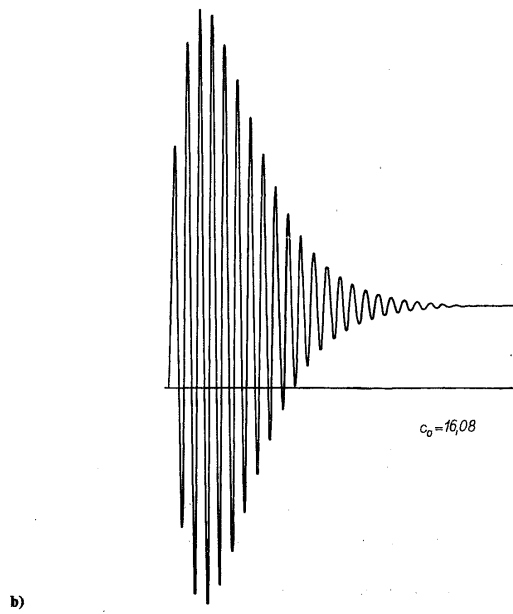
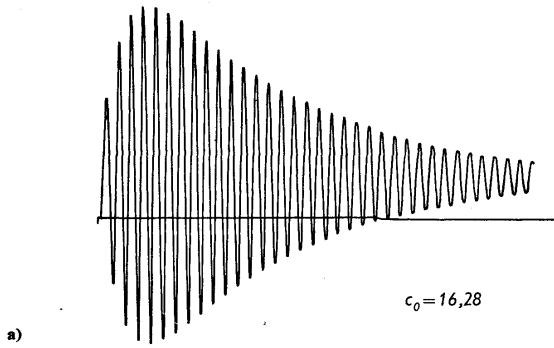
Bild 7.

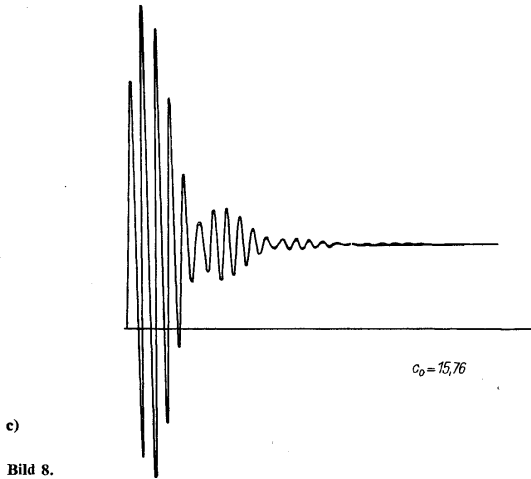
4. ÜBERGANGSCHARAKTERISTIKEN IN DER UMGEBUNG EINER ZWEIFACHEN WURZEL

Die Änderungen der Wurzelwerte spiegeln sich natürlich im Charakter der Übergangscharakteristiken wieder.

Es lässt sich beweisen, dass das Abstimmungsdiagramm einer zweifachen komple-

410





den Wurzel einer Gleichung vierten Grades bei der positiven Änderung von c_0 mit der reellen Achse parallel verläuft, während bei der negativen Änderung von c_0 die Wurzelbahn mit der imaginären Achse parallel ist. Dieser, auch bei Gleichungen höheren Grades öfters vorkommende Fall ist dadurch interessant, dass im Falle der zweifachen Wurzel eine qualitative Änderung im Charakter der Komponenten, aus denen die Antwort auf einen Einheitssprung besteht, vorkommt.

Bei einer Näherung an die zweifache Wurzel in der Richtung der imaginären Achse bleibt die absolute Stabilitätsreserve unverändert. Die Frequenzen beider Komponenten nähern sich einander, was eine Frequenzabnahme der Interferenzschwingungen, die durch die Überlagerung beider Schwingungen mit einander nahen Frequenzen entstehen, zur Folge hat.

Die Bewegung der Wurzeln in der Richtung der reellen Achse stellt eine reine Änderung der absoluten Stabilitätsreserve dar, wobei die Frequenz konstant bleibt, bis schliesslich, beim Erreichen der imaginären Achse, das System in ungedämpfte Schwingungen gerät.

