

Použití pseudonáhodných binárních signálů k identifikaci dynamických soustav

VÁCLAV PETERKA

Výhodné vlastnosti pseudonáhodných binárních signálů se využívají při experimentálním určení impulsní odezvy dynamické soustavy. V článku se rozšiřuje použitelnost této metody na případ, kdy střední hodnota eliminovaného šumu je nenulová a neznámá, uvádí se jednoduché korekce výsledku na nenulovou střední hodnotu budícího pseudonáhodného binárního signálu a odvozují se též odhady koeficientů přenosu.

1. ÚVOD

V posledních letech se ve světové odborné literatuře objevila řada prací, které se zabývají využitím pseudonáhodných binárních signálů pro identifikaci lineárních dynamických soustav [1 až 7]. Speciální vlastnosti těchto signálů značně zjednodušují statistickou identifikaci soustavy zejména tím, že odstraňují potíže s řešením Wienerovy-Hopfovy rovnice. Pseudonáhodné binární signály se snadno generují a umožňují značné zjednodušení přístrojové techniky potřebné pro uskutečnění experimentu.

Cílem tohoto článku je upřesnit některé výsledky známé z literatury a dále rozšířit použitelnost metody na obecnější případy. Narozdíl od jiných prací se nevychází z Wienerovy-Hopfovy rovnice, ale používá se přístup, který nepředpokládá statistický charakter vstupního signálu. Nepředpokládá se též znalost střední hodnoty eliminovaného šumu, čímž se odstraňuje nutnost srovnání počátku stupnice pro měření výstupního signálu soustavy s nulovou úrovní vstupního signálu před započetím pokusu. Vedle odhadů pořadnic odezvy na jednotkový obdélníkový puls (odst. 4) se uvádí i odhady koeficientů diferenční rovnice soustavy (odst. 5).

V dodatku se bez odvození uvádí dva nejužívanější způsoby vytváření pseudonáhodných binárních signálů v zjednodušené úpravě vhodné pro praktické použití.

2. PSEUDONÁHODNÝ BINÁRNÍ SIGNÁL

Pod pojmem pseudonáhodný binární signál budeme pro účely tohoto článku mít na mysli determinovaný periodický signál $y(t)$, který může nabývat pouze dvou hodnot $y = +x$ nebo $y = -x$ a který má následující vlastnosti. K přechodům mezi hodnotami $+x$ a $-x$ může (ale nemusí) docházet pouze v časových okamžicích,

kteřé jsou celistvým násobkem základního časového intervalu T , který (v analogii s impulsními obvody) budeme nazývat intervalem vzorkování. Pro jednotlivé hodnoty pseudonáhodného binárního signálu budeme používat stručnějšího označení

$$(1) \quad y_k = y(t) \quad \text{pro} \quad kT \leq t < (k+1)T.$$

Pseudonáhodná binární posloupnost se periodicky opakuje po čase NT , kde číslo N je tzv. perioda pseudonáhodného binárního signálu. Platí tedy

$$y_k = y_{k+IN}.$$

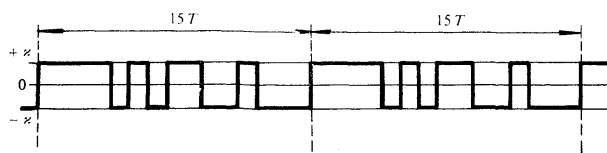
Nejdůležitější a velmi pozoruhodnou vlastností pseudonáhodného binárního signálu je, že jeho pseudokorelační funkce

$$(2) \quad \varphi_{yy}(i-j) = \frac{1}{QN} \sum_{k=1}^{QN} y_{k-i} y_{k-j},$$

kde Q je celé kladné, nabývá pouze dvou hodnot a to

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_{yy}(i-j) &= \kappa^2 & \text{pro} \quad i &= j + KN \quad (K \text{ celé}), \\ \varphi_{yy}(i-j) &= -\frac{\kappa^2}{N} & \text{pro} \quad i &\neq j + KN. \end{aligned}$$

Pseudonáhodné binární posloupnosti s takovou pseudokorelační funkcí lze konstruovat pouze pro některé periody N . V dodatku jsou uvedeny dva nejběžnější způsoby generování těchto posloupností. Prvým způsobem umožňuje generování pseudonáhodné binární posloupnosti s periodou $N = 2^n - 1$ (n celé), druhým způsobem přepouští $N = 4K - 1$ (K celé a N prvočíslo). Protože v každém případě musí být



Obr. 1.

perioda N liché číslo, je střední hodnota pseudonáhodné binární posloupnosti nenulová. Při obou v dodatku popsaných způsobech generování platí

$$(4) \quad \frac{1}{QN} \sum_{k=1}^{QN} y_k = \frac{\kappa}{N}.$$

Přitom κ můžeme volit jak kladné tak i záporné.

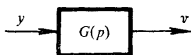
Příklad pseudonáhodného binárního signálu pro $N = 15$ je uveden na obr. 1.

Obecně lze pro určité N nalézt více posloupností, které mají pseudokorelační funkci typu (3). Z hlediska spektrálních vlastností jsou však tyto varianty rovnocenné [8].

3. SPOJITÁ SOUSTAVA BUZENÁ PSEUDONÁHODNÝM BINÁRNÍM SIGNÁLEM

Uvažujme lineární soustavu s přenosem $G(p)$ (obr. 2) buzenou vstupním signálem $y(t)$. Označme impulsní charakteristiku soustavy $g(t)$ a přechodovou charakteristiku

$$(5) \quad s(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$



Obr. 2.

Předpokládejme, že výstupní signál $v(t)$ je vzorkován po intervalech T . Okamžiky vzorkování mohou být obecně zpožděné o εT proti okamžikům, kdy může dojít ke změně hodnoty binárního vstupního signálu. Označme zkráceně

$$(6) \quad v_k = v((k + \varepsilon) T), \quad s_k = s((k + \varepsilon) T).$$

Hodnota výstupního signálu v_k je dána konvolucí

$$(7) \quad v_k = \int_{-\infty}^{(k+\varepsilon)T} g((k + \varepsilon) T - \tau) y(\tau) d\tau = \\ = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \int_{iT}^{(i+1)T} g((k + \varepsilon) T - \tau) y(\tau) d\tau + \int_{kT}^{(k+\varepsilon)T} g((k + \varepsilon) T - \tau) y(\tau) d\tau.$$

Protože vstupní signál $y(t)$ je v úsecích integrace konstantní, $y(\tau) = y_i$, $iT \leq \tau < (i+1)T$, můžeme tuto hodnotu vytknout před integrál a konvoluci (7) dále upravit do tvaru

