KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 5/1969

Asymptotická distribuce výběrové informační míry závislosti

JANA ZVÁROVÁ

V článku zkoumáme asymptotické vlastnosti výběrového odhadu informační míry závislosti, která je dána vzorcem (1). Je odvozena podmínka pro rychlost konvergence výběrového odhadu ke správné hodnotě informační míry závislosti a určena asymptotická distribuce výběrového odhadu.

1. ÚVOD

V práci [1], [2] A. Perez navrhl veličinu, nazvanou informační míra závislosti, která měří sílu statistické vazby mezi dvěma náhodnými elementy. (Náhodným elementem rozumíme veličinu, která nabývá hodnot z libovolné abstraktní abecedy s daným pravděpodobnostním rozložením.) Informační míra závislosti nabývá hodnot v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a obecně není symetrickou funkcí náhodných elementů. Krajní hodnotu 0 nabývá právě když uvažované náhodné elementy jsou vzájemně nezávislé, krajní hodnotu 1 při jejich deterministické závislosti. Hodnota informační míry závislosti se nezmění při transformaci náhodných elementů změnou měřítka.

V tomto článku se zabýváme výběrovým odhadem informační míry závislosti a jeho asymptotickými vlastnostmi. Ukážeme, že uvažovaný výběrový odhad má většinou asymptoticky normální rozložení se střední hodnotou rovnou správné hodnotě informační míry závislosti a rozptylem úměrným převrácené hodnotě rozsahu výběru. Avšak při platnosti určité podmínky se stane, že limitní rozptyl je nepřímo úměrný čtverci rozsahu výběru. Asymptotická distribuce výběrové informační míry závislosti je potom určena distribucí kvadratické formy v náhodných proměnných s normálním rozložením a hodnotou entropie jednoho z náhodných elementů (o který náhodný element jde, určí směr zkoumané závislosti).

Při odvozování asymptotických vlastností výběrové informační míry závislosti používáme postupu vypracovaného v článku [7] pro odvození asymptotických vlastností výběrové informace. Podmínka, určující rychlost konvergence výběrového odhadu ke správné hodnotě parametru, je však obecně odlišná pro případ výběrové informační míry závislosti a výběrové informace. V závěru práce uvádíme několik příkladů, kdy stanovená podmínka je splněna.

Nechť $(X, \mathfrak{X})$ je měřitelný vstupní prostor a $(Y, \mathfrak{Y})$ je měřitelný výstupní prostor. Nechť dále $\{P_{Y/x}, x \in X\}$ je množina pravděpodobnostních distribucí na měřitelném prostoru $(Y, \mathfrak{Y})$. Předpokládejme, že pro každou množinu $F \in \mathfrak{Y}$ je $P_{Y/x}(F)$ (jako funkce proměnné x) $\mathfrak{X}$-měřitelná. Množinu $\{P_{Y/x}, x \in X\}$ nazýváme kanálem se vstupní σ-algebrou $\mathfrak{X}$ a výstupní σ-algebrou $\mathfrak{Y}$ a značíme $(\mathfrak{X}, P_{Y/x}, \mathfrak{Y})$ [3], [4]. Mějme dánu pravděpodobnostní distribuci P_X na měřitelném prostoru $(X, \mathfrak{X})$. Trojici $(X, \mathfrak{X}, P_X)$ nazýváme zdroj informace. Nechť zdroj informace $(X, \mathfrak{X}, P_X)$ je přímo připojený na vstup kanálu $(\mathfrak{X}, P_{Y/x}, \mathfrak{Y})$. Označme $(X \times Y, \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, P_{XY})$ indukovaný dvojitý zdroj a $(Y, \mathfrak{Y}, P_Y)$ indukovaný výstupní zdroj [3], kde P_{XY} (resp. P_Y) je indukovaná pravděpodobnostní míra na měřitelném prostoru $(X \times Y, \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ (resp. $(Y, \mathfrak{Y})$).

