Část II. Strategické hry a racionální jednání

Matematické modely konfliktních situací — strategické hry — se budují jako nástroj k rozboru jednání na konfliktu zúčastněných zájmových skupin, a to především z hlediska racionality tohoto jednání. Cílem analysy konfliktu je na jedné straně *předpovědět* a *vysvětlit* jednání účastníků konfliktní situace, zvláště za předpokladu, že lze tyto účastníky považovat za racionální, a na druhé straně poskytnout účastníkům *návod k jednání*, které by vyústilo ve výsledek konsistentní s jejich zájmy, a tedy „rozumný". Vybudování obecné teorie zaměřené na analysu konfliktních situací pak umožňuje empiricky *ověřit* naše intuitivní představy o tom, co lze chápat jako rozumné jednání při konfliktu zájmů, a tím na základě případných odchylek mezi teorií a skutečností motivovat nové pojmy, vedoucí k prohloubení teoretických poznatků o realitě v sociální sféře.

Obsahem druhé části naší stati bude systematicky a postupně konstruovat jasně motivovanou matematickou teorii, která by umožnila racionální předpověď jednání a výsledku konfliktu a současně orientovala účastníky konfliktu v jejich možnostech jednání, vyúsťujících ve výsledky racionálního charakteru. Autor je přesvědčen, že důraz na motivaci teorie představuje nejschůdnější cestu k tomu, aby si čtenář ujasnil nejenom to, jak málo je v teorii racionálního jednání uděláno, ale také kde se vyskytují hlavní mezery v obecné teorii, jež je třeba v budoucnu zaplňovat.

Odkazy na literaturu k I. i II. části budou uvedeny na konci celé stati spolu se soupisem nejdůležitějších článků a knih.

7. ROZHODOVÁNÍ A PREDIKCE

Analysa konfliktní situace

Úkolem, kterým se máme zabývat, je odpovědět na základě analysy konfliktní situace na otázku, jaký způsob jednání racionální účastníci konfliktní situace zvolí, a tedy v jaký výsledek situace vyústí. Za model konfliktní situace, o nějž se v tomto rozboru opřeme, vezmeme strategickou hru s vyznačenou kooperací v normálním tvaru (s kardinálními preferencemi):

$$(I, \Omega_E, \{U_i\}_{i \in I}, (\boldsymbol{K}, (\{A_i\}_{i \in I}, \varrho))) ; \tag{7.1}$$

normální tvar totiž zahrnuje všechna pro analysu konfliktu relevantní data v celé úplnosti, a to bez přítěže detailů pro rozbor racionálního jednání nepodstatných (srovn. paragraf o základním postulátu racionality v kap. 5). V postulátu o znalosti hry tedy navíc předpokládáme, že každý racionální hráč zná ještě množinu všech přípustných koaličních struktur a že interpretuje rozšířenou objektivní basi hry podle principu realisace rozšířených pravidel.

Kterýkoli možný způsob jednání hráčů má obecně pravděpodobnostní charakter a v modelu konfliktní situace (7.1) je vyjádřen jako globální smíšená strategie (srovn. (6.38)). Je-li zvoleným způsobem jednání globální smíšená strategie $s \in S$, skončí se realisace hry smíšeným výsledkem $\varrho(s)$ (srovn. (6.40)); připomeňme, že strategii s lze realisovat náhodovým mechanismem vedoucím k vektoru strategií $a \in A$ s pravděpodobností $s(a)$.

Základní idea při hledání odpovědi na shora položenou otázku záleží v tom, že se na základě rozboru konfliktu snažíme vyloučit ty způsoby jednání, jejichž volba odporuje našim intuitivním představám o racionalitě účastníků. Pro strategickou hru (7.1) to znamená zredukovat třídu všech globálních strategií S na některou třídu S_0 (tj. $S_0 \subset S$), která obsahuje právě ty globální strategie, které se shodují s přesně vymezeným pojetím racionality hráčů. Nejpříznivějším případem je ten, kdy třída S_0 obsahuje právě jeden prvek s_0. Např. v „dilematu vězně“ chápaném jako nekooperativní hra, které jsme popsali na začátku kap. 6, lze ukázat, že jedinou globální strategií konsistentní s předpokladem racionality obou vězňů je ryzí vektor strategií charakterisující způsob jednání, že se oba vězňové přiznají. Tudíž v nejpříznivějším případě, kdy $S_0 = \{s_0\}$, můžeme předpovědět, že racionální hráči zvolí globální strategii s_0, a obráceně můžeme doporučit hráčům jako rozumné jednání dohodnout se na globální strategii s_0.

Za velmi příznivý případ lze pokládat ještě ten, kdy sice třída S_0 obsahuje více prvků, třeba i nekonečně mnoho, ale kdy každá globální strategie $s \in S_0$ vede k jednomu a témuž výsledku ω_0:

$$\varrho(s) = \omega_0 \quad \text{pro každé} \quad s \in S_0 .$$

Způsob jednání hráčů nelze sice jednoznačně předpovědět, ale lze jednoznačně předpovědět výsledek. Přitom hráčům můžeme doporučit jako rozumné jednání, aby se dohodli na libovolné globální strategii $s \in S_0$. V antagonistické hře tento velmi příznivý případ nastává, a to aniž je přitom třeba dohody mezi protivníky (srovn. (6.93) a text za touto podmínkou následující): Je-li $\tilde{S}_1$ množina všech garančních strategií prvního hráče a $\tilde{S}_2$ množina všech garančních strategií druhého hráče v antagonistické hře, lze ukázat, že množina S_0 je vyjádřena kartézským součinem

$$S_0 = \tilde{S}_1 \times \tilde{S}_2$$

(srovn. (6.81)), přičemž

$$\varrho(s_1, s_2) = \varrho(s_1', s_2') \quad \text{pro libovolná} \quad s_1, s_1' \in \tilde{S}_1, s_2, s_2' \in \tilde{S}_2 .$$

Jako rozumné jednání lze každému z obou hráčů doporučit, aby zvolil některou svou garanční strategii nezávisle na svém protivníkovi.

V obecném případě mohou ležet ve třídě S_0 globální strategie s, s' takové, že $\varrho(s) \neq \varrho(s')$ a ještě navíc

$$\varrho(s) \succ_i \varrho(s') \quad \text{pro každé} \quad i \in I\ ;$$

uvidíme totiž, že konsistence obou globálních strategií s racionalitou předpokládanou u všech hráčů ještě nevylučuje, že první způsob jednání vede k výsledku, který je lepší z hlediska všech hráčů než výsledek, k němuž vede druhý způsob jednání. Za této situace bychom ovšem hráčům doporučili globální strategii s jako rozumnější způsob jednání, než je globální strategie s', i když obě strategie patří do třídy „rozumných", tj. takových, které lze racionálně očekávat. Jak uvidíme, představují „rozumné" způsoby jednání jakási lokální optima, která někdy můžeme mezi sebou porovnávat z hlediska preferencí hráčů.

V jistém smyslu nejhorší je případ, kdy třída S_0 „rozumných" globálních strategií je prázdná. Tu se buď můžeme postavit na pesimistické stanovisko, že strategická hra s vlastností $S_0 = \emptyset$ představuje model konfliktu, který není rozumně řešitelný, nebo můžeme vyjít z optimistického hlediska, že je třeba v takovém případě zmírnit naše požadavky na to, které způsoby jednání lze považovat ještě za racionální.

V případech, jimiž se budeme převážně zabývat, budeme moci zaručit, že třída S_0 je neprázdná, a přitom obvykle ještě velmi bohatá nejenom co do počtu svých prvků, nýbrž i co do počtu výsledků, k nimž rozumné způsoby jednání vedou. Zde stojíme před opačným problémem, než když třída S_0 je prázdná. Máme opět dvě alternativy: buď zpřísnit požadavky na pojetí racionality jednání, tj. dále zúžit třídu S_0, nebo naopak připustit, že lze každý prvek ze třídy S_0 racionálně očekávat, a vyšetřovat čtveřici

$$(7.2) \qquad (I, \Omega_E, \{U_i\}_{i \in I}, (\mathscr{K}_I, (S_0, \varrho)))$$

jako dohodovou hru (již nikoli obecně konečnou).

Studium matematického modelu (7.2) jako dohodové hry, v níž se všichni hráči sdruží, aby ve vzájemné dohodě zvolili některou globální strategii $s \in S_0$ s výsledkem $\varrho(s)$, popisuje obecně poněkud odlišný typ konfliktu, než je původní hra (7.1). Jde o konfliktní situaci, v níž její účastníci vyjednávají o zvolení společné preferenční stupnice U v množině všech pro ně dosažitelných výsledků

$$\Omega_0 = \varrho(S_0) = \{\varrho(s) : s \in S_0\}\ .$$

Podle dohodnuté preferenční stupnice U pak hráči najdou maximální výsledek ω, který je charakterisován vlastností, že $\omega U \omega'$ pro všechna $\omega' \in \Omega_0$, a na základě maximálního výsledku ω zvolí jako způsob jednání takovou globální smíšenou strategii $s \in S_0$, pro niž jest $\varrho(s) = \omega$.

Dohodnutá preferenční stupnice U musí vyhovovat samozřejmému požadavku, aby výsledek, jemuž dávají všichni hráči současně přednost proti jinému výsledku, byl preferován také podle U: když $\omega U_i \omega'$ pro všechna $i \in I$, pak $\omega U \omega'$. Hráčům dáváme jako návod k vyjednávání pravidla, která mají odpovídat našim intuitivním představám o tom, jak si počínají racionální účastníci ve vyjednávacím procesu, nutí-li je vnější okolnosti dohodnout se. Hledanou preferenční stupnici U lze charakterisovat jako tu, která je konsistentní s danými *pravidly vyjednávání.*

Pravidla vyjednávání by měla být taková, aby jim odpovídající preferenční stupnice U byla určena jednoznačně a zároveň aby výsledky určené v množině Ω_0 jako maximální podle U skutečně existovaly. Při tom všem mlčky činíme předpoklad, že žádný z hráčů není indiferentní. O indiferentních hráčích, kteří mají naprostý nezájem na výsledcích, je třeba předpokládat, že se ve hře chovají pasivně a tedy nevstupují do žádných koalic, v nichž by si spoluprací s jinými zajistili lepší výsledek (srovn. diskusi o základním postulátu racionality v kap. 5 — nezávislost na irelevantních faktorech).

Pravidla vyjednávání mají mít takový charakter, aby odpovídala takové kooperaci, která není vynucena z vnějšku (tj. apriorní *nezávaznost kooperace*; srovn. diskusi na začátku kap. 6). Poslední požadavek respektuje tu skutečnost, že hráči ve hře (7.2) odvozené ze hry (7.1) nejsou v obecném případě fakticky vázáni k povinné spolupráci, nýbrž jsou k této spolupráci vedeni racionálními úvahami (tzv. *vnitřní* nutnost kooperace).

Aby vyjednávání v odvozené dohodové hře (7.2) bylo vůbec možné, musí být splněn předpoklad, že mezi hráči je možná *neomezená komunikace*; nebyl-li by požadavek neomezené komunikace splněn, nemohla by se mezi hráči uskutečnit výměna informací umožňující jejich společný postup ve hře. Předpokládáme tedy, že strategické hry, v nichž je nutné doporučit hráčům jako návod ke hře, aby sáhli k procesu vyjednávání, jsou vesměs *komunikativní.* Ve hrách *nekomunikativních,* tj. bez možnosti neomezené komunikace, můžeme dát racionálním účastníkům návod k jednání jenom tehdy, když mohou dojít k společnému postupu, odpovídajícímu některé globální strategii $s \in S_0$, pouze na základě analysy konfliktní situace bez skutečné výměny informací; jako příklad může sloužit antagonistická hra, v níž na možnostech komunikace nezáleží.

Všimněme si, že dohodnutá preferenční stupnice U nebude až na výjimky kardinální. Degenerovaný případ je charakterisován *identitou zájmů* všech hráčů, tj. shodou jejich preferenčních stupnic:

$$U_i = U \quad \text{pro všechna} \quad i \in I\,.$$

Pro komunikativní hru se jeví tento případ jako ekvivalentní se strategickou hrou o jediném hráči, charakterisovaném preferenční stupnicí U; skutečný problém nastává ve hře nekomunikativní, v níž vzniká pro hráče otázka, jak *koordinovat* své strategie, aby uspokojili svůj společný zájem.

V nedegenerovaném případě existuje aspoň jedna dvojice i, j hráčů, že alespoň pro jednu dvojici ω_1, ω_2 výsledků platí, že

$$\omega_1 \succ_i \omega_2\,, \quad \omega_2 \succ_j \omega_1\,.$$

Omezíme-li se v naší úvaze pro jednoduchost na hru o dvou hráčích, $I = \{i, j\}$, pak jestliže se hráči i a j mají dohodnout na společné preferenční stupnici U, musí najít mezi ω_1 a ω_2 nějaký kompromis, např. že budou společně preferovat výsledek $\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\,\omega_2$ $(0 < \lambda < 1)$ jak proti ω_1, tak proti ω_2. To ukazuje, že jejich společná preferenční stupnice U nebude obecně kardinální.