Um diese Sachlage vorzuführen, wurde der Fall der Gleichung vierten Grades mit zweifachen komplexen Wurzeln

$$-0,1 \pm 2i,$$

mit dem Werte des absoluten Gliedes $c_0 = 16,08$ an einem Analogrechner simuliert. Die Bilder 8a, b, c zeigen die Verläufe der Übergangscharakteristiken bei Verstimmungen des Koeffizienten c_0 . Die Werte der Verstimmungen sind angegeben.

412 Bild 8c entspricht Wurzeln mit derselben absoluten Stabilitätsreserve und mit unterschiedlichen Frequenzen. Bild 8b zeigt die Übergangscharakteristik für den Fall der genauen zweifachen komplexen Wurzeln. Bild 8a bezieht sich auf den Fall mit unterschiedlicher absoluter Stabilitätsreserve, jedoch mit übereinstimmenden Frequenzen beider Komponenten.

5. ANWENDBARKEIT MEHRFACHER WURZELN

Es wurde der Verlauf der Wurzelbahnen in der Umgebung einer mehrfachen komplexen Wurzel untersucht. Besondere Aufmerksamkeit wurde Wurzelbahnen geschenkt, die bei der Verstimmung eines unbeteiligten (unveränderlichen) Koeffizienten entstehen. Es wurde auf die Eigentümlichkeiten der Übergangsprozesse in der Nähe einer mehrfachen komplexen Wurzel hingewiesen.

Es taucht nun die Frage auf, welche praktischen Schlussfolgerungen aus den angeführten Eigenschaften mehrfacher Wurzeln bei der Lösung der Problematik linearer Systeme, besonders bei deren Synthese, zu ziehen sind.

Eine mehrfache Wurzel ermöglicht, in einem Schritt die Bewegung mehrerer Wurzeln in groben Zügen abzuschätzen. Eine solche vorläufige Schätzung bietet die Möglichkeit, den Ausgangspunkt, in welchem die eigentliche iterative Abstimmung angefangen wird, zweckmässig zu wählen.

Es ist jedoch nicht vorteilhaft, die genaue mehrfache Wurzel als Ausgangspunkt der eigentlichen iterativen Abstimmung zu wählen, denn dabei erweist sich als nachteilig sowohl die hohe parametrische Empfindlichkeit in der Nähe dieser Wurzel, als auch der bedeutende Einfluss einer ungenauen Einstellung der übrigen Übertragungsparameter, die auf das Ergebnis der Abstimmung verzerrend einwirken können.

Bemerkung. Der Verfasser ist Herrn Prof. J. Spal, CSc. von der Technischen Hochschule Košice für mancherlei Rat und Hilfe mit innigsten Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 24. November 1970.)

LITERATUR

- [1] Evans W. R.: Control System Dynamics. Mc. Graw-Hill, New York 1954.
- [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф.: Законы миграции корней линейных алгебраических уравнений третьей и четвертой степени при непрерывном изменении свободного члена. Автоматика и телемеханика (1955), 3.
- [3] Коллектив авторов: Теория автоматического регулирования. Книга 1. Машиностроение, Москва 1967.
- [4] Brioshi, Locatelli: The region of admissible parameter tolerances of a control system. Automat. strum. (1966), 12, 582–590.
- [5] Spal J.: Algebraic Approach of the Root-Loci Method. Kybernetika 6 (1970), 5, 363–381.
- [6] Spal J.: Algebraická syntéza lineárních regulačních obvodů. Automatizace XIII (1970), 5, 117–122.

Chování dynamických soustav při vícenásobných komplexních kořenech jejich charakteristických rovnic

JÚLIUS CSONTÓ

V práci je vyšetřen průběh kořenových trajektorií v okolí vícenásobného komplexního kořene. Zvláštní pozornost je věnována trajektoriím při rozladění neměnného parametru. Je poukázáno na zvláštnosti přechodových jevů v okolí vícenásobného kořene.

Lze říci, že vícenásobný kořen umožňuje zhruba odhadnout pohyb vícera kořenů najednou a tento hrubý odhad poskytuje možnost vhodně zvolit výchozí bod, z kterého začneme vlastní iterační ladění. Není však výhodné použít vícenásobného kořene jako výchozího bodu k bezprostřednímu ladění iteračním postupem s ohledem na vysokou citlivost ladění jakož i na značný vliv nepřesného nastavení ostatních konstant, které mohou zkreslit výsledek ladění.

Ing. Július Csontó, Katedra automatizácie a regulácie, VŠT (Lehrstuhl für Automatisierung und Regelungstechnik, Technische Hochschule) Park Komenského 2, Košice.