V našem článku uvažujeme případ, kdy $(X, \mathfrak{X})$, $(Y, \mathfrak{Y})$ jsou konečné měřitelné prostory $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $r > 1$, $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$, $s > 1$, a σ-algebra $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) obsahuje všechny jednobodové množiny prostoru X (resp. Y). Předpokládejme dále, že $\{\mathfrak{X}, P_{Y/x}, \mathfrak{Y}\}$ je diskrétní kanál bez paměti ve smyslu [5], [6]. Pro jednoduchost značíme $p_{i.}$, $(0 < p_{i.} < 1)$ hodnotu pravděpodobnostní míry P_X na množině $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, $p_{.j}$ $(0 < p_{.j} < 1)$ hodnotu pravděpodobnostní míry P_Y na množině $\{y_j\}$, $j = 1, \ldots, s$ a p_{ij}, $(0 \leqq p_{ij} \leqq 1)$, hodnotu pravděpodobnostní míry P_{XY} na množině $\{(x_i, y_j)\}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$.

Jak je známo z literatury [4], [5] jsou v daném případě hodnoty informace $I(X, Y)$, vstupní entropie $H(X)$ a výstupní entropie $H(Y)$ dány výrazy:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{p_{i.} p_{.j}},$$

kde pro $p_{ij} = 0$ příslušný sčítanec klademe rovný nule,

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{r} p_{i.} \ln p_{i.},$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{s} p_{.j} \ln p_{.j},$$

kde ln označuje přirozený logaritmus.

Informační míra závislosti vstupního náhodného elementu na výstupním (resp. výstupního náhodného elementu na vstupním) je dle [1], [2] definována:

(1) $$z(X/Y) = \frac{I(X, Y)}{H(X)},$$

respektive

$$z(Y/X) = \frac{I(X, Y)}{H(Y)}.$$

Zkoumejme nyní zadaný systém v případě, kdy všechny pravděpodobnosti p_{ij}, $p_{i.}$, $p_{.j}$ jsou neznámé hodnoty. Proveďme posloupnost n vzájemně nezávislých pokusů na vstupu kanálu. Protože uvažovaný kanál je bez paměti jsou i prvky posloupnosti odpovídajících pozorování na výstupu vzájemně nezávislé. Neznámé pravděpodobnosti p_{ij}, $p_{i.}$, $p_{.j}$ odhadneme na základě pokusu pomocí maximálně věrohodných odhadů $\hat{p}_{ij}$, $\hat{p}_{i.}$, $\hat{p}_{.j}$, které jsou dány výrazy:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad \hat{p}_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}, \quad \hat{p}_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}, \tag{2}$$

kde n_{ij} je počet pokusů příznivých výskytu bodu (x_i, y_j) prostoru $X \times Y$, $n_{i.}$ počet pokusů příznivých výskytu bodu x_i prostoru X a $n_{.j}$ počet pokusů příznivých výskytu bodu y_j prostoru Y. Výběrové odhady informační míry závislosti $z(X/Y)$ resp. $z(Y/X)$ jsou dány výrazy:

$$\hat{z}(X/Y) = \frac{\hat{I}(X, Y)}{\hat{H}(X)}, \tag{3}$$

respektive

$$\hat{z}(Y/X) = \frac{\hat{I}(X, Y)}{\hat{H}(Y)},$$

kde

$$\hat{I}(X, Y) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{ij} \ln \frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}_{i.}\, \hat{p}_{.j}},$$

$$\hat{H}(X) = -\sum_{i=1}^{r} \hat{p}_{i.} \ln \hat{p}_{i.},$$

$$\hat{H}(Y) = -\sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{.j} \ln \hat{p}_{.j}.$$