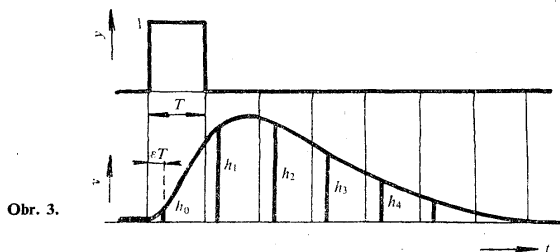
$$(8) \quad v_k = \sum_{j=-\infty}^k y_j h_{k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j y_{k-j},$$

kde

$$(9) \quad h_0 = \int_0^{\varepsilon T} g(\vartheta) d\vartheta = s(\varepsilon T) = s_0,$$

$$(10) \quad h_j = \int_{(j-1+\varepsilon)T}^{(j+\varepsilon)T} g(\vartheta) d\vartheta = s((j+\varepsilon)T) - s((j-1+\varepsilon)T) = s_j - s_{j-1}.$$

Z uvedených vztahů je zřejmé, že veličina h je odezvou na jednotkový puls znázorněný na obr. 3.



Obr. 3.

Je-li soustava stabilní, lze nalézt λ takové, že h_i pro $i \geq \lambda$ budou zanedbatelně malá a místo (8) můžeme uvažovat konečný součet

$$(11) \quad v_k = \sum_{i=0}^{\lambda-1} h_i y_{k-i}.$$

Určíme-li hodnoty h_i ($i = 0, 1, \dots, \lambda - 1$) potom snadno nalezneme stejný počet bodů přechodové charakteristiky. Ze vztahů (9) a (10) plyne

$$(12) \quad s(\varepsilon T) = h_0,$$

$$(13) \quad s((k+\varepsilon)T) = \sum_{i=0}^k h_i.$$

Je-li interval vzorkování T značně kratší než nejkratší časová konstanta soustavy, potom se veličina h blíží odezvě na Diracův impuls o ploše T a přibližně platí

$$(14) \quad g((k+\varepsilon)T) \approx \frac{1}{T} h_i.$$

Ukažme ještě, že mezi diskrétními hodnotami výstupu v_k a vstupu y_k platí diferenční rovnice

$$(15) \quad \sum_{i=0}^n a_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^n b_i y_{k-i}$$

je-li přenos $G(p)$ spojité soustavy racionální funkce lomená stupně n . V takovém případě přechodová funkce má tvar 117

$$(16) \quad s(t) = C_0 + \sum_{v=1}^n C_v e^{p_v t}$$

kde p_v jsou póly přenosu $G(p)$.

Označíme-li

$$(17) \quad Z_v = e^{-p_v T},$$

bude platit

$$(18) \quad s_k = C_0 + \sum_{v=1}^n C_v Z_v^{-k} Z_v^{-k},$$

$$(19) \quad h_0 = C_0 + \sum_{v=1}^n C_v Z_v^{-k},$$

$$(20) \quad h_k = \sum_{v=1}^n C_v Z_v^{-k} (1 - Z_v) Z_v^{-k}, \quad k > 0.$$

Abychom určili vztah mezi parametry spojité soustavy a koeficienty diferenční rovnice (15), dosadíme do levé strany této diferenční rovnice vztah (8)

$$\sum_{i=0}^n a_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=-\infty}^{k-i} a_i y_j h_{k-i-j}.$$

Po změně pořadí ve sčítání dostáváme

$$(21) \quad \sum_{i=0}^n a_i v_{k-i} = \sum_{j=k-n}^k y_j \sum_{i=0}^{k-j} a_i h_{k-i-j} + \sum_{j=-\infty}^{k-n-1} y_j \sum_{i=0}^n a_i h_{k-i-j}.$$

Všimněme si nyní posledního součtu ve výrazu (21). S použitím vztahu (20) můžeme tento součet upravit následovně:

$$(22) \quad \sum_{i=0}^n a_i h_{k-i-j} = \sum_{v=1}^n C_v Z_v^{-k} (1 - Z_v) Z_v^{j-k} \sum_{i=0}^n a_i Z_v^i.$$

Zvolíme-li nyní koeficienty a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) tak, aby pro obecné Z platilo

$$(23) \quad \sum_{i=0}^n a_i Z^i = a_n \prod_{v=1}^n (Z - Z_v),$$

tj. budou-li a_i koeficienty polynomu n -tého stupně s kořeny Z_v ($v = 1, 2, \dots, n$) bude výraz (22) identicky roven nule pro všechna Z_v a anuluje se tím druhý člen

118 na pravé straně ve vztahu (21). Po jednoduché úpravě pak dostaneme

$$(24) \quad \sum_{i=0}^n a_i v_{k-i} = \sum_{j=0}^n y_{k-j} \sum_{i=0}^j a_i h_{j-i}.$$

Z porovnání vztahu (24) s diferenční rovnicí (15) dostáváme pro koeficienty pravé strany diferenční rovnice vztahy

$$(25) \quad b_j = \sum_{i=0}^j a_i h_{j-i}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dosazením (9) a (10) můžeme tento vztah dále upravit do tvaru

$$(26) \quad b_j = \sum_{i=1}^j (a_i - a_{i-1}) s_{j-i} + a_0 s_j.$$

Při identifikaci soustavy pomocí pseudonáhodného binárního signálu je požadavek obrácený. Z výsledků měření se odhadnou koeficienty diferenční rovnice (14) a z těch pak je třeba určit parametry spojitě soustavy. Je možno postupovat tak, že se nejprve naleznou kořeny Z_v ($v = 1, 2, \dots, n$) polynomu (23) a kořeny spojitěho přenosu se určí ze vztahu (17), tj.

$$(27) \quad p_v = -\frac{1}{T} \ln Z_v.$$

Těmito kořeny a hodnotami přechodové charakteristiky s_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$), které vypočteme z rekurentních vztahů (26) je pak spojitá soustava plně určena. Tento postup je obecně víceznačný, protože je víceznačný výraz (27). Tato neurčitost je způsobena nedostatkem informace o průběhu odezvy soustavy mezi okamžiky vzorkování. Je-li interval vzorkování relativně krátký, je přirozené předpokládat u odezvy soustavy pouze nejvyšší možné frekvence a uvažovat pouze hlavní hodnoty logaritmu ve vztahu (27).