Rekapitulujeme-li obecný postup při analyse konfliktní situace, který jsme shora popsali, konstruujeme nejprve množinu globálních strategií S_0 a potom preferenční stupnici U v množině výsledků $\Omega_0 = \varrho(S_0)$. První krok má odpovídat našim představám o racionálním jednání, druhý má odpovídat našim představám o racionálním vyjednávání. Intuitivní představy o racionalitě jednání zformulujeme do *postulátů o racionálním jednání*, které vesměs vycházejí z principu motivace jednání a vhodně jej doplňují. Podobně intuitivní představy o rozumném vyjednávání vyslovíme jako *pravidla racionálního vyjednávání*, opírající se rovněž o princip motivace jednání.

Kdybychom základní postulát racionality – postulát o znalosti hry – doplnili požadavkem na správnou interpretaci subjektivní base hry podle zásady, kterou bychom mohli nazvat principem *racionální motivace* jednání, jenž vznikne z formulace principu motivace jednání (srovn. str. 9), když v ní slova „hráč očekává“ nahradíme slovy „hráč má racionální důvody očekávat“, zahrnoval by v sobě základní postulát racionality již všechny další postuláty o racionálním jednání. Všechny postuláty o racionálním jednání, které dále vyslovíme, abychom motivovali formální definice nových pojmů, jsou v podstatě vysvětlením principu racionální motivace jednání, jak ho chápeme při teoretickém rozboru interakce zájmových skupin resp. individuí.

Racionální hráč

Dříve než přistoupíme k provedení programu daného v předcházejícím úvodním paragrafu, analysujme konfliktní situaci z hlediska jednoho hráče. Cílem teoretické analysy ze stanoviska jedince či zájmové skupiny účastnící se ve strategické hře, k němuž se koneckonců směřuje především, by měl být návod k tomu, jak má racionální hráč jednat, aby dosáhl pro sebe nejžádoucnějšího výsledku, i když mu v tom ostatní spoluhráči brání tím, že sledují své vlastní zájmy. Vyjdeme-li z normalisovaného tvaru hry, znamená to, že hráč má provést rozumnou volbu své strategie, aniž zná volby strategií, které provedou spoluhráči. V této jeho neinformovanosti o volbách protivníků je ovšem jádro potíží. Objektivní base normalisované hry se jeví danému hráči i jako trojice

$$(I, \Omega_E, (A_{-i}, A_i, \varrho)) \tag{7.3}$$

(srovn. (6.8)). Kdyby hráč i znal volbu sdružené strategie a_{-i} spoluhráčů, pak řídě se principem motivace jednání, tj. jenom podle své preferenční stupnice, snadno uspořádá množinu výsledků

$$\{\varrho(a_{-i}, a_i) : a_i \in A_i\} ,$$

a tím i prostor svých strategií A_i do preferenční škály, přičemž preferuje strategii a_i proti strategii a_i', když a jen když $\varrho(a_{-i}, a_i) \succ_i \varrho(a_{-i}, a_i')$. Na základě takto utvořené preferenční stupnice v prostoru svých strategií vybere hráč tu strategii, kterou maximálně preferuje.

Řečeno názorně, kdyby některý z účastníků konfliktní situace předem znal, jak se zachovají ostatní její participanti, věděl by s určitostí, ke kterému výsledku povede ten který způsob jeho jednání, a mohl by jakožto racionální jedinec vybrat tu strategii, která povede k výsledku pro něho nejlepšímu. Problém by se tak redukoval na tzv. *problém rozhodování isolovaného jedince*, neboť faktory ovlivněné jednáním ostatních hráčů bychom mohli považovat za předem dané; jde tu o tzv. *rozhodování za jistoty* (strategická hra bez náhodových faktorů pro $n = 1$) nebo *rozhodování za risika* (strategická hra s náhodovými faktory pro $n = 1$) — problém se redukuje na nalezení maxima užitkové funkce (*princip maximalisace užitku*).

Jednání hráče v konfliktní situaci vede v podstatě na problém *rozhodování za neurčitosti*, v němž hráč i má jako svou informaci množinu A_{-i} sdružených strategií spoluhráčů, nepřihlížíme-li ovšem k informaci, kterou hráč má navíc, totiž že zná subjektivní charakteristiky ostatních hráčů; počet prvků v informační množině A_{-i} představuje stupeň neurčitosti v daném rozhodovacím problému. Speciálním případem rozhodování za neurčitosti je tzv. *hra proti přírodě*, definovaná jako strategická hra o dvou hráčích, z nichž jeden je indiferentní vůči výsledkům.

Podle pravidel hry, jak plyne z principu realisace hry, je cílem hry její výsledek. Tudíž když a_i a a_i' jsou strategie hráče i takové, že

$$\varrho(a_{-i}, a_i) = \varrho(a_{-i}, a_i') \quad \text{pro všechna } a_{-i} \in A_{-i} ,$$

představují obě alternativy a_i a a_i' z hlediska hráče i týž způsob rozhodování. Pro pohodlí změníme označení a položíme $A_{-i} = B$. Budeme definovat pojem *rozhodnutí* hráče i jako zobrazení množiny B do prostoru smíšených výsledků Ω_E. Klademe-li

$$d_{a_i}(b) = \varrho(b, a_i) \quad \text{pro} \quad b \in B ,$$

označuje d_{a_i} rozhodnutí přiřazené strategii $a_i \in A_i$. Touto eliminací výsledkové funkce přejde objektivní base hry od tvaru (7.3) ve tvar

$$(7.4) \qquad (I, \Omega_E, (B, D_\varrho)) , \quad D_\varrho = \{d_{a_i} : a_i \in A_i\} ;$$

interpretace pravidel hry (B, D_ϱ) je zřejmá: protihráči zvolí sdruženou strategii $b \in B$ a hráč i vybere rozhodnutí $d \in D_\varrho$, aniž zná strategii b, přičemž výsledek určený dvojicí (b, d) je roven $d(b)$, tj. výsledku přiřazenému rozhodnutím d sdružené strategii b. Očíslujeme-li strategie v B čísly od 1 do $|B| = l$, rozhodnutí v D_ϱ čísly od 1 do $|D_\varrho| = k$, dostaneme matici typu $k \times l$ tvaru (3.7) (viz kap. 3), která representuje pravidla hry o objektivní basi (7.4).

Kdyby hráč i znal sdruženou strategii b, kterou zvolili spoluhráči, pak by preferoval rozhodnutí d_1 proti rozhodnutí d_2, když a jen když

$$d_1(b) \succ_i d_2(b), \quad \text{neboli} \quad u_i(d_1(b)) > u_i(d_2(b))\,;$$

přitom u_i je některá užitková funkce hráče i. Takto definovaná preferenční stupnice představuje kritérium nejenom pro rozhodování ve hře (7.4), nýbrž také v každé hře s objektivní basí

$$(I, \Omega_E, (B, D))\,, \tag{7.5}$$

kde D je libovolná konečná neprázdná množina rozhodnutí; je tomu tak proto, že tato preferenční relace je definována v množině všech rozhodnutí, čili v tzv. *prostoru rozhodnutí* hráče i, který označíme symbolem D^*. Tedy tato preferenční stupnice představuje kritérium rozhodování za podmínky o znalosti b také v nekonečné hře s objektivní basí

$$(I, \Omega_E, (B, D^*))\,.$$

Všimněme si, že každou hru v normálním tvaru lze chápat z hlediska hráče i jako hru s touž subjektivní basí a s objektivní basí (7.5), kde množina D jednoznačně odpovídá dvojici (A_i, ϱ) podle (7.4), tj. kde $D = D_\varrho$. Obráceně, je-li D konečná neprázdná podmnožina prostoru D^*, potom definicemi

$$\varrho(b, d) = d(b)\,, \quad b \in B\,, \quad d \in D\,; \quad A_i = D$$

převedeme basi (7.5) na tvar (7.3), tj. na hru s týmiž protivníky hráče i (a s týmž prostorem výsledků). Globální charakteristiku protivníků hráče i představuje dvojice

$$(B, (\Omega_E, \{U_j\}_{j \in I - \{i\}}))\,,$$

v níž první údaj je objektivní charakteristika týkající se způsobu ovlivnění výsledku a druhý údaj tvoří subjektivní charakteristika protivníků daná jejich osobními preferencemi. Co se hru od hry mění, jsou možnosti hráče i k ovlivnění výsledku, kdežto jeho subjektivní charakteristika (Ω_E, U_i), tj. jeho osobní preference zůstávají nezměněny.

Kritérium pro rozhodování za neurčitosti jako prefereční stupnice v prostoru rozhodnutí D^* musí být nejenom ve shodě s osobními preferencemi hráče i, ale musí respektovat také osobní preference protivníků, které ovlivňují jejich volbu sdružené strategie. Rozumné rozhodovací kritérium musí vycházet nejenom z hodnocení výsledků, jehož používá daný hráč: racionální hráč musí učinit předpoklady o chování ostatních účastníků konfliktní situace a tyto předpoklady se musí opírat o znalost protivníků ve smyslu jejich globální charakteristiky a navíc musí vycházet z další znalosti o protivnících, že totiž jsou vesměs racionální. Je intuitivně jasné, že racionální hráč staví svůj postup v konfliktní situaci na své znalosti protivníků, i když se chovají neracionálně. Kdybychom uměli matematicky vyjádřit stupeň iracionality jednotlivých protivníků (což někdy lze: srovn. příklad o hlasování), mohli bychom studovat formálními prostředky rovněž jednání racionálních hráčů v konfliktu s iracionálními protivníky. Nutnost předpokladu racionality protivníků má důvod v tom, že protivníky „známe" jenom podle jejich globální charakteristiky ve smyslu základního postulátu o racionalitě, a tedy musíme navíc předpokládat, že se řídí všichni principem racionální motivace jednání. Shrnujeme, že racionální hráč se řídí při volbě svého jednání, tj. při svém rozhodování, podle toho, jaké jednání očekává od racionálních protivníků; to platí pro všechny racionální účastníky konfliktu (tzv. *postulát o vzájemně očekávané racionalitě.*)

Přejdeme zpět k formálnímu aparátu. *Elementární rozhodnutí* hráče i budeme definovat jako zobrazení prostoru sdružených strategií protivníků B do prostoru elementárních výsledků E. Množinu všech elementárních rozhodnutí hráče i označíme symbolem D_0 a nazveme *prostorem elementárních rozhodnutí* (hráče i); tedy $D_0 \subset D^*$. Pro $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ klademe

$$((1 - \lambda) d_1 + \lambda d_2)(b) = (1 - \lambda) d_1(b) + \lambda d_2(b), \quad b \in B;$$

smysl definice vyplývá z (4.9), neboť $d_1(b)$ a $d_2(b)$ jsou výsledky. Rozhodnutí $(1 - \lambda) d_1 + \lambda d_2$ je *směs* rozhodnutí d_1 a d_2. Prostor elementárních rozhodnutí D_0 je konečný. Klademe-li obecněji

$$\Big(\sum_{\mu \in M} \lambda(\mu)\, d_\mu\Big)(b) = \sum_{\mu \in M} \lambda(\mu)\, d_\mu(b), \quad b \in B,$$

kde (M, λ) je konečný pravděpodobnostní prostor a $\{d_\mu\}_{\mu \in M}$ soustava rozhodnutí s parametrem $\mu \in M$, snadno nahlédneme, že ke každému rozložení pravděpodobnosti δ na prostoru elementárních rozhodnutí D_0 je přiřazeno rozhodnutí

$$d = \sum_{d^{(0)} \in D_0} \delta(d^{(0)}) d^{(0)} \tag{7.6}$$

(srovn. se způsobem zápisu (4.14)) jednoznačně jako směs elementárních rozhodnutí. Obráceně, je-li $d \in D^*$ a položíme-li

$$\delta(d^{(0)}) = \prod_{b \in B} (d(b))\,(d^{(0)}(b)), \quad d^{(0)} \in D_0 \tag{7.7}$$

(je-li $d(b) = \omega$ a $d^{(0)}(b) = e$, jest $(d(b))\,(d^{(0)}(b)) = \omega(e)$ pravděpodobnost elementárního výsledku e pro rozložení ω), pak se snadno přesvědčíme, že δ je rozložení pravděpodobnosti na prostoru D_0, pro které platí rovnost (7.6). Rovnicí (7.6) není však δ pro dané $d \in D$ určeno jednoznačně. Máme tak

$$D^* = \{ \sum_{d \in D_0} \delta(d)\, d : \delta \in D_0^* \}, \tag{7.8}$$

kde jsme symbolem D_0^* označili množinu všech rozložení pravděpodobnosti na prostoru D_0, tzv. *prostor smíšených rozhodnutí* hráče i (rozumí se, že jde o smíšení elementárních rozhodnutí). Každému rozhodnutí odpovídá právě jedna třída smíšených rozhodnutí ve smyslu vztahu (7.6).