Dále budeme studovat vlastnosti výběrové informační míry $\hat{z}(X/Y)$. Všechny úvahy pro $\hat{z}(Y/X)$ jsou analogické. Proveďme následující rozklad:

$$\hat{z}(X/Y) - z(X/Y) = \frac{W + H(X)\, U_0 + [I(X, Y) - H(X)]\, U_1 - H(X)\, U_2}{H(X)\, \hat{H}(X)}, \tag{4}$$

kde

$$W = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (\hat{p}_{ij} - p_{ij})\, c_{ij}, \quad c_{ij} = H(X) \ln \frac{p_{ij}}{p_{i.} p_{.j}} + I(X, Y) \ln p_{i.},$$

$$U_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{ij} \ln \frac{\hat{p}_{ij}}{p_{ij}},$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^{r} \hat{p}_{i.} \ln \frac{\hat{p}_{i.}}{p_{i.}}, \tag{5}$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{.j} \ln \frac{\hat{p}_{.j}}{p_{.j}}.$$

Náhodné veličiny U_i, $i = 0, 1, 2$ zavedli již autoři článku [7] při odvozování asymptotických vlastností výběrové informace. Označme:

$$Z_{ij}^{(n)} = n^{1/2}(\hat{p}_{ij} - p_{ij}),\qquad (6)$$

$$Z_{i.}^{(n)} = n^{1/2}(\hat{p}_{i.} - p_{i.}),$$

$$Z_{.j}^{(n)} = n^{1/2}(\hat{p}_{.j} - p_{.j}).$$

Sdružené rozložení náhodných veličin $Z_{ij}^{(n)}$ je asymptoticky mnohorozměrné normální rozložení s nulovými středními hodnotami a konstantními rozptyly. (Dle věty o asymptotických vlastnostech maximálně věrohodných odhadů [8] Sec. 33.3.) Náhodná veličina $n^{1/2}W$ je lineární kombinace náhodných veličin $Z_{ij}^{(n)}$ a tedy ([8] Sec. 24.4., 10 § 11.4) má asymptoticky normální rozložení s nulovou střední hodnotou a rozptylem daným výrazem:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{D}n^{1/2}W = \lim_{n\to\infty} n\mathsf{E}W^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}\sum_{k,l} c_{ij}c_{kl}n\mathsf{E}(\hat{p}_{ij} - p_{ij})(\hat{p}_{kl} - p_{kl}) = \qquad (7)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}\sum_{k,l} c_{ij}c_{kl}\operatorname{cov}[Z_{ij}^{(n)}, Z_{kl}^{(n)}].$$

V uvažované situaci maximálně věrohodné odhady $\hat{p}_{ij}$ mají sdruženou distribuci multinomickou (tedy asymptoticky normální [8]) a platí:

$$\operatorname{cov}[Z_{ij}^{(n)}, Z_{kl}^{(n)}] = n\operatorname{cov}[\hat{p}_{ij}, \hat{p}_{kl}] = p_{ij}(\delta_{ik}\delta_{jl} - p_{kl}),\qquad (8)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol ($\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Pomocí (8) upravíme výraz (7) a asymptotický rozptyl náhodné veličiny $n^{1/2}W$ dostaneme ve tvaru:

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{D}n^{1/2}W = \sum_{i,j}\sum_{k,l} c_{ij}c_{kl}p_{ij}(\delta_{ik}\delta_{jl} - p_{kl}) = \sum_{i,j} c_{ij}^2 p_{ij} - (\sum_{i,j} c_{ij}p_{ij})^2 .$$

Použitím Schwartzovy nerovnosti a $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ dostaneme:

$$(\sum_{i,j} p_{ij}^{1/2} p_{ij}^{1/2} c_{ij})^2 \leqq \sum_{i,j} p_{ij}c_{ij}^2 .$$

Rovnost ve Schwartzově nerovnosti nastane právě když pro všechna i, j, c_{ij} je rovno konstantě. Můžeme tedy shrnout: Asymptotický rozptyl náhodné veličiny $n^{1/2}W$ nabývá hodnoty nula právě když pro každé p_{ij} platí:

$$p_{ij}(p_{ij} - \alpha p_{i.}^{\varkappa} p_{.j}) = 0,\qquad (10)$$

kde $\varkappa = 1 - [I(X, Y)/H(X)]$ a α je kladná konstanta.