4. ODHAD DISKRÉTNÍCH HODNOT ODEZVY NA JEDNOTKOVÝ PULS

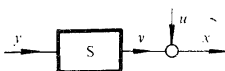
Uvažujme lineární dynamickou soustavu znázorněnou na obr. 4. Soustava nechť je buzena pseudonáhodným binárním signálem y a k jejímu ideálnímu výstupu v se přičítá šum u . Do šumu u zahrnujeme vliv všech náhodně se měnících veličin, které na soustavu působí, včetně náhodných chyb při měření výstupního signálu. Předpokládejme, že máme k dispozici L naměřených hodnot výstupního signálu x_k ($k = 1, 2, \dots, L$) přičemž

$$(28) \quad L = \varrho N,$$

kde N je perioda vstupního pseudonáhodného binárního signálu a q je celé kladné číslo. O statistických vlastnostech šumu u není známo nic více, než že a) je ho možno považovat za ergodický, b) střední hodnota šumu je nezávislá na předcházejících hodnotách vstupního signálu, c) během doby pozorování je tato střední hodnota neznámá avšak konstantní

$$(29) \quad E\{u_k \mid y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots\} = E\{u_k\} = c = \text{konst.}, \quad k = 1, 2, \dots, L.$$

Obr. 4.



Uvažujme vztah mezi vstupním signálem a ideálním výstupním signálem v ve tvaru (8). Potom zřejmě platí

$$(30) \quad x_k = v_k + u_k = \sum_{j=0}^{\lambda-1} h_j y_{k-j} + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, L.$$

Naší úlohou je nalezení odhadu diskrétních hodnot h_j ($j = 0, 1, \dots, \lambda - 1$). Při konstrukci odhadu vyjdeme z regresního modelu

$$(31) \quad E\{u_k \mid y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-v+1}\} = c + \sum_{i=0}^{v-1} r_i y_{k-i}.$$

Podle předpokladu (29) jsou regresní koeficienty r_i rovny nule, což je prakticky jediná informace, kterou o statistických vlastnostech šumu máme. Předpokládejme však dočasně, že tyto regresní koeficienty známy nejsou a odhadneme je společně s neznámou střední hodnotou c . Počet v odhadovaných regresních koeficientů ponechme zatím bližší neurčený; vrátíme se k této otázce později.

Odhad regresních koeficientů r_i můžeme nalézt minimalizací součtu čtverců

$$(32) \quad Q = \sum_{k=1}^L q_k^2,$$

kde

$$(33) \quad q_k = u_k - c - \sum_{i=0}^{v-1} r_i y_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots, L.$$

Pro jednodušší zápis zavedeme maticovou symboliku. Dohodneme se, že budeme všechny vektory (jednosloupcové matice) označovat malými písmeny a vicesloupcové matice písmeny velkými. Vektor sestavený ze samých jedniček budeme značit $\mathbf{s}$, přičemž index i bude udávat jeho rozměr.

$$(34) \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{v-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_v = \begin{bmatrix} y_1, & y_0, & y_{-1}, & \dots, & y_{-v+2} \\ y_2, & y_1, & y_0, & \dots, & y_{-v+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_L, & y_{L-1}, & y_{L-2}, & \dots, & y_{L-v+1} \end{bmatrix},$$

můžeme součet čtverců (32) vyjádřit kvadratickou formou

$$(35) \quad Q = \mathbf{q}^T \mathbf{q}$$

a systém rovnic (33) pak bude

$$(36) \quad \mathbf{q} = \mathbf{u} - c\mathbf{s}_L - \mathbf{Y}_v \mathbf{r}$$

Odhady vektoru $\mathbf{r}$ a konstanty c určíme z podmínek extrému kvadratické formy

$$(37) \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{r}} = -2\mathbf{Y}_v^T (\mathbf{u} - c\mathbf{s}_L - \mathbf{Y}_v \mathbf{r}) \right|_{\substack{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}} \\ c=\hat{c}}} = \mathbf{0},$$

$$(38) \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial c} = -2\mathbf{s}_L^T (\mathbf{u} - c\mathbf{s}_L - \mathbf{Y}_v \mathbf{r}) \right|_{\substack{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}} \\ c=\hat{c}}} = 0.$$

Dostáváme tak

$$(39) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{u} - \mathbf{Y}_v^T \mathbf{s}_L \hat{c} - \mathbf{Y}_v^T \mathbf{Y}_v \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0},$$

$$(40) \quad \mathbf{s}_L^T \mathbf{u} - L\hat{c} - \mathbf{s}_L^T \mathbf{Y}_v \hat{\mathbf{r}} = 0.$$

Vyloučíme-li z rovnic (39) a (40) c a označíme-li $\mathbf{I}_i$ jednotkovou matici o rozměru i ,

$$(41) \quad \mathbf{Y}_v^T \left(\mathbf{I}_v - \frac{1}{L} \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T \right) \mathbf{u} - \mathbf{Y}_v^T \left(\mathbf{I}_v - \frac{1}{L} \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T \right) \mathbf{Y}_v \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0},$$

dostáváme konečně pro vektor odhadů regresních koeficientů vztah

$$(42) \quad \hat{\mathbf{r}} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{u},$$

kde $\mathbf{S}$ je čtvercová matice, která má na hlavní diagonále hodnoty $1 - 1/L$ a všechny ostatní její prvky jsou $-1/L$

$$(43) \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_v - \frac{1}{L} \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T.$$

Vyjádříme nyní vektor diskretních neznámých hodnot šumu $\mathbf{u}$ pomocí známých hodnot výstupu a vstupu soustavy a neznámých parametrů soustavy. Podle (30) platí

$$(44) \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{Y}_\lambda \mathbf{h},$$

kde

$$(45) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\lambda = \begin{bmatrix} y_1, y_0, & y_{-1}, \dots, y_{-\lambda+2} \\ y_2, y_1, & y_0, \dots, y_{-\lambda+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_L, y_{L-1}, & y_{L-2}, \dots, y_{L-\lambda+1} \end{bmatrix}.$$

Po dosazení (44) do (42) máme ve výrazu pro odhad $\hat{\mathbf{r}}$ jako neznámou pouze vektor parametrů soustavy $\mathbf{h}$

$$(46) \quad \hat{\mathbf{r}} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} [\mathbf{x} - \mathbf{Y}_\lambda \mathbf{h}].$$

Odhad (46) je náhodnou veličinou se střední hodnotou $\mathbf{r}$. Je proto přirozené očekávat, že experiment dopadl tak, že

$$(47) \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}.$$

Pro splnění této podmínky máme k dispozici λ dosud neurčených parametrů h_i . Protože počet odhadovaných regresních koeficientů je obecně v , můžeme podmínku (47) splnit beze zbytku pouze pro $\lambda = v$. V takovém případě dostaneme ze (46) po dosazení $\mathbf{r} = \mathbf{r} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_v$

$$(48) \quad \hat{\mathbf{h}} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{x}.$$