Smysl rozvinuté strategie je v tom, že vybírá, zvolena před započetím partie, pokračování ve hře místo hráče, tj. volí alternativu na každé informační množině hráče, která se v partii vyskytne. Smysl kritéria pro rozhodování za neurčitosti na třídě všech her s objektivní basí (7.5) pro danou neprázdnou konečnou množinu B (informační množinu) a pro daný prostor výsledků Ω_E (určený jednoznačně prostorem elementárních výsledků E) bude v tom, že vybírá, když bylo zvoleno, v každé hře s objektivní basí (7.5) místo hráče rozhodnutí konsistentní s osobními preferencemi hráče, vyjádřenými jeho subjektivní charakteristikou (Ω_E, U_i). Strategie nahrazuje hráče během konfliktu při volbě alternativ, rozhodovací kritérium nahrazuje hráče při volbě strategií, přičemž respektuje jeho subjektivní postoj k výsledkům.

Položme si otázku, jaké požadavky musí splňovat preferenční stupnice v prostoru všech rozhodnutí D^*, abychom ji mohli považovat za rozhodovací kritérium v každé hře s objektivní basí tvaru (7.5). Ježto každé neprázdné konečné množině rozhodnutí D odpovídá aspoň jedna dvojice (A_i, ϱ) tak, že objektivní basi (7.5) lze psát ve tvaru (7.3), přičemž $D = D_\varrho$, musí pro každou hru s objektivní basí (7.3), v níž $A_{-i} = B$, požadavky kladené na rozhodovací kritérium respektovat následující postulát o racionálním rozhodování, který je důsledkem principu motivace jednání.

Postulát o rozhodování (hráče): Hráč $i \in I$ se rozhodne ze dvou svých smíšených strategií s_i, s_i' zvolit spíše strategii s_i, když pro každou ryzí startegii a_{-i} protihráčů platí vztah

$$\varrho(s_i, a_{-i}) \succsim_i \varrho(s_i', a_{-i}), \quad \text{tj.} \quad H_i(s_i, a_{-i}) \geqq H_i(s_i', a_{-i}), \tag{7.9}$$

a když současně existuje aspoň jedna strategie $a_{-i}^{(0)}$ protihráčů, pro niž platí vztah

$$\varrho(s_i, a_{-i}^{(0)}) \succ_i \varrho(s_i', a_{-i}^{(0)}), \quad \text{tj.} \quad H_i(s_i, a_{-i}^{(0)}) > H_i(s_i', a_{-i}^{(0)}). \tag{7.10}$$

Platí-li nerovnosti (7.9) pro každou ryzí strategii $a_{-i} \in A_{-i}$, platí již také pro každou smíšenou strategii protihráčů $s_{-i} \in S_{-i}$; platí-li vztah tvaru (7.10) pro některou smíšenou strategii $s_{-i}^{(0)} \in S_{-i}$ za předpokladu, že platí všechny vztahy (7.9), pak musí existovat ryzí strategie $a_{-i}^{(0)} \in A_{-i}$ vyhovující vztahu (7.10). Proto jsme se mohli ve formulaci postulátu o rozhodování omezit na ryzí strategie antikoalice protihráčů; přitom H_i představuje kteroukoli výplatní funkci hráče i.

Přiřadíme-li smíšeným strategiím $s_i, s'_i \in S_i$ rozhodnutí d_1, d_2 definicemi

$$d_1(b) = \varrho(s_i, b)\,, \quad d_2(b) = \varrho(s'_i, b)\,; \quad b \in B\,,$$

lze přepsat podmínky uvedené v postulátu o rozhodování na tvar

$$(7.11) \qquad \forall(b \in B)\, d_1(b) \succsim_i d_2(b)\,, \quad \text{tj.} \quad u_i(d_1(b)) \geqq u_i(d_2(b))\,,$$

$$(7.12) \qquad \exists(b_0 \in B)\, d_1(b_0) \succ_i d_2(b_0)\,, \quad \text{tj.} \quad u_i(d_1(b_0)) > u_i(d_2(b_0))\,;$$

přitom u_i je některá užitková funkce hráče i. Poněvadž tyto podmínky mají být splněny pro každou hru s objektivní basí (7.5) (s množinou D konečnou), plyne jako důsledek z postulátu o rozhodování, že preferenční stupnice C v prostoru rozhodnutí D^*, která představuje rozhodovací kritérium hráče i, musí mít nutně tuto vlastnost:

Jsou-li $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$ dvě rohodnutí, která splňují podmínky (7.11) a (7.12), pak platí vztah $d_1 \succ_C d_2$; relace C charakterisuje slabou preferenci (totální uspořádání), takže symbol $d_1 \succ_C d_2$ znamená, že jest $d_1\, C\, d_2$ a není $d_2\, C\, d_1$.

Když platí pro danou dvojici rozhodnutí d_1, d_2, že

$$d_1(b) \sim_i d_2(b) \quad \text{pro každé} \quad b \in B\,,$$

takže každé z obou rozhodnutí přinese hráči stejný užitek, ať b je jakékoli jednání protihráčů, bude racionální hráč mezi oběma rozhodnutími indiferentní, takže rozhodovací kritérium C musí splňovat v tomto případě vztah $d_1 \sim_C d_2$. Obdobnými úvahami jako v kap. 5 usoudíme, že preferenční stupnice, charakterisující způsob rozhodování racionálního hráče, musí být nutně kardinální. Shrneme-li všechny tyto požadavky na rozhodovací kritérium, dostaneme definici:

Rozhodovací kritérium hráče i je kardinální preferenční stupnice C v prostoru rozhodnutí D^*, která splňuje požadavky: když $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$ jsou rozhodnutí, která splňují podmínku (7.11), pak jest $d_1\, C\, d_2$ (jinak psáno: $d_1 \succsim_C d_2$); když navíc je splněna podmínka (7.12), pak jest $d_1 \succ_C d_2$.

Dané rozhodovací kritérium C hráče i umožňuje v každé hře s objektivní basí (7.5) sestavit prvky (konečné) množiny rozhodnutí D do preferenční škály

$$d_1 \succsim_C d_2 \succsim_C \dots \succsim_C d_k\,, \quad D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}\,,$$

a tím nalézt množinu prvků v D maximálních podle relace C. Tudíž rozhodnutí $d \in D$ nazýváme *optimálním* vzhledem k rozhodovacímu kritériu C hráče i ve strategické hře s objektivní basí (7.5), když platí, že $d \succsim_C d'$ pro každé $d' \in D$.

Objektivní base (7.5) odpovídá některé hře s objektivní basí (7.3), přičemž $D = D_\varrho$. Tudíž optimálnímu rozhodnutí odpovídá ryzí strategie hráče i. Úkolem rozhodovacího kritéria je tedy de facto volit optimální ryzí strategie uvažovaného hráče. Intuitivně je zřejmé, že ryzí strategie je optimální z hlediska daného hráče, když odpovídá jeho očekávání toho, jakým způsobem zvolí svoji ryzí strategii protihráči (kteří ovšem k jejímu stanovení mohou použít náhodového mechanismu). Smysl rozhodovacího kritéria tedy záleží fakticky v tom, že charakterisuje očekávání uvažovaného hráče o chování jeho protivníků. Toto očekávání musí racionální hráč opřít ve hře s racionálními soupeři o svou znalost subjektivní charakteristiky protivníků a o předpoklad jejich racionality. Fakt, že rozhodovací kritérium charakterisuje odhad hráčem očekávaného jednání protivníků, potvrzuje teorém o tzv. subjektivní pravděpodobnosti, který si uvedeme v dalším paragrafu.

Rozhodování za neurčitosti

Jak jsme viděli, představuje problém rozhodování účastníka konfliktní situace o volbě strategie speciální případ problému rozhodování za neurčitosti, k jehož obecné formulaci nyní přistoupíme.

Nechť E je konečná neprázdná množina a nechť Ω je neprázdná konvexní část konvexního obalu $[E]$ množiny E; srovn. (4.16). Nechť dále U je totální uspořádání v množině Ω a nechť B je neprázdná množina. Trojici

$$(\Omega, U, B) \tag{7.13}$$

nazveme *data pro rozhodování,* kde Ω představuje prostor výsledků rozhodování, U je preferenční stupnice rozhodovatele v Ω a B je tzv. *informační množina* rozhodovatele. Prvky b informační množiny B se nazývají *parametry neurčitosti.* Když D je některá neprázdná množina obsahující vesměs zobrazení množiny B do množiny Ω, pak trojici

$$(\Omega, U, (B, D)) \tag{7.14}$$

nazýváme *problém rozhodování za neurčitosti* s množinou rozhodnutí D. Přitom dvojice (B, D) representuje tzv. *pravidla rozhodování.* Při daných datech pro rozhodování (7.13) nazýváme trojici (7.14) stručně *D-problém.*

Každému zobrazení informační množiny B do prostoru výsledků Ω říkáme *rozhodnutí*; symbol D^* označuje množinu všech rozhodnutí (prostor rozhodnutí). V dalším označíme symbolem D systém všech konečných neprázdných podmnožin D prostoru D^*; tedy $\mathsf{D} \subset D^*$.

Omezíme se na vyšetřování tzv. *konečných* problémů rozhodování za neurčitosti, což znamená, že učiníme tyto předpoklady: (1) prostor výsledků Ω lze vyjádřit jako konvexní obal některé konečné (neprázdné) množiny výsledků $\Omega^{(0)} : \Omega = [\Omega^{(0)}]$; (2) informační množina B je konečná; (3) množina rozhodnutí D je konečná, tj. $D \in \mathsf{D}$.

Rozhodovací kritérium (rozhodovatele) je definováno jako kardinální preferenční stupnice C v prostoru rozhodnutí D^* mající vlastnost, že pro $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$

splňující podmínku

(7.15) $$\forall(b \in B)\; d_1(b) \succsim_U d_2(b)$$

jest $d_1 \succsim_C d_2$, přičemž $d_1 \succ_C d_2$, když ještě $d_1(b_0) \succ_U d_2(b_0)$ pro některé $b_0 \in B$; jde o rozhodovací kritérium odpovídající daným datům pro rozhodování (7.13).

Nutnou podmínkou k tomu, aby existovalo aspoň jedno rozhodovací kritérium pro daná data (7.13), je kardinalita preferenční stupnice U rozhodovatele: o tom se lze přesvědčit např. tím, že vyšetříme podmínku kardinality rozhodovacího kritéria na (konvexní) množině všech rozhodnutí d, které mají vlastnost, že $d(b) = \omega$ pro všechna $b \in B$ a pro některé $\omega \in \Omega$. Uvedená podmínka je však pro existenci rozhodovacích kritérií také postačující, jak ukazuje následující věta.

Teorém o subjektivní pravděpodobnosti. *Je-li v datech pro rozhodování* (7.13) *U kardinální preferenční stupnice, která je netriviální* (tj. všechny výsledky nejsou navzájem indiferentní vzhledem k U), *a je-li C rozhodovací kritérium, pak existuje právě jedno rozložení pravděpodobnosti β na informační mnozině B takové, že číselná funkce u_C, definovaná na prostoru rozhodnutí D vztahem*

(7.16) $$u_C(d) = \sum_{b \in B} \beta(d)\, u(d(b))\,, \quad d \in D^*\,,$$

je užitková funkce pro systém preferencí C, ať u je kterákoli užitková funkce pro preferenční stupnici U (tj. u je tzv. užitková funkce rozhodovatele).

Obráceně, *pro každé rozložení pravděpodobnosti β na B je rovnicí* (7.16) *definována užitková funkce* (tj. funkce splňující vztah (5.32), v němž klademe $\Omega^{(0)}$ místo E), *jíž indukovaný* (kardinální) *systém preferencí v prostoru D^* je rozhodovací kritérium.*

Rozložení pravděpodobnosti β, jednoznačně určené rovnicí (7.16) a užitkovou funkcí příslušnou k rozhodovacímu kritériu C, představuje *subjektivní pravděpodobnost* rozhodovatele pro očekávaný parametr neurčitosti; přitom rozhodovací kritérium C samo representuje *očekávání* rozhodovatele ohledně toho, který parametr neurčitosti $b \in B$ nastane.

Subjektivní pravděpodobnost jest významově (nikoli ovšem formálně matematicky) zcela odlišná od tzv. *objektivní pravděpodobnosti*, která obráží stabilitu relativních četností výskytu náhodných jevů v dlouhých sériích nezávislých opakování náhodného pokusu: objektivní pravděpodobnost číselně charakterisuje typické vlastnosti náhodných jevů, jež jsou *nezávislé* na pozorovateli. Na druhé straně subjektivní pravděpodobnost představuje *míru očekávání* pozorovatele (zde toho, kdo rozhoduje), zda určitý jev nastane. V problémech rozhodování jde o *očekávání* výskytu neurčitostních parametrů, charakterisované rozhodovacím kritériem toho, kdo má rozhodnout. Proto shora uvedený teorém interpretujeme jako *větu o existenci subjektivní pravděpodobnosti* čili větu o existenci míry očekávání subjektu v situacích obsahujících neurčitost.