V článku [7] je proveden rozvoj náhodných veličin $2nU_i$, $i = 0, 1, 2$ v mocninou řadu, který dále použijeme:

$$\begin{aligned}(11)\qquad 2nU_0 &= \sum_{i,j} p_{ij}^{-1} Z_{ij}^{2(n)} + n^{-1/2}\tau_0 \sum_{i,j} p_{ij}^{-2} Z_{ij}^{3(n)}\,,\\ 2nU_1 &= \sum_i p_{i.}^{-1} Z_{i.}^{2(n)} + n^{-1/2}\tau_1 \sum_i p_{i.}^{-2} Z_{i.}^{3(n)}\,,\\ 2nU_2 &= \sum_j p_{.j}^{-1} Z_{.j}^{2(n)} + n^{-1/2}\tau_2 \sum_j p_{.j}^{-2} Z_{.j}^{3(n)}\,,\end{aligned}$$

kde $0 < \tau_i < 1$ pro $i = 0, 1, 2$.

Nesplňuje-li systém podmínku (10), má náhodná veličina

$$(12)\qquad n^{1/2}\{W + H(X)\,U_0 + [I(X, Y) - H(X)]\,U_1 - H(X)\,U_2\}$$

asymptoticky normální rozložení s nulovou střední hodnotou a rozptylem daným (9). Tento závěr plyne z vlastnosti náhodných veličin $n^{1/2}U_i$, $i = 0, 1, 2$, které (jak je patrno z rozvoje (11)) konvergují v pravděpodobnosti k nule. Použijeme-li významné věty o konvergenci ([8], Sec. 20.6.) vidíme, že asymptotická distribuce náhodné veličiny dané výrazem (12) je stejná jako asymptotická distribuce náhodné veličiny $n^{1/2}W$. Výběrový odhad entropie $\hat{H}(X)$ je konsistentním odhadem správné hodnoty entropie $H(X)$ [7], [9]. Opětným použitím věty o konvergenci ([8] Sec. 20.6.) dostaneme následující výsledek:

Nesplňuje-li systém podmínku (10), distribuce náhodné veličiny $n^{1/2}[\hat{z}(X/Y) - z(X/Y)]$ je asymptoticky normální s nulovou střední hodnotou a rozptylem:

$$(13)\qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{D} n^{1/2}[\hat{z}(X/Y) - z(X/Y)] = \frac{\sum_{i,j} p_{ij}c_{ij}^2 - (\sum_{i,j} p_{ij}c_{ij})^2}{H^4(X)}\,.$$

V případě, že systém je vázaný podmínkou (10), W je identicky rovno nule a náhodná veličina $n^{1/2}[\hat{z}(X/Y) - z(X/Y)]$ konverguje v pravděpodobnosti k nule. V tomto případě studujme asymptotickou distribuci náhodné veličiny $2n[\hat{z}(X/Y) - z(X/Y)]$. Z rozpisu (11) a použitím věty o konvergenci [8] dostaneme, že asymptotická distribuce náhodné veličiny

$$2n\{W + H(X)\,U_0 + [I(X/Y) - H(X)]\,U_1 - H(X)\,U_2\}$$

je stejná jako asymptotická distribuce kvadratické formy

$$Q^{(n)} = H(X)\sum_{i,j} p_{ij}^{-1} Z_{ij}^{2(n)} + [I(X, Y) - H(X)]\sum_i p_{i.}^{-1} Z_{i.}^{2(n)} - H(X)\sum_j p_{.j}^{-1} Z_{.j}^{2(n)}\,.$$

Z definice (6) plyne, že $Q^{(n)}$ je kvadratická forma v náhodných proměnných $Z_{ij}^{(n)}$. Pro $p_{ij} = 0$ klademe $Z_{ij}^{(n)} = 0$ identicky. Označme k počet nenulových p_{ij}. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $p_{rs} \neq 0$. Potom (vzhledem k podmínce $\sum_{i,j} Z_{ij}^{(n)} = 0$) nahradíme ve formě $Q^{(n)}$ náhodnou proměnnou $Z_{rs}^{(n)}$ výrazem $-\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{s-1} Z_{ij}^{(n)}$. Kvadratickou formu $Q^{(n)}$ převedeme tímto způsobem na formu v $(k-1)$ náhodných proměnných s kovarianční maticí $\Lambda = (\lambda_{(i,j),(k,l)})$, kde pro prvky matice Λ (viz (8)) platí:

$$\lambda_{(i,j),(k,l)} = p_{ij}(\delta_{ik}\delta_{jl} - p_{kl}) .$$

Λ je nesingulární matice, která je pozitivně definitní. Existuje k ní tedy matice inverzní Λ^{-1} s prvky $\lambda^{-1}_{(i,j),(k,l)}$, kde

$$\lambda^{-1}_{(i,j),(k,l)} = \delta_{ik}\delta_{jl}p_{ij}^{-1} + p_{rs}^{-1} .$$

Kovarianční matice Λ nezávisí na n, je tedy i kovarianční maticí sdružené limitní distribuce uvažovaných náhodných proměnných $Z_{ij}^{(n)}$. Označme $\boldsymbol{Z}^{(n)}$ sloupcový vektor z $(k-1)$ náhodných veličin $Z_{ij}^{(n)}$. Z definice (6) plyne, že sdružená asymptotická distribuce náhodných veličin $\boldsymbol{Z}^{(n)}$ má $(k-1)$ rozměrné normální rozložení s hustotou

$$f(z) = [\operatorname{Det}(\Lambda)]^{-1/2}\,(2\pi)^{(1-k)/2}\exp\left[-\tfrac{1}{2}z'\Lambda^{-1}z\right],$$

kde z značí hodnotu limitní náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ se složkami Z_{ij}, příslušné k $\boldsymbol{Z}^{(n)}$ (z' je transponovaný vektor k z). Asymptotická distribuce kvadratické formy $Q^{(n)}$ v $(k-1)$ proměnných $Z_{ij}^{(n)}$ je distribuce formy:

$$Q = H(X)\sum_{i,j}p_{ij}^{-1}Z_{ij}^2 + [I(X,Y) - H(X)]\sum_i p_{i.}^{-1}Z_{i.}^2 - H(X)\sum_j p_{.j}^{-1}Z_{.j}^2$$

v $(k-1)$ proměnných Z_{ij}. Jak je uvedeno v [11] (kap. 10, § 6) existuje reálná nesingulární transformace náhodných proměnných Z_{ij} na náhodné proměnné u_l, která převádí $\boldsymbol{Z}'\Lambda^{-1}\boldsymbol{Z}$ na $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{k-1}^2$ a Q na $\lambda_1u_1^2 + \lambda_2u_2^2 + \ldots + \lambda_{k-1}u_{k-1}^2$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ jsou charakteristická čísla matice $A\Lambda$, kde A je matice formy Q (i formy $Q^{(n)}$). Náhodné veličiny u_l, $l = 1, 2, \ldots, (k-1)$ jsou nezávislé, normálně rozložené, s nulovými středními hodnotami a jednotkovými rozptyly. Asymptotická distribuce kvadratické formy $Q^{(n)}$ je tedy distribuce formy Q převedené do tvaru:

$$Q = \lambda_1u_1^2 + \lambda_2u_2^2 + \ldots + \lambda_{k-1}u_{k-1}^2 ,$$

kde u_l, $l = 1, 2, \ldots, (k-1)$ jsou nezávislé normované gaussovské proměnné. Označíme-li $F(t)$ distribuční funkci formy Q, opětným použitím věty o konvergenci [8] a konsistence výběrového odhadu $\hat{H}(X)$ dostaneme:

Asymptotická distribuční funkce náhodné veličiny $2n[\hat{z}(X/Y) - z(X/Y)]$ je při platnosti podmínky (10) dána vztahem $G(t) = F[H^2(X)\,t]$, kde $F(t)$ je distribuční funkce formy Q.

3. PŘÍKLADY

Mezi systémy splňující podmínku (10) se řadí i dva důležité případy: případ vzájemné nezávislosti a případ deterministické závislosti.