Je-li $\lambda > v$, není možno z podmínky (47) neznámé parametry h_i jednoznačně určit. Naopak je-li $\lambda < v$, nelze volbou těchto parametrů podmínku (47) obecně splnit a je zřejmé, že pokus skoro jistě nedopadl tak, jak se dalo očekávat. Malé odchylky náhodné proměnné od její střední hodnoty jsou pravděpodobnější než velké a proto je možno předpokládat, že odhad $\hat{\mathbf{r}}$ po dosazení naměřených veličin je skutečné hodnotě „co nejbližší“. Protože není k dispozici statistické rozložení náhodné proměnné $\mathbf{x}$, je třeba volit subjektivní míru vzdálenosti mezi realizací $\hat{\mathbf{r}}$ a skutečnou známou hodnotou $\mathbf{r}$. Jako takováto míra může dobře posloužit součet kvadrátů rozdílů

$$(49) \quad \mu = (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r})^T (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r})$$

a jako odhad $\hat{\mathbf{h}}$ lze volit takový vektor $\mathbf{h}$, který jej minimalizuje.

V praktických případech není zpravidla počet λ neznámých parametrů h_i ($i = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1$) předem znám a mimo to máme zájem na tom, aby potřebný

počet numerických operací byl co nejmenší. Proto je rozumné volit $\lambda = v$ a při odhadu diskretních hodnot odezvy na jednotkový puls vycházet ze vzorce (48).

Při dalším zpracování vzorce (48) se nejprve věnujeme matici, kterou je třeba invertovat:

$$(50) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v = \mathbf{Y}_v^T \mathbf{Y}_v - \frac{1}{L} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T \mathbf{Y}_v.$$

Jelikož počet řádků L matice $\mathbf{Y}_v$ je celistvým násobkem periody N vyplývá z vlastnosti pseudonáhodné binární posloupnosti (2) a (3), že při $v \leq N$

$$(51) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{Y}_v = \kappa^2 \varrho \begin{bmatrix} N, & -1, & -1, & \dots, & -1 \\ -1, & N, & -1, & \dots, & -1 \\ -1, & -1, & N, & \dots, & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1, & -1, & -1, & \dots, & N \end{bmatrix} = \kappa^2 \varrho [(N+1) \mathbf{I} - \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T].$$

Z výrazu pro střední hodnotu pseudonáhodné binární posloupnosti (4) plyne

$$(52) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{s}_L = \kappa \varrho \mathbf{s}_v$$

a po dosazení do (50) dostáváme

$$(53) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v = \kappa^2 \varrho [(N+1) \mathbf{I}_v - \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T] - \frac{\kappa^2 \varrho^2}{L} \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T = \kappa^2 \varrho (N+1) \left[\mathbf{I}_v - \frac{1}{N} \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T \right].$$

Inverzi takovéto speciální matice je možno provést jednou provždy a čtenář se snadno přesvědčí, že za předpokladu

$$(54) \quad v < N$$

platí

$$(55) \quad [\mathbf{Y}_v \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} = \frac{1}{\kappa^2 \varrho (N+1)} \left[\mathbf{I}_v + \frac{1}{N-v} \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T \right].$$

Z předpokladu (54), který je nutný, aby bylo možno inverzi provést, vyplývá, že perioda pseudonáhodného binárního signálu musí být alespoň o jeden interval vzorkování větší než praktická délka odezvy na jednotkový puls. To nás nikterak nepřekvapuje, uvážíme-li že pro odhad neznámých parametrů h_i o počtu $\lambda = v$ a dalšího parametru c , který jsme během výpočtu vyloučili, potřebujeme alespoň $v+1$ nezávislých rovnic.

Vyčísleme nyní zbývajících činitele ve výrazu (48).

$$(56) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{Y}_v^T \mathbf{x} - \frac{1}{L} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T \mathbf{x} = \mathbf{Y}_v^T \mathbf{x} - \frac{1}{L} \kappa \varrho \mathbf{s}_v \mathbf{s}_L^T \mathbf{x}.$$

Označíme-li

$$(57) \quad \bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i,$$

$$(58) \quad \sum_{k=1}^L x_k y_{k-i} = |\kappa| \sum_{k=1}^L \text{sign}(y_{k-i}) x_k = |\kappa| \varrho N \varphi_i,$$

$$(59) \quad \varphi_i = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \text{sign}(y_{k-i}) x_k,$$

můžeme (56) upravit do tvaru

$$(60) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{x} = |\kappa| \varrho N \boldsymbol{\varphi} - \kappa \varrho \bar{x} \mathbf{s}_v,$$

kde

$$(61) \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{v-1} \end{bmatrix}.$$

Po dosazení (60) a (55) do (48) a jednoduché úpravě dostáváme konečně

$$(62) \quad \hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{|\kappa|} \frac{N}{N+1} \left[\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{N-v} \left(\sum_{j=0}^{v-1} \varphi_j - \text{sign}(\kappa) \bar{x} \right) \mathbf{s}_v \right]$$

a nebo po rozepsání do řádků

$$(63) \quad \hat{h}_i = \frac{1}{|\kappa|} \frac{N}{N+1} \left[\varphi_i + \frac{1}{N-v} \left(\sum_{j=0}^{v-1} \varphi_j - \text{sign}(\kappa) \bar{x} \right) \right], \quad i = 0, 1, \dots, v-1.$$

Bude-li $N \gg 1$ a rovněž $N - v \gg 1$, je možno výraz pro odhad $\hat{h}_i$ zjednodušit do tvaru

$$(64) \quad \hat{h}_i \approx \frac{1}{|\kappa|} \varphi_i,$$

což je vztah, který se běžně uvádí [2, 3] a který vyplývá ze známého vztahu mezi impulsní odezvou soustavy, vzájemnou korelační funkcí vstupního a výstupního signálu a autokorelační funkcí vstupního signálu. Námi odvozený vzorec (63) umožňuje jednoduchou korekci na nenulovou střední hodnotu vstupního signálu a na nenulovou a neznámou střední hodnotu šumu.

Možnost apriorní inverze (55) není jedinou předností pseudonáhodného binárního signálu. Neméně významným faktem, který mluví pro použití tohoto signálu, je

snadné vyčíslení vzájemné pseudokorelační funkce (59). Násobení nutné při obvyklém výpočtu odhadu vzájemné korelační funkce se zde redukuje na úpravu znaménka a sčítání. Tato okolnost se snadným pamatováním dvouhodnotového signálu umožňuje jednoduchou konstrukci speciálního korelátoru [4, 6].

Na závěr tohoto odstavce vyšetřeme alespoň stručně nejdůležitější statistické vlastnosti odhadu (62) resp. (48).