Shora uvedený teorém uzavřel dlouholeté filosofické spory o oprávněnosti či neoprávněnosti pojmu subjektivní pravděpodobnosti: uvádějí se v něm exaktní podmínky, za nichž míra očekávání jako číselná veličina skutečně existuje. Počátky odvození tohoto významného teorému lze vidět ve vytvoření von Neumannovy matematické teorie užitku během druhé světové války: za dovršující krok děkujeme Savageovi, jemuž jako prvnímu napadlo očekávání pozorovatele charakterisovat preferencemi pro možná rozhodnutí.

Provedená diskuse motivuje zavedení obecnějšího pojmu, než je pojem rozhodovacího kritéria, a to pojmu očekávání. *Očekávání*, určitěji očekávání rozhodovatele, definujeme jako preferenční stupnici C v prostoru rozhodnutí D^*, která má vlastnost že pro každou dvojici d_1, d_2 rozhodnutí vyhovujících podmínce (7.15) je splněn vztah $d_1 \succsim_C d_2$, přičemž není $d_1 \sim_C d_2$, když v (7.15) neplatí simultanně vztah $\sim_U$. Speciálním případem očekávání je rozhodovací kritérium, které budeme také nazývat *racionálním očekáváním* (rozhodovatele). Nutnou i postačující podmínkou existence racionálního očekávání je podle teorému o subjektivní pravděpodobnosti racionalita rozhodovatele, tj. kardinalita jeho preferencí.

Pravděpodobnostní rozložení β, odpovídající danému racionálnímu očekávání C podle (7.16), representuje pravděpodobnostní odhad výskytu neurčitostních parametrů. Tomuto rozložení odpovídající racionální očekávání, tj. rozhodovací kritérium C, je definováno tím, že klademe $d_1 \, C \, d_2$ (tj. $d_1 \succsim_C d_2$), když a jen když

$$(7.17) \qquad \sum_{b \in B} \beta(b)\, d_1(b) \succsim_U \sum_{b \in B} \beta(b)\, d_2(b)\,; \quad d_1, d_2 \in D^*\,.$$

Vztahy (7.17) jsou ovšem ekvivalentní s rovnostmi (7.16).

Vraťme se nyní k vlastnímu problému rozhodování za neurčitosti popsanému trojicí (7.14). Rozhodnutí d se nazývá *dostupné* (pro rozhodovatele) v D-problému (7.14), kde $D \in \mathsf{D}$, když jest $d \in [D]$; přitom konvexní obal $[D]$ chápeme jako množinu všech rozhodnutí tvaru (7.6), kde sčítáme přes všechna $d^{(0)} \in D$ (tj. klademe $D^{(0)} = D$), což znamená, že identifikujeme smíšená rozhodnutí odpovídající jednomu a témuž rozhodnutí (srovn. speciální případ vyjádřený v (7.8)). Dostupné rozhodnutí může rozhodovatel realisovat vhodným náhodovým mechanismem, volícím rozhodnutí v (konečné) množině D s předepsanými pravděpodobnostmi.

Dostupné rozhodnutí d v D-problému se nazývá *ryzí*, když $d \in D$. Dostupné rozhodnutí d je *optimální* vzhledem k očekávání C, když pro každé $d' \in [D]$ platí, že $d \succsim_C d'$. Máme:

Tvrzení. Když očekávání C je racionální, tedy C je rozhodovací kritérium, pak existuje v každém D-problému, kde $D \in \mathsf{D}$, aspoň jedno rozhodnutí optimální vzhledem k C, které je ryzí.

Nejsou-li předpoklady tvrzení splněny, pak obecně nemusí existovat žádné optimální rozhodnutí, tím méně ryzí. Racionalitou očekávání je tedy v každém konečném rozhodovacím problému zajištěna existence ryzích optimálních rozhodnutí.

Každý problém rozhodování za neurčitosti je ještě charakterisován tím, co rozhodovatel ví o příčinách, jimiž je tato neurčitost způsobena. Zhruba řečeno, čím více rozhodovatel o těchto příčinách ví, tím vyšší užitek se může zajistit vhodnou volbou svého rozhodnutí. Znalosti rozhodovatele o tzv. *typu neurčitosti* se odrazí v tom, že rozhodovatel může na jejich základě zúžit třídu všech rozhodovacích kritérií, označme ji $\mathscr{C}$ (předpokládáme, že $\mathscr{C} \neq \emptyset$, tedy že U je kardinální), na některou podtřídu $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$, kterou obdrží eliminací těch rozhodovacích kritérií, jež jsou v rozporu s jeho vědomostmi o vlivech působících na výskyt parametrů neurčitosti.

Jak se tato eliminace kritérií nekonsistentních s typem neurčitosti provádí, vyplývá z teorému o existenci subjektivní pravděpodobnosti. Třída $\mathscr{C}$ všech rozhodovacích kritérií jednojednoznačně odpovídá podle (7.16) resp. (7.17) třídě všech rozložení pravděpodobnosti na informační množině B, tj. konvexnímu obalu $[B]$. Tudíž eliminace nekonsistentních kritérií je ekvivalentní s eliminací nekonsistentních pravděpodobnostních odhadů očekávaných parametrů neurčitosti: třídě $\mathscr{C}_0$, kterou eliminačním procesem dostaneme, je jednojednoznačně přiřazena určitá třída $B^{(0)} \subset B$ podle (7.16), a obráceně, třídě $B^{(0)}$, kterou obdržíme eliminací nekonsistentních subjektivních pravděpodobnostních rozložení parametrů neurčitosti, koresponduje třída $\mathscr{C}_0$ podle (7.17).

Abychom naše obecné úvahy zkonkretisovali, vrátíme se k případu vyšetřovanému v předcházejícím paragrafu, v němž rozhodovatelem byl hráč i s kardinální preferenční stupnicí $U = U_i$ a s množinou rozhodnutí $D = D_\varrho$: tím jsme mlčky učinili předpoklad, že v dané hře, která je obecně popsána údaji uvedenými v (7.1), smí hráč i hrát na svůj vrub (tj. $\{i\}$ je přípustná koalice) a že toho využije (tj. nevstoupí do žádné netriviální koalice: ve hře pak mohou vzniknout jen takové přípustné koaliční struktury $\mathscr{K}$, pro něž $\{i\} \in \mathscr{K}$).

Pravděpodobnostní rozložení β odpovídající danému rozhodovacímu kritériu hráče i představuje jeho subjektivní pravděpodobnostní odhad toho, jak se budou chovat protivníci; ježto $\beta \in [B]$, $B = A_{-i}$, tedy $\beta \in S_{-i}$, jeví se subjektivní pravděpodobnost β jako smíšená strategie protivníků. Učiňme předpoklad, že $\mathscr{K}$ je koaliční struktura, pro niž $\{i\} \in \mathscr{K}$, ale která není přípustná. Znalost hry umožňuje racionálnímu hráči vyloučit všechny subjektivní pravděpodobnosti $\beta = \{s_K\}_{K \in \mathscr{K} - \{\{i\}\}}$, které se nemohou realisovat jako smíšené strategie protihráčů při některé přípustné koaliční struktuře $\mathscr{K}' \ni \{i\}$; jinými slovy, hráč vyloučí ty z nich, které nemohou vystoupit jako objektivní pravděpodobnosti. z nichž každé odpovídá náhodový mechanismus, který volí protivníci. Další eliminace se opírá o znalost protivníků z jejich subjektivní stránky včetně předpokladu jejich racionality.

Jak je racionalita protivníků charakterisována z hlediska rozhodování daného hráče, to si vyložíme v nejjednodušším případě hry o dvou hráčích, z nichž každý hraje na svůj vrub (nekooperativní hra). Obecně takového postupu nepoužijeme a nahradíme jej pohodlnější metodou, kdy budeme studovat konflikt z posic vnějšího pozorovatele. Vyšetřování konfliktní situace z hlediska jednoho hráče vyžaduje totiž také prozkoumání jeho možností vstupu do koalic, čemuž dosavadní přístup, spočívající na pojmu rozhodovacího kritéria tohoto hráče, neodpovídá.

Rozhodovací kritérium čili racionální očekávání daného hráče odpovídá jenom na otázku, jak hráč reaguje, když má vybrat jedno ze dvou rozhodnutí: to, jak se při tom hráč chová, obráží jeho očekávání toho, co učiní jeho protihráči. Toto očekávání je vyjádřeno jeho subjektivními pravděpodobnostmi výskytu jednotlivých sdružených strategií soupeřů.

Příklad: *hráč proti jednomu protivníkovi.* Učiňme předpoklad, že (7.1) je nekooperativní hra o dvou hráčích, a položme $\Omega = \Omega_E$, $U = U_1$, $B = A_2$, $D = D_\varrho$. Tím jsou sestaveny základní údaje problému rozhodování za neurčitosti (7.14) s množinou rozhodnutí D odpovídající prostoru ryzích strategií A_1, v němž je rozhodovatelem první hráč. Přitom $[B] = S_2$ je prostor smíšených strategií druhého hráče; přiřaďme každému $\beta \in [B]$ rozhodovací kritérium C_β prvního hráče definicí: $d_1 C_\beta d_2$, když a jen když platí (7.17). Racionalitu jednání druhého hráče, kterou první hráč očekává, popíšeme v následujícím postulátu o očekávaném racionálním jednání protivníka.

Postulát o očekávané racionalitě: I. Když první hráč zvolí smíšenou strategii s_1 a když s_2, s_2' jsou smíšené strategie druhého hráče takové, že

$$\varrho(s_1, s_2) \succ_2 \varrho(s_1, s_2'), \quad \text{tj.} \quad H_2(s_1, s_2) > H_2(s_1, s_2'),$$

pak první hráč očekává, že nastane spíše strategie s_2 než strategie s_2'.

II. První hráč očekává, že druhý hráč si počíná obdobně: tj. když druhý hráč zvolí smíšenou strategii s_2 a když s_1, s_1' jsou smíšené strategie prvního hráče takové, že

$$\varrho(s_1, s_2) \succ {}_1\varrho(s_1', s_2), \quad \text{tj.} \quad H_1(s_1, s_2) > H_1(s_1', s_2),$$

pak první hráč očekává, že druhý hráč očekává, že spíše nastane strategie s_1 než strategie s_1'.

Vyslovený postulát je důsledkem principu motivace jednání obou hráčů a postulátu o vzájemném očekávání racionality. Uvidíme, že při rozboru strategických her ze stanoviska vnějšího pozorovatele nabude postulát o očekávané racionalitě jednoduché a slovně méně neohrabané formy.

Zdůvodnění postulátu v jeho první části plyne z toho, že hráč jako racionální rozhodovatel nemůže počítat s tím, co je z hlediska preferencí protivníkových horší; podle statistické interpretace pravděpodobnosti odpovídá používání smíšených strategií sehrání série partií, v nichž první hráč volí v $100 s_1(a_1)\%$ partií ryzí strategii $a_1 \in A_1$, čímž se dostane druhému hráči nepřímé informace o smíšené strategii s_1.

Použijeme-li jako pohodlnějšího nástroje výplatních funkcí H_1, H_2 obou hráčů, definujeme pojem byaesovské strategie takto: strategie $s_2^* \in S_2$ druhého hráče se nazývá *bayesovská* vzhledem k strategii $s_1 \in S_1$ prvního hráče, když platí rovnost

$$\max_{s_2 \in S_2} H_2(s_1, s_2) = H_2(s_1, s_2^*).$$

Strategie $s_1^* \in S_1$ je *bayesovská* vzhledem k $s_2 \in S_2$, když

$$\max_{s_1 \in S_1} H_1(s_1, s_2) = H_1(s_1^*, s_2).$$

První část postulátu o očekávané racionalitě říká, že když první hráč zvolí strategii s_1, musí počítat s tím, že druhý hráč může použít strategie s_2^* bayesovské vzhledem k s_1. Druhá část postulátu konstatuje, že první hráč se může spolehnout, když druhý hráč zvolí strategii s_2, že vezme v úvahu, že první hráč může použít strategie s_1^* bayesovské vzhledem k s_2.

Nechť (s_1^*, s_2^*) je vektor smíšených strategií takový, že strategie s_1^* prvního hráče je bayesovská vzhledem ke strategii s_2^* druhého hráče a zároveň s_2^* je bayesovská vzhledem k s_1^*. Takový vektor strategií se nazývá *rovnovážný*; rovnovážné vektory, jak lze dokázat, existují v každé nekooperativní hře o dvou (i více) hráčích.