A. *Případ deterministické závislosti.* V tomto případě $p_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $p_{ii} = p_{i.} = p_{.i}$, tedy $\varkappa = 0$. Podmínka (10) je splněna s $\alpha = 1$. Je však zřejmé, že v tomto případě $\hat{z}(X/Y) = z(X/Y)$ identicky.

B. *Případ vzájemné nezávislosti.* Systém má pravděpodobnosti vázané podmínkou: $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ pro $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, s$, tedy $\varkappa = 1$. Podmínka (10) je opět splněna s $\alpha = 1$. Asymptotická distribuční funkce náhodné veličiny $2n[\hat{z}(X/Y) - z(X/Y)]$ je v tomto případě $R[H(X)\,t]$, kde $R(t)$ značí distribuční funkci χ^2-rozložení s $(r - 1)(s - 1)$ stupni volnosti (viz [7] str. 268 a tvar Q v případě $I(X, Y) = 0$). Pro systémy splňující podmínku (10) se všemi pravděpodobnostmi $p_{ij} > 0$ můžeme vyslovit obecný poznatek: **Systém splňující podmínku (10) se všemi $p_{ij} > 0$ splňuje podmínku nezávislosti tj. $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ pro všechna i, j.**

Důkaz:

$$0 < p_{ij} = \alpha p_{i.}^{\varkappa} p_{.j}\,, \quad 0 < p_{gj} = \alpha p_{g.}^{\varkappa} p_{.j}\,,$$

$$0 < p_{ik} = \alpha p_{i.}^{\varkappa} p_{.k}\,, \quad 0 < p_{gh} = \alpha p_{g.}^{\varkappa} p_{.h}\,,$$

tedy

$$\frac{p_{.j}}{p_{.h}} = \frac{p_{ij}}{p_{ih}} = \frac{p_{gj}}{p_{gh}}$$

a

$$p_{ij} = \frac{p_{gj}}{p_{gh}} \cdot p_{ih}\,.$$

Pro $g = h = 1$ máme

$$p_{ij} = \frac{p_{1j}p_{i1}}{p_{11}}\,,$$

tedy

$$1 = \sum_{i,j} p_{ij} = \frac{p_{1.}p_{.1}}{p_{11}}$$

a

$$\sum_j p_{ij} = p_{i.} = \frac{p_{i1}}{p_{11}}\, p_{1.}\,,$$

$$\sum_i p_{ij} = p_{.j} = \frac{p_{1j}}{p_{11}}\, p_{.1}\,.$$

Dostáváme

$$p_{i.}p_{.j} = \frac{p_{1.}p_{.1}}{p_{11}} \cdot \frac{p_{1j}p_{i1}}{p_{11}} = p_{ij}$$

a systém splňuje podmínku nezávislosti.

C. *Platnost podmínky* (10) *v případě rovnoměrného rozložení na vstupu.* V případě rovnoměrného rozložení na vstupu je platnost podmínky (10) ekvivalentní s platností podmínky z článku [7] pro rychlost konvergence výběrové informace. Podmínka z článku [7] je tvaru:

$$p_{ij}(p_{ij} - \beta p_{i.} p_{.j}) = 0 \tag{14}$$

pro všechna i, j, kde β je kladná konstanta. Obě podmínky lze přepsat na společný tvar:

$$p_{ij}(p_{ij} - \gamma p_{.j}) = 0$$

pro všechna i, j kde γ je kladná konstanta. V tomto případě systém zřejmě má následující vlastnosti:

C 1: Počet nenulových p_{ij} je stejný pro všechna j.

Důkaz. Označme n_j počet nenulových p_{ij} pro dané j. Potom

$$\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} = p_{.j} = n_j \gamma p_{.j}$$

tedy

$$n_j = \frac{1}{\gamma}$$

pro všechna j.

C 2. Označme $\sum_j^{(i)} p_{.j}$ součet všech $p_{.j}$ pro která $p_{ij} > 0$. Potom $\sum_j^{(i)} p_{.j} = 1/r\gamma$, kde r je počet bodů prostoru X.