Dosadíme-li do (48) za $\mathbf{x}$ z (44) dostaneme

$$(65) \quad \hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{u}.$$

Podle předpokladu, že střední hodnota šumu je během měření rovna konstantě c , platí

$$(66) \quad E\{\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{s}_L c = \mathbf{0}$$

jelikož

$$\mathbf{S} \mathbf{s}_L = \left[\mathbf{I}_L - \frac{1}{L} \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T \right] \mathbf{s}_L = \mathbf{0}.$$

Získaný odhad je tedy nestranný.

Vyšetříme ještě kovarianční matici příslušnou odhadovanému vektoru

$$(67) \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{h}}} = E\{(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h})(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h})^T\} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} E\{\mathbf{u} \mathbf{u}^T\} \mathbf{S} \mathbf{Y}_v [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1}.$$

Uvážíme-li, že platí

$$(68) \quad E\{\mathbf{u} \mathbf{u}^T\} = \mathbf{C}_u - c^2 \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T,$$

kde $\mathbf{C}_u$ je kovarianční matice šumu

$$(69) \quad \mathbf{C}_u = E\{(\mathbf{u} - c \mathbf{s}_L)(\mathbf{u} - c \mathbf{s}_L)^T\},$$

a dále, že

$$(70) \quad \mathbf{S} \mathbf{s}_L \mathbf{s}_L^T \mathbf{S} = \mathbf{0},$$

dostáváme z (67)

$$(71) \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{h}}} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{C}_u \mathbf{S} \mathbf{Y}_v [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1}.$$

Jsou-li jednotlivé hodnoty šumu u_k ($k = 1, 2, \dots, L$) navzájem nekorelované, platí

$$(72) \quad \mathbf{C}_u = \sigma_u^2 \mathbf{I}_L,$$

kde σ_u^2 je rozptyl šumu, a výraz (71) lze dále zjednodušit. Snadno ověříme, že

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}$$

a (71) dostane po dosazení těchto vztahů jednoduchý tvar

$$(73) \quad \mathbf{C}_h = \sigma_u^2 [\mathbf{V}_v^T \mathbf{S} \mathbf{V}_v]^{-1} = \frac{\sigma_h^2}{\kappa^2 \varrho (N+1)} \left[\mathbf{I}_v + \frac{1}{N-v} \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T \right].$$

Z tohoto výrazu je patrné, že rozptyly odhadů jednotlivých pořadnic (prvky na hlavní diagonále v (73)) jsou za předpokladu (72) stejné a platí pro ně

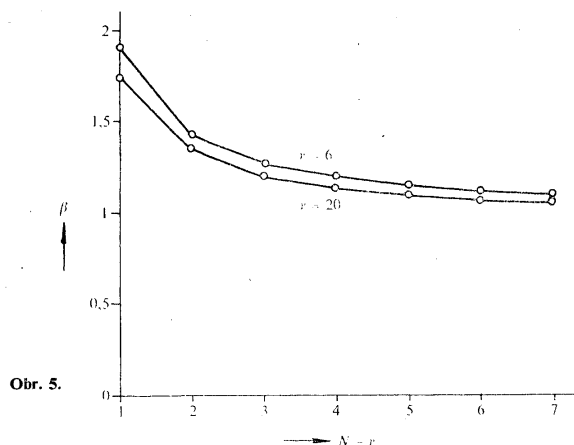
$$(74) \quad \sigma_h^2 = \frac{\sigma_u^2}{\kappa^2 \varrho (N+1)} \left(1 + \frac{1}{N-v} \right).$$

Vyjádříme nyní ještě $\varrho = L/N$ a dostaneme konečný tvar pro rozptyl odhadů jednotlivých pořadnic odezvy na jednotkový puls pro případ nezávislého šumu

$$(75) \quad \sigma_h^2 = \frac{\sigma_u^2}{\kappa^2 L} \beta,$$

kde

$$(76) \quad \beta = \frac{N}{(N+1)} \left(1 + \frac{1}{N-v} \right).$$



Obr. 5.

Z těchto vzorců vyplývá, že pro danou délku pozorování L a pro danou délku v odezvy na jednotkový puls je z hlediska požadavku malého rozptylu odhadu výhodné volit periodu N alespoň o několik intervalů vzorkování větší, než je délka odezvy. Pro názornost je na obr. 5 uvedena závislost koeficientu β na rozdílu $N-v$

pro $v = 6$ a 20. Z tohoto grafu je patrné, že vliv prodlužování periody N poměrně rychle klesá.

5. ODHAD KOEFICIENTŮ DIFERENČNÍ ROVNICE (15)

V diferenční rovnici (15) můžeme jeden koeficient volit. Volme např. $a_0 = 1$:

$$(77) \quad v_k + \sum_{i=1}^n a_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^n b_i y_{k-i}.$$

Zavedeme-li do této rovnice naměřené hodnoty výstupu soustavy x_k vztahem $v_k = x_k - u_k$, můžeme ji upravit do tvaru

$$(78) \quad x_k + \sum_{i=1}^n a_i x_{k-i} - \sum_{i=0}^n b_i y_{k-i} = \delta_k,$$

kde

$$(79) \quad \delta_k = u_k + \sum_{i=1}^n a_i u_{k-i}.$$

V rovnicích (77) a (78) vystupuje n neznámých koeficientů a_i a $m = n + 1$ neznámých koeficientů b_i . Položme si za úkol nalézt odhad těchto koeficientů a předpokládejme, že máme pro tento účel k dispozici $L + n$ naměřených hodnot výstupního signálu x_k ($k = -n + 1, -n + 2, \dots, 0, 1, 2, \dots, L$), kde L je celistvým násobkem periody pseudonáhodného binárního signálu N .

Maticový zápis systému rovnic (78) pro $k = 1, 2, \dots, L$ bude

$$(80) \quad \mathbf{x} + \mathbf{X}_n \mathbf{a} - \mathbf{Y}_m \mathbf{b} = \boldsymbol{\delta},$$

kde

$$(81) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_L \end{bmatrix},$$

$$(82) \quad \mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} & \dots & x_{-n+1} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} & \dots & x_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_{L-2} & x_{L-3} & \dots & x_{L-n} \end{bmatrix},$$

$$(83) \quad \mathbf{Y}_m = \begin{bmatrix} y_1 & y_0 & y_{-1} & \dots & y_{-n+1} \\ y_2 & y_1 & y_0 & \dots & y_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_L & y_{L-1} & y_{L-2} & \dots & y_{L-n} \end{bmatrix}.$$

Při konstrukci odhadu vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ vyjdeme opět z předpokladu nezávislosti střední hodnoty šumu na předchozích hodnotách vstupního signálu (29). Použijeme stejný přístup jako v předcházejícím odstavci, budeme jej však tentokrát aplikovat na náhodnou veličinu δ , která je s diskrétními hodnotami šumu u vázána vztahem (79). Je-li šum u nezávislý na hodnotách vstupního signálu y , bude na nich nezávislá i tato veličina. To je jediná apriorní informace, kterou o náhodné veličině δ máme k dispozici. Bližší statistické charakteristiky známy nejsou, protože jejich znalost nepředpokládáme ani u šumu u .