Z úvah o predikci, které provedeme v následujícím paragrafu, bude plynout, že racionální hráči použijí za shora uvedených předpokladů o dané hře právě některého rovnovážného vektoru strategií. Proto v problému rozhodování za neurčitosti, před nímž stojí první hráč a který nyní vyšetřujeme, zredukuje tento hráč třídu $[B]$ všech strategií, jež může očekávat u protivníka, na třídu $B^{(0)}$ všech tzv. *rovnovážných* (smíšených) *strategií* protivníkových, tj. těch strategií $s_2^* \in [B] = S_2$, k nimž lze najít strategii $s_1^* \in S_1$ takovou, že (s_1^*, s_2^*) je rovnovážný vektor strategií. Třídě rovnovážných strategií $B^{(0)}$ pak přiřadíme jako třídu rozhodovacích kritérií konsistentních s postulátem o očekávané racionalitě množinu

$$\mathscr{C}_0 = \{C_\beta : \beta \in B^{(0)}\}.$$

Třída $\mathscr{C}_0$ se skládá z racionálních očekávání rozhodovatele – prvního hráče – odpovídajících typu neurčitosti, který lze popsat slovy: parametr neurčitosti stojí pod vlivem subjektu se známou preferenční stupnicí (na výsledcích rozhodovatele), jenž se chová racionálně ve smyslu postulátu o očekávané racionalitě.

Problém predikce

V tomto paragrafu přejdeme při vyšetřování konfliktní situace na nové stanovisko: místo abychom prováděli rozbor strategické hry z hlediska jednoho zainteresovaného hráče, budeme analysovat matematický model konfliktu z posic nezaujatého vnějšího pozorovatele. Předpoklad o racionalitě účastníka konfliktní situace zahrnuje implicitně požadavek, že racionální účastník konfliktu je schopen přistoupit k jeho všestrannému rozboru ze stanoviska racionálního pozorovatele: pro strategickou hru náš nový přístup tedy znamená provádět rozbor z hlediska všech racionálních hráčů zároveň. Problém, který budeme studovat, bude otázka, co lze očekávat od racionálních hráčů ze stanoviska racionálního pozorovatele, jehož úkolem je předpovědět jednání hráčů: jde tu o základní problém teorie strategických her, tzv.

problém predikce v konfliktních situacích. Přistoupíme nyní k exaktní formulaci problému predikce jako problému rozhodování racionálního pozorovatele za neurčitosti.

Informační množina pozorovatele je prostor vektorů ryzích strategií A: parametry neurčitosti jsou pro pozorovatele vektory $a \in A$ charakterisující skutečné jednání hráčů. *Typ neurčitosti* je dán předpokladem o pozorovatelově znalosti vlivů, které působí na vznik parametrů neurčitosti. O racionálním pozorovateli budeme ovšem předpokládat, že strategickou hru zná ve smyslu základního postulátu racionality o znalosti hry; pro určitost vyjdeme při našem vyšetřování z matematického modelu (7.1), takže suponujeme, že pozorovatel zná všechny údaje uvedené v (7.1) včetně způsobu jejich interpretace. Další znalost, kterou racionální pozorovatel má a která vymezuje typ neurčitosti, lze stručně popsat slovy, že pozorovatel očekává, že všichni hráči budou jednat racionálně. Co znamená očekávání racionality při jednání hráčů, to vymezíme v postulátu o očekávané racionalitě hráčů ve strategické hře (7.1).

Postulát o predikci: Když K je přípustná koalice (tj. $K \in \Psi(\boldsymbol{K})$) skládající se vesměs z racionálních členů a když s, s' jsou dvě globální smíšené strategie takové, že $s = (s_K, s_{-K})$, $s' = (s'_K, s_{-K})$, tj. $s'_{-K} = s_{-K}$ (což znamená, že antikoalice použije v obou případech téže smíšené strategie: srovn. (6.80) a (6.81); tj. $s_K \in S_K$, $s'_K \in S_K$, $s_{-K} \in S_{-K}$), pak racionální pozorovatel očekává, že spíše nastane globální strategie s než globální strategie s', když

$$\varrho(s) \succ_i \varrho(s') \; [\text{tj. } H_i(s) > H_i(s')] \quad \text{pro každé} \quad i \in K$$

(srovn. (6.30)), slovy, když výsledek $\varrho(s)$ každý člen koalice K preferuje proti výsledku $\varrho(s')$.

Když s je globální smíšená strategie, k níž nelze najít přípustnou koaliční strukturu $\mathscr{K}$ (tj. $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$) takovou, že $s \in S_{\mathscr{K}}$ (tj. $s = \{s_K\}_{K \in \mathscr{K}}$; srovn. (6.81)) je $\mathscr{K}$-vektor smíšených strategií, pak racionální pozorovatel nikdy neočekává, že globální strategie s nastane.

Postulátem o znalosti hry, kterou má racionální pozorovatel, spolu s postulátem o predikci je nepřímo vymezen typ neurčitosti. Užší vymezení pak závisí na tom, jde-li o strategickou hru s *kompensacemi* nebo o hru bez možnosti kompensací. Předpokládáme ovšem, že racionální pozorovatel je informován, zda v jím vyšetřované strategické hře jsou kompensace možné nebo nikoli.

Zatím jsme charakterisovali informační množinu pozorovatele a nepřímo i typ neurčitosti; přejdeme k charakterisaci prostoru výsledků. Pozorovateli dostupné elementární rozhodnutí odpovídá jeho předpovědi, že nastane některý vektor ryzích strategií $a_0 \in A$. Jsou možné právě dva elementární výsledky: předpověď je správná, nebo není správná. Správnou předpověď označme $\mathfrak{t}$ (= true) a nesprávnou $\mathfrak{f}$ (= false). *Elementární rozhodnutí* pozorovatele je zobrazení informační množiny

A do množiny $\{t, f\}$; elementární rozhodnutí d je definováno jako *dostupné* pozorovateli, když $d(a_0) = t$ platí právě pro jeden vektor ryzích strategií $a_0 \in A$, jinak $d(a) = f$ pro $a \neq a_0$ $(a \in A)$. *Prostor smíšených výsledků pozorovatele*, označme jej Ω_{poz}, lze vyjádřit formulí $\Omega_{poz} = [\{t, f\}]$, tj.

$$\Omega_{poz} = \{\lambda t + (1 - \lambda) f : 0 \leqq \lambda \leqq 1\} .$$

Racionální pozorovatel má kardinální preferenční stupnici U_{poz} v prostoru svých smíšených výsledků, která je jednoznačně určena podmínkou, že racionální pozorovatel preferuje správnou předpověď proti nesprávné, což zapíšeme ve tvaru $t \succ_{poz} f$; platí tedy

$$\lambda t + (1 - \lambda) f \succ_{poz} \lambda' t + (1 - \lambda') f \quad \text{pro} \quad \lambda > \lambda' .$$

Tím máme zformulován problém rozhodování za neurčitosti se základními údaji (7.14), kde $\Omega = \Omega_{poz}$, $U = U_{poz}$, $B = A$ a kde D představuje množinu všech elementárních rozhodnutí dostupných pozorovateli. Interpretace pravidel rozhodování (A, D) je zřejmá: Když pozorovatel učiní dostupné elementární rozhodnutí d, tj. $d \in D$, a hráči zvolí vektor ryzích strategií $a \in A$, pak výsledkem pozorovatele je $d(a)$, tj. buď správná, nebo nesprávná předpověď. Poznamenejme, že pojem ryzího dostupného rozhodnutí v D-problému, jak je definován v obecném výkladu předcházejícího paragrafu, je v našem případě předpovědí pozorovatele identický s pojmem dostupného elementárního rozhodnutí; rozhodnutí, která leží v D, jsou elementární ve smyslu formální definice uvedené v paragrafu o racionálním hráči (tj. $D \subset D_0$, kde D_0 je prostor elementárních rozhodnutí).

Podle teorému o subjektivní pravděpodobnosti ke každému racionálnímu očekávání pozorovatele, tj. ke každému jeho rozhodovacímu kritériu C, existuje právě jedno rozložení pravděpodobnosti s na prostoru A – tj. $s \in S$ je globální smíšená strategie – takové, že $d_1 \succsim_C d_2$, když a jen když (srovn. (7.17))

$$\sum_{a \in A} s(a)\, d_1(a) \succsim_{poz} \sum_{a \in A} s(a)\, d_2(a)\,, \tag{7.18}$$

přičemž d_1, d_2 je libovolná dvojice rozhodnutí pozorovatele. V dalším textu $\mathscr{C}$ všude znamená třídu všech rozhodovacích kritérií pozorovatele; třída $\mathscr{C}$ tedy jednojednoznačně koresponduje s prostorem všech globálních smíšených strategií S. Učiníme tuto úmluvu: rozhodovací kritérium C, které má vlastnost, že $d_1 \succsim_C d_2$, když a jen když platí (7.18), označíme symbolem C_s $(s \in S)$.

Je-li C_s rozhodovací kritérium přiřazené globální smíšené strategii $s \in S$, pak dostupné elementární rozhodnutí d_0, tj. $d_0 \in D$, je optimální vzhledem ke kritériu C_s, když a jen když platí rovnost $s(a_0) = \max\{s(a) : a \in A\}$, kde a_0 je právě ten vektor strategií, pro který jest $d_0(a_0) = t$.

Poslední tvrzení plyne ze vztahu (7.18) a jeho názorný obsah lze vyjádřit slovy: když s je globální smíšená strategie, kterou racionální pozorovatel u hráčů očekává, pak za optimální předpověď považuje každý takový vektor ryzích strategií a_0, jehož pravděpodobnost $s(a_0)$ je maximální.

Všimněme si, že jsme nuceni pracovat s třídou všech rozhodovacích kritérií pozorovatele místo pouze s třídou globálních smíšených strategií S, abychom mohli s oprávněním považovat každou globální strategii za subjektivní pravděpodobnost pozorovatele, tj. za míru našeho očekávání, týkajícího se volby vektorů ryzích strategií.

Naším úkolem bude ve smyslu obecných úvah o rozhodování za neurčitosti zredukovat třídu $\mathscr{C}$ resp. S na některou podtřídu $\mathscr{C}_0$ resp. S_0 (kde $\mathscr{C}_0 = \{C_s : s \in S_0\}$), která by obsahovala jen ta rozhodovací kritéria, resp. jen ty globální smíšené strategie, jež jsou konsistentní s typem neurčitosti našeho rozhodovacího problému, tj. především s postulátem o predikci.

Uvedenou redukci provedeme nepřímo, a to podle následujícího programu: když s, s' jsou dvě globální smíšené strategie, budeme se snažit vystihnout, vycházejíce přitom z postulátu o predikci, kdy lze považovat rozhodovací kritérium C_s za lepší než rozhodovací kritérium C_s, čili kdy lze považovat globální strategii s z hlediska subjektivního očekávání pozorovatele za lepší odhad jednání hráčů, než je globální strategie s'. Když kritérium C_s lze považovat za lepší než kritérium $C_{s'}$, budeme říkat, že kritérium $C_{s'}$ *dominuje* kritérium $C_{s'}$, resp. že globální strategie s dominuje globální strategii s' (rozumí se ze subjektivního hlediska pozorovatele). Generický symbol r bude znamenat relaci dominování ve třídě $\mathscr{C}$ resp. ve třídě S; přitom místo $C_s r C_{s'}$ resp. srs' budeme pro výraznost psát

$$C_s \operatorname{dom}_r C_{s'} \quad \text{resp.} \quad s \operatorname{dom}_r s' .$$

Relace r není obecně totální: pro danou dvojici $s, s' \in S$ nemusí platit ani vztah $s \operatorname{dom}_r s'$, ani vztah $s' \operatorname{dom}_r s$. Na druhé straně budeme předpokládat, že každá relace dominování r je antireflexivní, tj. že má tuto vlastnost:

$$\text{není } s \operatorname{dom}_r s \text{ pro žádné } s \in S . \tag{7.19}$$

Každou antireflexivní relaci r v množině rozhodovacích kritérií $\mathscr{C}$ resp. v prostoru S, která není v rozporu s postulátem o predikci, prohlásíme za a priori možnou relaci dominování. Každá relace dominování odpovídá subjektivnímu očekávání racionálního pozorovatele, založenému na jeho znalosti vlivů způsobujících neurčitost, tj. relace dominování representuje typ neurčitosti.

Když r je daná relace dominování, označíme $\mathscr{C}_r$ množinu těch rozhodovacích kritérií, které nejsou dominovány žádnými jinými kritérii ze třídy $\mathscr{C}$ vzhledem k relaci r. Třída $\mathscr{C}_r$ se skládá z rozhodovacích kritérií, která jsou z hlediska relace dominování r nejlepší. Na druhé straně každá relace dominování charakterisuje subjektivní očekávání racionálního pozorovatele, tedy jeho způsob předpovědi jednání hráčů. Tudíž každá relace dominování obráží způsob predikce racionálního pozorovatele.

Když r je daná relace dominování, tj. způsob predikce užívaný pozorovatelem, odpovídají prvky množiny $\mathscr{C}_r$ nejlepším rozhodovacím kritériím pozorovatele. tj. $\mathscr{C}_r$ představuje hledanou podtřídu rozhodovacích kritérií konsistentních s typem neurčitosti, který je formálně representován danou relací dominování r; formálně zapsáno, $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_r$.

Tím jsme zatím jen v abstraktních termínech zachytili náš program, k jehož provádění přistoupíme v další kapitole. Prvním úkolem bude exaktně definovat pojem dominování a blíže jej vysvětlit. V definici pojmu dominování vyjdeme přímo ze shora zformulovaného postulátu o predikci.