Důkaz:

$$\sum_j p_{ij} = \frac{1}{r} = \gamma \sum_j^{(i)} p_{.j}$$

tedy

$$\sum_j^{(i)} p_{.j} = \frac{1}{r\gamma}.$$

Systém splňující podmínku (10) v případě rovnoměrného vstupu je tedy například systém s $r = 4$, $s = 4$ a maticí pravděpodobností (p_{ij}) ve tvaru:

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

D. *Systém s nerovnoměrným vstupem, který splňuje podmínku* (14). Systém s těmito vlastnostmi má pravděpodobnosti vázané vztahem $p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$ a splňuje tedy podmínku nezávislosti.

Důkaz:

$$p_{ij} = \beta p_{i.} p_{.j} = \alpha p_{i.}^{\varkappa} p_{.j}$$

pro $p_{ij} \neq 0$, tedy $p_{i.}^{[I(X,Y)]/H(X)} = c$, kde c je konstanta nezávislá na i. Vzhledem k nerovnoměrnosti vstupu nutně $I(X, Y) = 0$ a systém splňuje podmínku nezávislosti.

E. *Systém s dvoubodovým vstupním a dvoubodovým výstupním prostorem.* Dokážeme, že tento systém splňuje podmínku (10) pouze v případě vzájemné nezávislosti nebo deterministické závislosti.

Důkaz: Jsou-li všechna $p_{ij} > 0$ viz B. Jsou-li právě dvě $p_{ij} = 0$ viz A. Nechť existuje právě jedno $p_{ij} = 0$. Předpokládejme, že $p_{21} = 0$. Potom

$$p_{11} = \alpha(p_{11} + p_{12})^{\varkappa} p_{11},$$

$$p_{12} = \alpha(p_{11} + p_{12})^{\varkappa} (p_{12} + p_{22}),$$

tedy

$$\frac{p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{11}}{p_{12} + p_{22}}$$

a

$$p_{12} + p_{22} = 1 - p_{11}.$$

Z předchozích vztahů plyne $p_{12} = 1 - p_{11}$ a tedy $p_{22} = 0$, spor s předpokladem $p_{22} \neq 0$.

(Došlo dne 17. dubna 1968.)

LITERATURA

[1] Perez A.: Contributions de la théorie de l'information à la cybernétique. 4-e congrés international de cybernétique, Namur, 19–23 Octobre 1964, A. Ryckmans, Namur 1967.

[2] Nikl J., Perez A.: Aplikace metod teorie informace při studiu závislostí v biologických systémech. Československá fysiologie 10 (1961), 5.

[3] Perez A.: Matematická teorie informace. Aplikace matematiky 3 (1958), 1, 1–21; 2, 81–105.

[4] Perez A.: Notions généralisées d'incertitude d'entropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales. Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Prague 1957, 183–208.

[5] Feinstein A.: Foundations of Information Theory. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1958.

[6] Wolfowitz J.: Coding Theorems of Information Theory. Second edition, Springer-Verlag, Berlin 1964.

[7] Lomnicki Z. K., Zaremba S. K.: The Asymptotic Distributions of Estimators of the Amount of Transmitted Information. Information and control 2 (1959), 260–284.

[8] Cramer H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1946.

[9] Башарин Г. П.: О статистической оценке энтропии последовательности независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения (1959), 4, 361—364.
[10] Loeve M.: Probability Theory. Second edition, D. Van Nostrand Company, Princeton 1960.
[11] Гантмахер Ф. П.: Теория матриц. Наука, Москва 1966.

SUMMARY

The Asymptotic Distribution of Sample Information Measure of Dependence

Jana Zvárová

This article deals with the asymptotic properties of the sample estimate of information measure of dependence. This information measure of dependence was introduced by A. Perez in [1], [2] and in our article it is given by (1). By means of results given in [7] we derive some asymptotic properties of the sample estimate of this information measure of dependence. The rate of convergence for sample estimate is expressed by condition (10) and also the asymptotic distribution of the sample estimate is found.

Jana Zvárová, prom. mat., Fakulta dětského lékařství KU, Praha 2, Sokolská 2.