Budeme uvažovat regresní model

$$(84) \quad E\{\delta_k \mid y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-v+1}\} = d + \sum_{i=0}^{v-1} r_i y_{k-i}$$

a odhadneme regresní koeficienty r_i . Stejným postupem, kterým jsme odvodili vztah (42), nalezneme

$$(85) \quad \mathbf{r} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \delta$$

a po dosazení za δ z (80)

$$(86) \quad \hat{\mathbf{r}} = [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} (\mathbf{x} + \mathbf{X}_n \mathbf{a} - \mathbf{Y}_n \mathbf{b}).$$

Zavedeme některá nová označení a použijeme dříve odvozených vztahů (55) a (60)

$$(87) \quad [\mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_v]^{-1} = \frac{1}{\kappa^2 \varrho} \mathbf{P},$$

kde

$$(88) \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}_v + \frac{1}{N-v} \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T,$$

$$(89) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{Y}_m = \kappa^2 \varrho \frac{N+1}{N} \boldsymbol{\Psi} = \kappa^2 \varrho \frac{N^2-1}{N} \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \dots & \psi_{1,n+1} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \dots & \psi_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{v,1} & \psi_{v,2} & \dots & \psi_{v,n+1} \end{bmatrix},$$

kde

$$(90) \quad \psi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ -\frac{1}{N-1} & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$$

$$(91) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{X}_n = |\kappa| \varrho N \Phi = |\kappa| \varrho N \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{v1} & \varphi_{v2} & \dots & \varphi_{vn} \end{bmatrix},$$

$$(92) \quad \varphi_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \text{sign}(y_{k-i}) x_{k-j} - \kappa \varrho \frac{1}{L} \sum_{k=1-j}^{L-j} x_i.$$

Ve shodě s (60) dále platí

$$(93) \quad \mathbf{Y}_v^T \mathbf{S} \mathbf{x} = |\kappa| \varrho N \varphi - \kappa \varrho \bar{x} \mathbf{s}_v = |\kappa| \varrho N \varphi_0,$$

kde

$$(94) \quad \varphi_0 = \varphi - \text{sign}(\kappa) \frac{\bar{x}}{N} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ \vdots \\ \varphi_{n0} \end{bmatrix}.$$

Dosazením (87), (89), (91) a (93) do výrazu pro odhad regresních koeficientů (86) dostáváme

$$(95) \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{|\kappa|} \frac{N}{N+1} \mathbf{P}(\varphi_0 + \Phi \mathbf{a} - |\kappa| \frac{N^2-1}{N_2} \Psi \mathbf{b}).$$

Pokud by počet neznámých koeficientů byl stejný jako počet odhadovaných regresních koeficientů, tj. $v = n + m = 2n + 1$, mohli bychom dále postupovat stejně jako v případě odhadu diskretních hodnot odezvy na jednotkový puls a mohli bychom odhady $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ určit z podmínky $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, tj. z rovnice

$$(96) \quad \varphi_0 + \Phi \mathbf{a} - |\kappa| \frac{N^2-1}{N^2} \Psi \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Protože lze předpokládat, že počet koeficientů v diferenční rovnici (77) bude v praktických případech relativně malý, vyšetříme i obecnější případ $m + n < v$, který umožňuje lepší odhad neznámých koeficientů.

Na základě úvahy uvedené v předcházejícím odstavci (text za rovnici (48)) odhadneme neznámé koeficienty $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ z podmínky minima kvadratické formy

$$(97) \quad \mu = \hat{\mathbf{r}}_1^T \hat{\mathbf{r}}.$$

Z podmínek extrému

$$(98) \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{0}, \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{b}} \right|_{\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}$$

dostaneme systém lineárních rovnic

$$(99) \quad \Phi^T P^2 \left(\varphi_0 + \Phi \hat{\mathbf{a}} - |\kappa| \frac{N^2 - 1}{N^2} \Psi \hat{\mathbf{b}} \right) = \mathbf{0},$$

$$(100) \quad \Psi^T P^2 \left(\varphi_0 + \Phi \hat{\mathbf{a}} - |\kappa| \frac{N^2 - 1}{N^2} \Psi \hat{\mathbf{b}} \right) = \mathbf{0},$$

který určuje hledané odhady pro neznámé koeficienty diferenční rovnice (15). Lze dokázat [9], že takto získané odhady jsou silně konsistentní, tj. že s pravděpodobností jedna platí

$$(101) \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}.$$

Naměřené hodnoty výstupního signálu x ovlivňují pouze matice Φ a φ_0 definované vztahy (91) a (94). Jejich prvky udává vzorec (92). Z hlediska numerického vyčíslení je výhodnější rozepsat tento vzorec následovně:

$$(102) \quad \varphi_{ij} = \varphi(1 + i - j) + A_{ij},$$

$$(103) \quad \varphi(q) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \text{sign}(y_{k-q}) x_k,$$

$$(104) \quad A_{ij} = \frac{1}{\varrho N} \sum_{k=0}^{j-1} \text{sign}(y_{j-i-1-k}) (x_{-k} - x_{L-k}) - \\ - \text{sign}(\kappa) \frac{1}{N} \left[\bar{x} + \frac{1}{\varrho N} \sum_{k=0}^{j-1} (x_{-k} - x_{L-k}) \right],$$

$$(105) \quad \bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_k.$$

Z těchto vztahů je patrné, že vedle určení vzájemné pseudokorelační funkce (103) a střední hodnoty výstupního signálu (105) je třeba si ještě pamatovat $2n$ hodnot výstupního signálu na okrajích intervalu pozorování x_k ($k = -n + 1, -n + 2, \dots, 0, L - n + 1, L - n + 2, \dots, L$). Tato okolnost spolu s nutností řešení systému lineárních rovnic (99) a (100) ukazuje, že užití pseudonáhodného binárního signálu pro odhad koeficientů diferenční rovnice (15) není již tak elegantní jako v případě odhadu diskretních hodnot odezvy na jednotkový obdélníkový puls. Situace se zlepší, vyhodnocujeme-li velmi dlouhý interval pozorování ($L = \varrho N \rightarrow \infty$), kdy je možno užít vztahu

$$(106) \quad A_{ij} \approx -\text{sign}(\kappa) \frac{\bar{x}}{N}.$$

Na závěr uvedme ještě vyčíslení některých maticových součinů alespoň pro důležitý speciální případ

$$v = N - 1.$$

Je možno nalézt, že pro tento speciální případ platí

$$(107) \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_v + (N + 1) \mathbf{s}_v \mathbf{s}_v^T,$$

$$(108) \quad \mathbf{\Psi}^T \mathbf{P}^2 \mathbf{\Psi} = \mathbf{I}_m - (N - 1 - m) \mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T,$$

kde $m = n + 1$ je počet neznámých koeficientů b_i .