8. PREDIKCE GLOBÁLNÍCH STRATEGIÍ

Predikce a postuláty racionality

V minulé kapitole jsme v hrubých rysech charakterisovali problém predikce z hlediska nezaujatého pozorovatele jako problém nalezení relace dominování adekvátní znalosti pozorovatele jak o strategické hře, tak zvláště o samotných hráčích. Racionalita hráčů byla přitom vyjádřena v postulátu o predikci z hlediska toho, jak si hráči počínají uvnitř koalic jako jejich členové. Přistoupíme k otázce, jak lze vyjádřit formálními prostředky, že daná relace dominování není v rozporu s naším základním postulátem o racionálním jednání, jímž je postulát o predikci.

Za předpokladů učiněných ke konci předcházející kapitoly budiž r antireflexivní relace v množině $\mathscr{C}$ všech rozhodovacích kritérií pozorovatele, která splňuje následující požadavky:

(1) když $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$, $K \in \mathscr{K}$, $s \in S_{\mathscr{K}}$, $s' \in S_{\mathscr{K}}$, $s_{-K} = s'_{-K}$ a když $\varrho(s) \succ_i \varrho(s')$ pro každé $i \in K$, pak $C_s \operatorname{dom}_r C_{s'}$;

(2) když $s \in S_{\mathscr{K}}$ pro některé $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$ a když není $s' \in S_{\mathscr{K}}$ pro žádné $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$, přičemž $s' \in S$, pak $C_s \operatorname{dom}_r C_{s'}$.

Potom o relaci r pravíme, že je *konformní* s postulátem o predikci. Přitom každou relaci dominování konformní s postulátem o predikci považujeme ve smyslu předešlé kapitoly za a priori možný způsob predikce racionálního pozorovatele.

Abychom hlouběji pronikli do struktury hořejších požadavků na konformitu relace dominování, použijeme k jejich zápisu běžných prostředků z matematické logiky. První požadavek má tvar:

$$(8.1) \qquad \forall(\mathscr{K} \in \boldsymbol{K})\, \forall(K \in \mathscr{K})\, \forall(s \in S_{\mathscr{K}})\, \forall(s' \in S_{\mathscr{K}}) \\ [(s_{-K} = s'_{-K} \;\&\; \forall(i \in K)\, [\varrho(s) \succ_i \varrho(s')]) \Rightarrow C_s \operatorname{dom}_r C_{s'}] \,,$$

kdežto druhý má formální strukturu danou výrazem:

$$(8.2) \qquad \forall(\mathscr{K} \in \boldsymbol{K})\, \forall(s \in S_{\mathscr{K}})\, \forall(s' \in S)\, [\operatorname{non}\, (s' \in \bigcup_{\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}} S_{\mathscr{K}}) \Rightarrow C_s \operatorname{dom}_r C_{s'}] \,.$$

Oba požadavky jsou výroky o relaci r: označíme-li $\mathsf{P}_1(r)$ výrok (8.1) a $\mathsf{P}_2(r)$ výrok (8.2), značí-li $\mathsf{P}(r)$ konjunkci obou požadavků, tj. $\mathsf{P}(r)$ je zkrácený zápis výroku $\mathsf{P}_1(r) \,\&\, \mathsf{P}_2(r)$, a položíme-li (srovn. (7.19))

$$(8.3) \qquad \mathscr{D}_{\mathsf{P}} = \{r : r \text{ antireflexivní relace v } \mathscr{C};\ \mathsf{P}(r)\}\,,$$

pak výrok $r \in \mathscr{D}_{\mathsf{P}}$ znamená, že r je relace dominování konformní s postulátem o predikci. Ježto výrok $\mathsf{P}(r)$ [přesněji řečeno, výroková funkce $\mathsf{P}(r)$ na množině relací dominování, tj. na množině antireflexivních relací v $\mathscr{C}$] představuje exaktní formulaci postulátu o predikci, budeme prvkům množiny $\mathscr{D}_{\mathsf{P}}$ říkat P-*konformní* relace dominování.

Poznámka. Jsou-li V a W výroky, pak symbol $V \,\&\, W$ označuje výrok, který platí, když a jen když platí výroky V a W současně; je to tzv. konjunkce výroků V a W. Symbol $V \Rightarrow W$ označuje výrok, který neplatí jenom tehdy, když výrok V platí a přitom W neplatí; je to tzv. implikace, v níž výrok V implikuje výrok W. Přitom $V \Rightarrow W$ obvykle čteme: když (platí) V, pak (platí) W. Symbol non V označuje negaci výroku V: non V platí, když a jen když V neplatí.

Jsou-li r a r' dvě relace dominování, pak vztah $r \subset r'$ značí, že pro každou dvojici $C, C' \in \mathscr{C}$ jest $CrC' \Rightarrow Cr'C'$. P-konformní relaci dominování r nazveme *minimální*, když má vlastnost, že platí vztah $r \subset r'$ pro každou relaci $r' \in \mathscr{D}_{\mathsf{P}}$. Z definice je zřejmé, že existuje právě jedna P-konformní relace dominování, která je minimální; označíme ji symbolem r_{P}. Budeme psát

$$C \operatorname{dom}_{\mathsf{P}} C' \quad \text{místo} \quad C \operatorname{dom}_{r_{\mathsf{P}}} C'\ ;$$

tedy platí:

$$C \operatorname{dom}_{\mathsf{P}} C' \Rightarrow \forall (r \in \mathscr{D}_{\mathsf{P}})\ C \operatorname{dom}_r C'$$

pro libovolnou dvojici C, C' rozhodovacích kritérií pozorovatele. V případech, kdy nebude třeba explicitně vyznačovat postuláty P indexem, vyznačíme dominování vzhledem k relaci r_{P} stručnějším zápisem

$$(8.4) \qquad C \operatorname{Dom} C' \text{ místo } C \operatorname{dom}_{\mathsf{P}} C'\,, \quad \text{tj.} \quad Cr_{\mathsf{P}}C'\,.$$

Výroková funkce P na množině všech relací dominování charakterizuje *typ neurčitosti* daného rozhodovacího problému pozorovatele, tj. daného problému predikce. Výroková funkce P, kde tedy $\mathsf{P}(r)$ je výrok, který má smysl pro každou relaci dominování r, odpovídá našim postulátům o racionalitě jednání hráčů, tudíž mimo jiné závisí na preferenčním schématu $\{U_i\}_{i \in I}$ dané hry.

Rozhodovací kritérium pozorovatele $C^* \in \mathscr{C}$ nazveme *vnitřně stabilní* vzhledem k P neboli P-*stabilní*, když neexistuje žádné rozhodovací kritérium v $\mathscr{C}$, které by dominovalo kritérium C^* vzhledem k relaci r_{P}: pro žádné $C \in \mathscr{C}$ neplatí, že $C \operatorname{dom}_{\mathsf{P}} C^*$. Obecněji, rozhodovací kritérium $C^* \in \mathscr{C}$ je *vnitřně stabilní vzhledem k relaci dominování r*, když má vlastnost:

$$\forall (C \in \mathscr{C}) \text{ non } [C \operatorname{dom}_r C^*]\ ;$$

jinak řečeno, kdy C^* je tzv. *maximální* prvek v $\mathscr{C}$ vzhledem k relaci r. Označíme-li symbolem $\mathscr{C}_r$ množinu všech rozhodovacích kritérií, které jsou vnitřně stabilní vzhledem k dané relaci dominování r, lze tuto množinu symbolicky vyjádřit ve tvaru:

$$\mathscr{C}_r = \{C^* : C^* \in \mathscr{C};\ \forall(C \in \mathscr{C}) \text{ non } [C \operatorname{dom}_r C^*]\} . \tag{8.5}$$

Množinu všech P-stabilních rozhodovacích kritérií označíme $\mathscr{C}_{\mathsf{P}}$:

$$\mathscr{C}_{\mathsf{P}} = \mathscr{C}_{r_{\mathsf{P}}} . \tag{8.6}$$

Každému rozhodovacímu kritériu C pozorovatele odpovídá právě jedna globální strategie $s \in S$ – subjektivní pravděpodobnost pozorovatele – tak, že $C = C_s$. Globální smíšená strategie s^* se nazývá *vnitřně stabilní* vzhledem k P čili P-*stabilní*, když rozhodovací kritérium C_s (srovn. (7.18)) je P-stabilní. Množinu všech P-stabilních globálních smíšených strategií S_{P} lze tedy definovat vztahem:

$$S_{\mathsf{P}} = \{s : s \in S;\ C_s \in \mathscr{C}_{\mathsf{P}}\} . \tag{8.7}$$

Položíme-li nyní $S_0 = S_{\mathsf{P}}$, je tím proveden pro strategickou hru (7.1) proces redukce třídy S všech globálních smíšených strategií na podtřídu S_0, která se skládá z těch globálních smíšených strategií, jež jsou ve shodě s racionalitou hráčů vymezenou postulátem o predikci, daným v exaktní formulaci jako $\mathsf{P}(r)$ pro relaci dominování r. Je-li r libovolná P-konformní relace dominování a položíme-li

$$S_r = \{s : s \in S;\ C_s \in \mathscr{C}_r\} , \tag{8.8}$$

pak z minimality relace r_{P} ihned vyplývá, že

$$S_r \subset S_0 \quad (\text{tj. } \mathscr{C}_r \subset \mathscr{C}_{\mathsf{P}}) . \tag{8.9}$$

Tento fakt lze vyjádřit slovy, že každá globální smíšená strategie, která je vnitřně stabilní vzhledem k libovolné relaci dominování konformní s postulátem o predikci, je již konsistentní s tímto postulátem, neboť je P-stabilní.

Postulát o predikci formulovaný jako konjunkce požadavků (8.2) a (8.1), což lze podle shora zavedených označení zapsat jako rovnost $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \,\&\, \mathsf{P}_2$, se skládá ze dvou částí, z nichž druhá, representovaná výrokovou funkcí P_2, tj. (8.2), odráží jenom skutečnost vyplývající z interpretace rozšířené objektivní base (6.3) vyšetřované strategické hry (7.1); jinými slovy, požadavek P_2 tvoří exaktně formulovanou součást základního postulátu racionality o znalosti hry (týkající se zde pozorovatele).

Poněvadž jsme pracovali s rozhodovacími kritérii pozorovatele jenom proto, abychom mohli globální smíšené strategie interpretovat jako subjektivní pravděpodobnosti, můžeme se nadále omezit na manipulaci jenom se strategiemi. Speciálně můžeme požadavek P_2 přeformulovat jako výrokovou funkci na množině relací dominování v prostoru globálních smíšených strategií tím, že ve výroku $\mathsf{P}_2(r)$ vyjádřeném v (8.2) nahradíme výraz $C_s \operatorname{dom}_r C_{s'}$ výrazem $s \operatorname{dom}_r s'$. Přirozenější však bude opřít se o druhou část postulátu o predikci přímo a zavést pojem *přípustné* (admisibilní) globální smíšené strategie jako takového prvku $s \in S$, pro který platí vztah $s \in S_{\text{adm}}$, přičemž klademe

$$S_{\text{adm}} = \bigcup_{\mathscr{K} \in K} S_{\mathscr{K}} \tag{8.10}$$

(srovn. kap. 6, poslední paragraf). Potom pojem relace dominování mezi globálními smíšenými strategiemi stačí zavést ve třídě S_{adm} všech přípustných strategií a pojem konformnosti dominování definovat vlastností (8.1) pro vztah $s \operatorname{dom}_r s'$. Třídu S_0 konstruujeme pak ze třídy S_{adm} stejným postupem jako nahoře množinu $\mathscr{C}_{\mathsf{P}}$ na základě pojmu vnitřní stability.

Místo naznačeného postupu užijeme přímé metody. Nechť K je přípustná koalice, tedy $K \in \Psi(K)$. Budeme říkat, že globální strategie $s \in S_{\text{adm}}$ *dominuje* globální strategii $s' \in S_{\text{adm}}$ *via koalice* K, ve znacích

$$s \operatorname{Dom}_K s' ,$$

když lze najít přípustnou koaliční strukturu $\mathscr{K} \in K$ takovou, že $K \in \mathscr{K}$, $s \in S_{\mathscr{K}}$, $s' \in S_{\mathscr{K}}$, přičemž platí, že $s_{-K} = s'_{-K}$ a

$$H_i(s) > H_i(s') \quad \text{pro každé} \quad i \in K ,$$

tj. pro každého člena i koalice K; H_i ovšem označuje výplatní funkci hráče i.

Jsou-li s a s' přípustné globální smíšené strategie, pravíme, že *s dominuje s'*, a píšeme $s \operatorname{Dom} s'$, když existuje přípustná koalice K taková, že s dominuje s' via koalice K:

$$s \operatorname{Dom}_K s' \quad \text{pro některé} \quad K \in \Psi(K) .$$

Třídu S_{stab} globálních smíšených strategií definujeme rovností

$$S_{\text{stab}} = \{s^* : s^* \in S_{\text{adm}};\ \forall(s \in S_{\text{adm}}) \text{ non } [s \operatorname{Dom} s^*]\} . \tag{8.11}$$

Každý prvek množiny S_{stab} nazveme *vnitřně stabilním* (vzhledem k postulátu o predikci). Tedy vnitřně stabilní je každá taková přípustná globální smíšená strategie, která není dominována žádnou jinou přípustnou globální smíšenou strategií; strategie sama sebe ovšem nedominuje, neboť relace Dom je antireflexivní. Platí:

Tvrzení. *Jest*

$$S_{\text{stab}} = S_0 , \quad \text{tj.} \quad S_{\text{stab}} = S_{\mathsf{P}} , \tag{8.12}$$

kde P *je konjunkce postulátů* (8.1) *a* (8.2); srovn. (8.7). *Jestliže* $s, s' \in S_{\text{adm}}$, *pak platí* $s \operatorname{Dom} s'$, *když a jen když* $C_s \operatorname{Dom} C_{s'}$; srovn. (8.4).

Tímto tvrzením je popsán charakter minimální relace dominování r_{P}.

Položme si otázku, jaký je smysl postulátu (8.1) o vlastním dominování, tj. o podmíněném očekávání pozorovatele za podmínky realisace přípustné koalice, resp. jaký je smysl pojmu vnitřní stability vyplývajícího z uvedeného postulátu o predikci. Myšlenka o vnitřní stabilitě je založena na následující úvaze. Představme si, že se uskuteční sekvence po sobě jdoucích partií dané strategické hry. Ptáme se, které globální smíšené strategie mají takový charakter, že když se realisují v určité partii, což znamená, že musí být přípustné, pak žádná koalice vzniklé koaliční struktury, i když se dozví strategie, jichž použili ostatní koalice, nebude mít snahu v další partii změnit své jednání. Takový charakter mají právě vnitřně stabilní globální strategie.

Každá vnitřně stabilní globální smíšená strategie $s \in S_{\text{stab}}$ má totiž následující důležitou vlastnost *rovnováhy* vzhledem k realisované koaliční struktuře $\mathscr{K}$ (tedy $s \in S_{\mathscr{K}}$, $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$):

Když kterákoli koalice $K \in \mathscr{K}$ změní svou strategii s_K (která je složkou strategie s) na libovolnou jinou strategii s'_K, aniž změní své strategie zbývající koalice, pak nemůže být

$$H_i(s'_K, s_{-K}) > H_i(s) \quad \text{pro všechna} \quad i \in K ,$$

takže existuje alespoň jeden člen i koalice K, jehož výplaty splňují nerovnost

$$H_i(s'_K, s_{-K}) \leqq H_i(s) ,$$

což znamená, že hráč i si přechodem od strategie s_K k strategii s'_K buď pohorší, nebo si alespoň nepolepší; tudíž tento hráč nemá snahu o změnu strategie s_K, která je komponentou vnitřně stabilní strategie s (srovn. (6.81)). Odtud vyplývá, že ani koalice K jako celek nemá zájem na změně své strategie, neboť nerespektování názoru kteréhokoliv člena by mohlo mít za následek rozpad koalice; srovn. též úvahy o slabším principu motivace dohod v paragrafu věnovaném strategické hře v koaličním tvaru (kap. 6, tzv. II. princip motivace dohod, str. 112).

Z provedeného rozboru vyplývá objektivní charakter subjektivního očekávání analysujícího pozorovatele, které vystupuje v postulátu o predikci. Postulát o predikci tak vyjadřuje minimální požadavek na racionalitu jednání uskutečňujícího se uvnitř každé realisované koalice, jenž bere v úvahu charakter vnitrokoaličního vyjednávání.

Pro analysujícího racionálního hráče stojícího v úloze vnějšího pozorovatele vyplývá z pojmu vnitřní stability spíše negativní závěr o tom, co ve hře s racionálními spoluhráči dělat nemá, než aby mu z něho až na výjimečné případy (např. antagonistické hry) vyplynulo doporučení, do které koalice se má snažit vstoupit a jaké jednání má zvolit. V komunikativní hře vede tato skutečnost k tomu, že logicky nutně dochází k mezikoaličnímu vyjednávání v realisované koaliční struktuře o nezávazné kooperaci. Kdybychom takové vyjednávání mezi koalicemi nechtěli připustit, neměla by většina konfliktních situací positivní „řešení" racionální povahy.

Všimněme si totiž, že každý hráč i má v záloze (ve hrách bez nucené kooperace) alespoň jeden postup, který však nelze, jak víme, považovat za zcela racionální (srovn. kap. 6, zvláště úvahu o garanci na str. 96): nevstoupit do žádné koalice a zvolit jako své jednání některou garanční strategii $\bar{s}_i$, čímž dosáhne nejméně své garanční výplaty $v(i)$; srovn. (6.27) a (6.26), příp. též obecný vzorec (6.89).

V některých nekomunikativních hrách hráčům také nic jiného nezbývá, než se opřít při volbě strategií o tento garanční princip nebo o jeho případné modifikace.

Zatím jsme studovali problém vnitřní stability vzhledem k postulátům racionality P_1 a P_2, tj. (8.1) a (8.2). Postavme se nyní za stanovisko, že pozorovatel neočekává, že hráč i je ochoten ke spolupráci v rámci některé koalice, když by jeho výplata byla nižší než jeho garanční výplata $v(i)$; srovn. (6.27). Potom tím spíše nelze předpokládat, že ve hře nastane globální smíšená strategie $s \in S$, pro niž by platilo, že

$$H_i(s) < v(i) \quad \text{pro některé} \quad i \in I\,.$$

Globální smíšenou strategii $s \in S$ nazveme *individuálně racionální*, když má vlastnost, že platí

$$H_i(s) \geqq v(i) \quad \text{pro každé} \quad i \in I\,.$$

Položíme-li

(8.13) $$S_{\mathrm{ind}} = \{s : s \in S;\, \forall(i \in I)\, H_i(s) \geqq v(i)\}\,,$$

představuje symbol S_{ind} množinu všech individuálně racionálních globálních smíšených strategií. Označme $\mathsf{P}_3(r)$ výrok

$$\forall(s \in S)\, \forall(s' \in S)\, [\mathrm{non}\, (s'\ \mathrm{Dom}\ s)\, \&\, (s \in S_{\mathrm{ind}})\, \&\, \mathrm{non}\, (s' \in S_{\mathrm{ind}}) \Rightarrow C_s\ \mathrm{dom}_r\ C_{s'}]\,.$$

Položíme-li v definici (8.7) $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1\, \&\, \mathsf{P}_2\, \&\, \mathsf{P}_3$, reprezentuje symbol S_{P} množinu všech globálních smíšených strategií, které jsou vnitřně stabilní vzhledem ke konjunkci postulátů racionality $\mathsf{P}_1\, \&\, \mathsf{P}_2\, \&\, \mathsf{P}_3$. Platí:

Tvrzení. *Globální smíšená strategie je vnitřně stabilní vzhledem k postulátům racionality* P_1, P_2 *a* P_3, *když je vnitřně stabilní vzhledem k postulátům racionality* P_1 *a* P_2 *a když současně je individuálně racionální*; ve znacích:

$$S_{\mathsf{P}_1\, \&\, \mathsf{P}_2\, \&\, \mathsf{P}_3} = S_{\mathrm{stab}} \cap S_{\mathrm{ind}}\,.$$

Základní otázkou, kterou se ve smyslu úvah úvodního paragrafu kap. 7 musíme zabývat především, je problém existence vnitřně stabilních globálních smíšených strategií. Tuto otázku nejprve vyšetříme pro nejjednodušší případ strategické hry, jímž je hra nekooperativní.

Nekooperativní hry a rovnováha

V tomto paragrafu budeme aplikovat doposud jen formálně vybudovanou teorii predikce globálních smíšených strategií na případ nekooperativní hry. Pojem přípustné globální strategie v nekooperativní hře je podle (8.10) totožný s pojmem $\mathscr{K}_0$-vektoru smíšených strategií jednočlenných koalic (srovn. (6.6), (6.80) a (6.81)); místo $\mathscr{K}_0$-vektor říkáme prostě *vektor smíšených strategií* (hráčů vystupujících v dané hře). Každý takový vektor má tvar

(8.14) $$s = \{s_i\}_{i \in I}\,, \quad \text{kde} \quad s_i \in S_i \quad (i \in I)\,,$$

neboli podle (1.1) $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Máme-li tedy v nekooperativní hře:

$$S_{\mathrm{adm}} = S_{\mathscr{K}_0} = \prod_{i \in I} S_i \,.$$

Když $s \in S_{\mathrm{adm}}$, pak podle (8.14) a (6.80) platí

$$s(a) = \prod_{i \in I} s_i(a) \quad \text{pro} \quad a \in A \,.$$

Minimální relace dominování v S_{adm} je definována vlastností, že s Dom s', když a jen když platí

$$s_{-i} = s'_{-i}\,, \quad H_i(s) > H_i(s')$$

pro některého hráče $i \in I$. V nekooperativní hře se globální smíšená strategie s^*, která je vnitřně stabilní vzhledem k minimální relaci dominování (tj. vzhledem k postulátu o predikci), tedy $s^* \in S_{\mathrm{stab}}$ (srovn. definici (8.11)), nazývá *rovnovážný* vektor smíšených strategií. Tudíž s^* je rovnovážný vektor smíšených strategií v nekooperativní hře tehdy a jenom tehdy, když pro každé $i \in I$ a $s_i \in S_i$ platí nerovnost

$$H_i(s^*) \geqq H_i(s_i, s^*_{-i}) \,. \tag{8.15}$$

Strategie $s_i^* \in S_i$ hráče i se nazývá *bayesovská* vzhledem ke strategii $s_{-i} \in S_{-i}$ antikoalice, když platí rovnost

$$H_i(s_i^*, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} H_i(s_i, s_{-i}) \,;$$

pro případ $n = |I| = 2$ byl pojem beyesovské strategie definován již v minulé kapitole. Vektor smíšených strategií s^* je rovnovážný právě tehdy, když pro každé $i \in I$ je komponenta s_i^* vektoru s^* bayesovskou strategií hráče i vzhledem k s^*_{-i}, jinými slovy, má-li vektor s^* vzájemně bayesovské složky. Dále platí:

Tvrzení. *Vektor smíšených strategií s^* je rovnovážný, když a jen když jsou pro každé $i \in I$ splněny rovnosti*

$$H_i(a'_i, s^*_{-i}) = \max_{a_i \in A_i} H_i(a_i, s^*_{-i}) \,,$$

a to pro všechny ryzí strategie $a'_i \in A_i$ hráče i takové, že pro ně jest $s_i^*(a'_i) > 0$.

Jak jsme upozornili již v kapitole 7, budujeme celou teorii predikce na předpokladu, že žádný z hráčů není indiferentní. Odtud snadno nahlédneme, že pojem rovnovážného vektoru smíšených strategií je jednoznačně vymezen již tehdy, když nekooperativní hra je dána v redukovaném kanonickém tvaru (5.51). Tím je zdůvodněno, proč redukovaný kanonický tvar považujeme za *základní tvar* nekooperativní hry. Přitom trojici

$$(I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I})$$

nazýváme *smíšené rozšíření* nekooperativní hry (dané v redukovaném kanonickém tvaru); smysl této definice vyplývá z (6.40) a z (6.84).

Smysl rovnovážnosti vektoru smíšených strategií vyplývá z úvah provedených v předešlém paragrafu: žádný hráč i, který se odchýlí od rovnovážného vektoru s^* tím, že změní strategii s_i^* na libovolnou jinou strategii $s_i \in S_i$, si nemůže podle (8.15) svůj užitek zvýšit. Z toho lze ihned dedukovat, že v nekooperativní hře mohou být předmětem (nezávazných) dohod mezi racionálními hráči jenom rovnovážné vektory smíšených strategií, neboť při dohodě o nerovnovážném vektoru by si alespoň jeden z hráčů mohl zvětšit svoji výplatu ústupem od dohody během realisace hry.

Všimněme si, že postulát o očekávané racionalitě v nekooperativní hře o dvou hráčích, který jsme vyslovili v kapitole 7 z hlediska rozhodování o volbě strategie prováděného jedním hráčem, je ekvivalentní postulátu o predikci v tom smyslu, že rovněž vede k pojmu rovnovážného vektoru a tedy obecně k nutnosti dohod mezi protivníky, chtějí-li dosáhnout výsledku racionálního charakteru.

Základní problém, zda v nekooperativní hře existují vektory smíšených strategií, které mají racionální charakter ve smyslu konsistence s postulátem o predikci, je řešen Nashovou *větou o existenci rovnovážných vektorů*:

Teorém. *V nekooperativní hře existuje alespoň jeden rovnovážný vektor smíšených strategií*; v symbolech:

$$S_{\text{stab}} \neq \emptyset\,.$$

Racionální charakter rovnovážných vektorů strategií je potvrzen další jejich důležitou vlastností, kterou mají:

Teorém. *Každý rovnovážný vektor smíšených strategií je již individuálně racionální*; ve znacích:

$$S_{\text{stab}} \subset S_{\text{ind}}$$

(srovn. (8.12) a (8.13)).