DODATEK

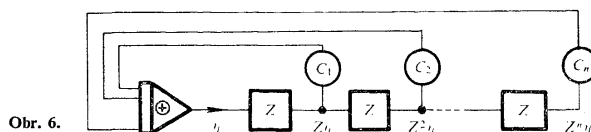
Generování pseudonáhodných binárních posloupností

Svou matematickou podstatou patří teorie pseudonáhodných binárních posloupností do teorie čísel, jejíž základy položili již Gauss a Galois. Širší praktické uplatnění našly však tyto posloupnosti teprve v teorii informace [10], [11], [12] a zde je pak objevili pracovníci zabývající se experimentálním určováním dynamických charakteristik soustav.

V tomto dodatku uvedeme formou návodu a bez teoretického zdůvodnění dva nejužívanější způsoby vytváření pseudonáhodných binárních posloupností.

Posuvné registry

Nejrozšířenější a z hlediska instrumentace velmi výhodný způsob vytváření pseudonáhodných binárních posloupností využívá tzv. posuvných registrů se zpětnou vazbou podle obr. 6. V tomto schématu značí η okamžitou hodnotu generované posloupnosti, která nabývá pouze hodnoty 1



nebo 0. Operátor Z značí zpoždění o jeden krok a $Z^i \eta(k) = \eta(k - i)$. V sumátoru se sčítají hodnoty přivedené na jeho vstup a to modulo 2, tj. podle schématu:

		b	
a	$a \oplus b$	0	1
	0	0	1
	1	1	0

Konstanty C_1 mohou mít hodnoty také jen 1 nebo 0 a udávají, zda se příslušný signál $Z^i \eta$ do sumátoru přivádí a nebo nepřivádí.

Z posloupnosti $\{\eta\}$ můžeme jednoduše pomocí relé odvodit pseudonáhodný binární signály y s požadovanými vlastnostmi použijeme-li přiřazení:

η	y
1	$+\kappa$
0	$-\kappa$

Samotné κ může být kladné nebo záporné číslo. V prvním případě bude ve shodě s (4) střední hodnota signálu kladná, ve druhém záporná. Matematicky lze zpětnovazební obvod na obr. 6 popsat diferenční rovnicí

$$\eta(k) = C_1 \eta(k-1) \oplus C_2 \eta(k-2) \oplus \dots \oplus C_n \eta(k-n) \quad (D1)$$

a posloupnost $\eta(k)$, $k = 1, 2, \dots$, která je jejím řešením, bude mít při libovolných počátečních podmínkách $\eta(0), \eta(-1), \dots, \eta(-n+1)$ (přičemž alespoň jedna z těchto hodnot není rovna nule) požadované vlastnosti a pro dané n maximální možnou periodu

$$N = 2^n - 1, \quad (D2)$$

bude-li charakteristický polynom diferenční rovnice

$$1 \oplus C_1 Z \oplus C_2 Z^2 \oplus \dots \oplus C_n Z^n \quad (D3)$$

tzv. primitivním polynomem (modulo 2). To znamená, že polynom

a) nesmí být rozložitelný na faktory (např. polynom $1 \oplus Z^2 \oplus Z^3$, $Z^4 = (1 \oplus Z) \cdot (1 \oplus Z \oplus Z^3)$ tuto podmínku nesplňuje, polynom $1 \oplus Z \oplus Z^4$ ji splňuje),

b) nesmí být sám faktorem polynomu typu $1 \oplus Z^k$, kde $k < N = 2^n - 1$ (např. polynom splňující prvou podmínku $1 \oplus Z \oplus Z^2 \oplus Z^3 \oplus Z^4$ tuto druhou podmínku nesplňuje, protože $(1 \oplus Z \oplus Z^2 \oplus Z^3 \oplus Z^4) (1 \oplus Z) = 1 \oplus Z^5$, naopak dříve uvedený polynom $1 \oplus Z \oplus Z^4$ splňuje i tuto druhou podmínku a je proto primitivní).

Tab. 1.

Primitivní polynomy s minimálním počtem nenulových koeficientů

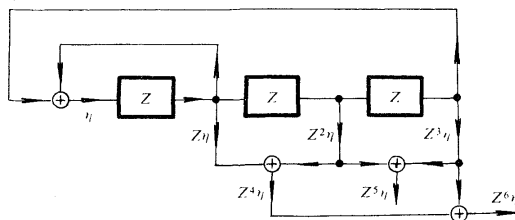
$$f(Z) = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + \dots + C_n Z^n$$

n	$N = 2^n - 1$	C_i										
		$i = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	I	I	I								
3	7	I	I	0	I							
4	15	I	I	0	0	I						
5	31	I	0	I	0	0	I					
6	63	I	I	0	0	0	0	I				
7	127	I	0	0	I	0	0	0	I			
8	255	I	0	I	I	I	0	0	0	I		
9	511	I	0	0	0	I	0	0	0	0	I	
10	1023	I	0	0	I	0	0	0	0	0	0	I

Pro každé $n > 4$ existuje více primitivních polynomů, nás však z pochopitelných důvodů zajímají především ty z nich, které mají minimální počet nenulových koeficientů C_i . Pro $n \leq 10$ jsou uvedeny v tab. 1.

Při generování pseudonáhodných binárních posloupností pomocí posuvného registru podle obr. 6 lze při minimálním rozsahu paměti (n bitů) v každém okamžiku k získat nejen hodnotu základní posloupnosti $\eta(k)$, ale i hodnoty všech zpožděných posloupností $Z^i \eta(k) = \eta(k-i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. Hodnoty zpožděných posloupností pro $i = 1, 2, \dots, n$ máme k dispozici přímo v registru a zbývající pro $i = n+1, n+2, \dots, 2^n-2$ lze z těchto základních odvodit jednoduchými logickými obvody. Někdy může být konstrukčně jednodušší prostě prodloužit posuvný registr. Protože vždy $C_n = 1$, platí podle (D1)

$$(D4) \quad \eta(k-n-i) = \eta(k-i) \oplus C_1 \eta(k-i-1) \oplus C_2 \eta(k-i-2) \oplus \dots \oplus C_{n-1} \eta(k-i-n+1).$$



Obr. 7.

Tak např. pro $n = 3$ dostaneme všech 7 hodnot $Z^i \eta(k)$, $i = 0, 1, \dots, 6$ při zapojení podle obr. 7. Vyjádříme-li získaný signál y pouze posloupností znamének, dostaneme při zapojení podle obr. 6 a pro $x > 0$

$$\dots \mid + + + - - - \mid + + + - - - \mid + + + \dots$$

Popsaný způsob generování pseudonáhodného binárního signálu je výhodný z hlediska jednoduché konstrukce příslušného generátoru. Jeho určitou nevýhodou je poměrně malá volnost ve výběru periody N , jak je to patrné z druhého sloupce v tab. 1.

Pokud máme možnost použít např. čtečky děrné pásky, můžeme generátor nahradit nekonečnou smyčkou děrné pásky, do které jsme předem vyděrovali jednu periodu pseudonáhodného signálu. V takovém případě může být výhodnější následující postup, který dává širší možnosti ve výběru periody.

Výpočet pomocí kvadratických reziduí

Postup, který nyní popíšeme, umožňuje konstruovat pseudonáhodnou binární posloupnost, jejíž perioda N je prvočíslo, pro které lze nalézt celé číslo K , takové, že platí

$$(D5) \quad N = 4K - 1.$$

Prvočísla, která splňují tuto podmínku jsou např. $N = 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71$ atd.

Splňuje-li perioda uvedené podmínky, potom lze zkonstruovat pseudonáhodný binární signál s vlastnostmi (3) a (4) tak, že položíme

$$y_k = +\kappa$$

pro všechna k , pro něž existuje celé číslo J takové, že je zbytkem podílu J^2/N , tj.

$$k \equiv J^2 \pmod{N} \quad (\text{D6})$$

a ve všech ostatních případech položíme:

$$y_k = -\kappa.$$

Tab. 2.

J	0	1	2	3	4	5
J^2	0	1	4	9	16	25
$J^2 \pmod{N}$	0	1	4	9	5	3

Pro určení jedné periody stačí uvažovat celá čísla v intervalu $0 \leq J \leq (N-1)/2$. Tak např. pro $N = 11$ můžeme sestavit tabulku 2, jejíž poslední řádek udává k , pro které $y_k = +\kappa$. Jedna perioda takto konstruované pseudonáhodné binární posloupnosti při $N = 11$ je tedy pro $\kappa > 0$ určena následující posloupností znamének:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sign y_k	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-

(Došlo dne 1. března 1968.)

LITERATURA

- [1] Identification in Automatic Control Systems. Preprints of the IFAC Symposium, Prague, 12.—17. June 1967.
- [2] Briggs P. A. N., Hammond P. H., Hughes M. T. G., Plumb G. O.: Correlation Analysis of Process Dynamics Using Pseudo-Random Binary Test Perturbations. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (U.K.) 179 (1964—65), part 34, 37.
- [3] Briggs P. A. N., Godfrey K. R., Hammond P. H.: Estimation of Process Dynamic Characteristics by Correlation Methods Using Pseudo Random Signals. V [1].
- [4] Krtolica R.: Some Applications of Pseudorandom Maximum Length Binary Sequences in the Statistical Identification. V [1].
- [5] Izawa K., Furuta K.: A Method of Determining Process Dynamics. Instrument a Measurement (1964).
- [6] Izawa K., Furuta K.: Apparatus to measure dynamic characteristics. 3rd IFAC Congress, London 1966.
- [7] Briggs P. A. N., Godfrey K. R.: Pseudorandom signals for the dynamic analysis of multi-variable systems. Proceedings IEE 113, (1966), 1259.
- [8] Herles V.: Amplitudové spektrum binárních, zejména pseudonáhodných signálů. Zpráva ÚTIA č. 195, září 1967.

- [9] Pěterka V.: Nový přístup k identifikaci diskretních dynamických soustav. *Kybernetika* 4 (1968), 5, 406–421.
- [10] Huffman W. H.: The Synthesis of Linear Sequential Coding Networks. Third London Symposium on Information Theory. Butterworths, 1956.
- [11] Peterson W. W.: Error correcting codes. Wiley, for M.I.T. Technical Press, 1961.
- [12] Ash R.: Information Theory, John Wiley, 1965.

SUMMARY

Application of Pseudorandom Binary Signals for Identification of Dynamic Systems

VÁCLAV PĚTERKA

Pseudorandom binary input signal (PRBS) is often used for experimental determination of the impulse response of a linear dynamic system [1–7]. In the present paper it is shown how the PRBS can be used also for the estimation of the coefficients of the transfer function.

In section 2 the PRBS is defined and its properties are summarized. Two most often used methods for generation of these signals are described in Appendix (the method using the shift registers and the method of quadratic residues).

When the output signal is sampled with the period equal to the basic interval of the PRBS only a discrete description of the system can be directly obtained. The relationship between discrete and continuous descriptions of a dynamic system (pulse response versus impulse response and difference equation versus differential equation) is given in section 3.

The section 4 is devoted to the determination of pulse response. In comparison with other papers it is not assumed that the expected value of the noise corrupting the output measurement is equal to zero. This expected value can be nonzero and unknown. It enables to use the results also in the case when the zero level of the output signal is not a priori known. The estimates of discrete values h_i ($i = 0, 1, \dots, v-1$) of the pulse response are given by the formula (63) where N is the period of PRBS, v is the number of nonzero values of pulse response which are estimated, κ is the amplitude of PRBS and φ_i is the pseudo-crosscorrelation function defined by (59). The formula (63) respects also the effect of nonzero mean value of PRBS which is usually neglected. The variance of estimates is given by formula (71) and in the case of white noise by formulae (75) and (76) where σ_n^2 denotes the variance of the noise. The diagram in Fig. 5 shows, that it has not much sense to use PRBS with the period N much longer than the "practical length" v of the impulse response.

In section 5 the estimates of the coefficients $\hat{a}$ and $\hat{b}$ of pulse transfer function of the system are derived. They are strongly consistent and can be obtained as a solution of a set of linear equations (99) and (100). The elements of the matrices in these equations are given by formulae (90) and (102) to (105). In the special case $v = N - 1$ the simplified formulae (107) and (108) can be used where I_v is an $(v \times v)$ unit matrix and s_v is an $(v \times 1)$ vector with all elements equal to one.

Ing. Václav Peterka, CSc, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.