Jako příklad nekooperativní hry, v níž existuje jenom jeden rovnovážný vektor strategií, jehož složky jsou navíc ryzí strategie, si probereme případ dilematu vězně (srovn. str. 88).

Příklad. Nechť strategická hra (7.1) je nekooperativní hra, v níž $|I| = 2$ a v níž jsou hráči očíslováni podle (1.1). Dále předpokládáme, že prostor elementárních výsledků E má právě čtyři prvky,

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\,,$$

a že kardinální preferenční stupnice U_1 a U_2 uspořádají prostor E ve škály

$$\text{(8.16)} \qquad e_3 \succ_1 e_2 \succ_1 e_1 \succ_1 e_4\,, \qquad e_4 \succ_2 e_2 \succ_2 e_1 \succ_2 e_3\,.$$

Pro tuto hru o dvou hráčích činíme dále předpoklad, že je typu 2×2 (srovn. str. 73), kde

$$A_1 = \{a_1, a_1'\}, \quad A_2 = \{a_2, a_2'\},$$
$$\varrho(a_1, a_2) = e_1, \quad \varrho(a_1, a_2') = e_3,$$
$$\varrho(a_1', a_2) = e_4, \quad \varrho(a_1', a_2') = e_2.$$

Chceme dokázat, že za těchto předpokladů obsahuje množina S_{stab} definovaná rovnicí (8.11) právě jeden prvek, jímž je vektor ryzích strategií (a_1, a_2).

Popsanou strategickou hru lze interpretovat jako dilema vězně: nečárkované strategie a_1 resp. a_2 představují přiznání prvního resp. druhého vězně, kdežto čárkované strategie a_1', a_2' representují každá strategii nepřiznat se. Tím je dán i charakter elementárních výsledků, k nimž jednání hráčů vedou: např. výsledek e_1 označuje typ rozsudku v případě, kdy se oba vězňové přiznají. Shora popsané škály vyjadřují preference vězňů k možným typům rozsudku. Tvrzení o množině S_{stab} zachycuje skutečnost, že jediným rozumným jednáním obou vzájemně si nedůvěřujících vězňů je přiznat se.

Budiž s vektor smíšených strategií, $s = (s_1, s_2)$, kde $s_1(a_1) = \alpha$, $s_2(a_2) = \beta$. Podle (8.14) a (6.40) máme:

$$\varrho(s) = \alpha\omega_\beta + (1 - \alpha)\,\omega_\beta',$$

kde jsme položili

$$\text{(8.17)} \qquad \omega_\beta = \beta e_1 + (1 - \beta)\,e_3, \quad \omega_\beta' = \beta e_4 + (1 - \beta)\,e_2.$$

Z definice (8.11) vyplývá, že vektor s leží v S_{stab}, když a jen když pro každé $s_1' \in S_1$ platí vztah

$$\varrho(s) \succsim_1 \varrho(s_1', s_2)$$

a pro každé $s_2' \in S_2$ platí vztah

$$\varrho(s) \succsim_2 \varrho(s_1, s_2').$$

Klademe-li $s_1'(a_1) = \alpha'$, máme nejprve dokázat, že

$$\text{(8.18)} \qquad \alpha\omega_\beta + (1 - \alpha)\,\omega_\beta' \succsim_1 \alpha'\omega_\beta + (1 - \alpha')\,\omega_\beta'$$

pro každé $0 \leqq \alpha' \leqq 1$. Pravá strana posledního vztahu je výraz, který probíhá s α' rostoucím od 0 do 1 interval

$$\omega_\beta \succsim_1 \alpha'\omega_\beta + (1 - \alpha')\,\omega_\beta' \succsim_1 \omega_\beta',$$

ježto vztahy (8.16) a (8.17) spolu s kardinalitou preferencí implikují preferenční vztah $\omega_\beta \succ_1 \omega_\beta'$. Indiference mezi výsledkem ω_β a $\alpha'\omega_\beta + (1 - \alpha')\,\omega_\beta'$ nastává právě pro $\alpha' = 1$, z čehož usoudíme, že splnění vztahu (8.18) lze zaručit pro $0 \leqq \alpha' \leqq 1$ právě tehdy, jestliže $\alpha = 1$. Zcela analogicky odvodíme, že rovněž $\beta = 1$. Tudíž jediný vektor smíšených strategií, který splňuje obě hořejší podmínky, je vektor (s_1, s_2)

daný vztahy $s_1(a_1) = 1$, $s_2(a_2) = 1$, neboli vektor ryzích strategií (a_1, a_2), což bylo dokázat.

Snadno se přesvědčíme, že ve vyšetřované strategické hře je a_1 jedinou garanční strategií prvního hráče a že a_2 je jedinou garanční strategií druhého hráče: tedy vektor (a_1, a_2) je skutečně individuálně racionální.

Vlastnosti rovnovážných vektorů

Jsou-li v dané nekooperativní hře s a t dva vektory smíšených strategií, pak každý vektor smíšených strategií r nazveme *rekombinací* vektorů s a t, když pro každé $i \in I$ je buď $r_i = s_i$ nebo $r_i = t_i$; srovn. (8.14). Dva rovnovážné vektory smíšených strategií jsou podle definice *záměnné*, když každá jejich rekombinace je opět rovnovážný vektor smíšených strategií.

Příklad 1. Budiž nekooperativní hra v redukovaném kanonickém tvaru dána jako bimaticová hra (5.53) s maticemi typu 2×2

$$Q^{(1)} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}, \quad Q^{(2)} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Označuje-li pro každý vektor $s = (s_1, s_2)$ smíšených strategií symbol $s_i^{(j)}$ pravděpodobnost j-té strategie i-tého hráče ($i, j = 1, 2$; pro $i = 1$ je j-tá strategie representována j-tou řádkou, pro $i = 2$ j-tým sloupcem v obou výplatních maticích), lze tento vektor vyjádřit ve tvaru

$$s = ((s_1^{(1)}, s_1^{(2)}), (s_2^{(1)}, s_2^{(2)})).$$

Použijeme-li tvrzení z minulého paragrafu, okamžitě zjistíme, že vektory smíšených strategií

$$s^* = ((1{,}0), (1{,}0)), \quad t^* = ((0{,}1), (0{,}1))$$

jsou oba rovnovážné, ale nejsou záměnné: žádný z vektorů

$$r^{(1)} = ((1{,}0), (0{,}1)), \quad r^{(2)} = ((0{,}1), (1{,}0))$$

není rovnovážný.

Uvedená hra má ještě jeden rovnovážný vektor strategií, a to vektor

$$r^* = ((\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})),$$

ale pak již žádný jiný:

$$S_{\text{stab}} = \{r^*, s^*, t^*\}.$$

V dané hře nejsou tedy žádné dva rovnovážné vektory záměnné. Výplaty pro rovnovážné vektory jsou:

$$H_1(r^*) = \tfrac{7}{8}, \quad H_1(s^*) = H_1(t^*) = 3,$$
$$H_2(r^*) = \tfrac{10}{3}, \quad H_2(s^*) = H_2(t^*) = 4.$$

Příklad 2. V bimaticové hře (5.53) typu 3 × 3 s výplatními maticemi

$$Q^{(1)} = \begin{Vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{Vmatrix}, \quad Q^{(2)} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

jsou vektory smíšených strategií

$$s^* = ((1, 0, 0), (1, 0, 0)), \quad t^* = ((0, 0, 1), (0, 0, 1))$$

oba rovnovážné a záměnné, neboť jejich rekombinace

$$r^{(1)} = ((1, 0, 0), (0, 0, 1)), \quad r^{(2)} = ((0, 0, 1), (1, 0, 0))$$

jsou opět rovnovážné vektory smíšených strategií. Množinu všech rovnovážných vektorů lze vyjádřit ve tvaru:

$$S_{\text{stab}} = \{(\alpha s_1^* + (1 - \alpha)\, t_1^*, \beta s_2^* + (1 - \beta)\, t_2^*) : 0 \leqq \alpha \leqq 1, 0 \leqq \beta \leqq 1\},$$

takže rovnovážných vektorů je nekonečně mnoho. Klademe-li

$$s^{(\alpha,\beta)} = (\alpha s_1^* + (1 - \alpha)\, t_1^*, \beta s_2^* + (1 - \beta)\, t_2^*),$$

jsou výplaty v rovnovážných bodech vyjádřeny formulemi:

$$H_1(s^{(\alpha,\beta)}) = \beta + 1, \quad H_2(s^{(\alpha,\beta)}) = 3\alpha \quad \text{pro} \quad 0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1.$$

Ježto $s^* = s^{(1,1)}$, $t^* = s^{(0,0)}$, dostaneme pro výplaty číselné hodnoty

$$H_1(s^*) = 2, \quad H_2(s^*) = 3; \quad H_1(t^*) = 1, \quad H_2(t^*) = 0.$$

Dva rovnovážné vektory s^* a t^* se nazývají *ekvivalentní*, když platí rovnosti

(8.19) $$H_i(s^*) = H_i(t^*) \quad \text{pro každé} \quad i \in I.$$

V příkladě 1 nejsou sice rovnovážné vektory s^* a t^* záměnné, ale zato jsou ekvivalentní. V příkladě 2 neopak tam definované vektory s^* a t^* jsou záměnné, ale nejsou ekvivalentní.

Rovnovážný vektor smíšených strategií s^* budeme nazývat *efektivním*, když splňuje podmínku, že neexistuje žádný rovnovážný vektor t^* takový, že

$$H_i(t^*) > H_i(s^*) \quad \text{pro každé} \quad i \in I.$$

Formálně vyjádřeno, $s^* \in S_{\text{stab}}$ je efektivní, když a jen když $s^* \in S_{\text{efekt}}$, kde

(8.20) $$S_{\text{efekt}} = \{s^*: s^* \in S_{\text{stab}}; \forall(t^* \in S_{\text{stab}}) \text{ non } [\forall(i \in I)\, H_i(t^*) > H_i(s^*)]\}.$$

Nekooperativní hra v případě 1 má právě dva efektivní rovnovážné vektory: s^* a t^*; vektor r^* není efektivní, neboť $H_1(r^*) < H_1(s^*)$, $H_2(r^*) < H_2(s^*)$. V nekonečné množině rovnovážných vektorů S_{stab} nekooperativní hry uvedené v příkladě 2 leží nekonečný počet efektivních rovnovážných vektorů:

$$S_{efekt} = \{s^{(\alpha,\beta)}: \text{buď } \alpha = 1 \text{ nebo } \beta = 1\}.$$

Poslední příklad činí zřejmým smysl pojmu efektivity. Rozbor nekooperativní konfliktní situace vede hráče k závěru, že se musí dohodnout na některém rovnovážném vektoru jako společném způsobu jednání takovém, že se od něho nikdo z nich nebude chtít z racionálních důvodů odchýlit. Přirozenými kandidáty dohody o společném jednání jsou efektivní rovnovážné vektory, neboť jednání odpovídající neefektivnímu rovnovážnému vektoru lze nahradit jednáním, při němž se všem hráčům jejich užitek zvýší (srovn. též úvahy vstupního paragrafu kap. 7).

V příkladě 2 bychom byli nakloněni názoru, že nejefektivnější jednání představuje vektor $s^* = s^{(1,1)}$. Z teorie vyjednávání o volbě efektivního jednání vyplývá, že oba hráči mají racionální důvody zvolit jako nejlepší způsob dohody právě vektor s^*. Ale a priori nemůžeme žádný z vektorů ležících v množině S_{efekt} vyloučit; např. druhý hráč, řídě se jenom svým systémem preferencí, nemá a priori žádný důvod preferovat dohodu s^* proti dohodě $s^{(1,0)}$. Aposteriorně vypadá ovšem situace jinak: první hráč se může bránit proti dohodě $s^{(1,0)}$ hrozbou, že zvolí svou strategii odpovídající parametru $\alpha = 0$, čímž se dojde k neefektivnímu rovnovážnému vektoru t^*, který je již v rozporu se zájmy druhého hráče.

Doplníme si naši nomenklaturu ještě o pojem *rovnovážného výplatního vektoru.* Výplatní vektor $x^* \in X$ (srovn. (5.36)) nazveme *rovnovážným*, když existuje rovnovážný vektor strategií s^* takový, že $H_I(s^*) = x^*$ (srovn. (5.47)); podle (5.49) potom musí být $x^* \in \tilde{X}$.

Vyšetříme nyní některé vlastnosti rovnovážných vektorů v rozvinutých strategických hrách. Smíšená strategie $s_i \in S_i$ hráče i se nazývá *rozvinutá smíšená strategie* (nebo také *behavioristická*) ve strategické hře v rozvinutém tvaru s pravidly hry (4.46), když pro každou informační množinu $J \in \mathcal{J}_i^*$ (srovn. definici (3.10)) hráče i existuje rozložení pravděpodobnosti $s_i^{(J)}$ na množině alternativ ΔJ tak, že

$$s_i(a_i) = \prod_{J \in \mathcal{J}_i^*} s_i^{(J)}\left(a_i(J)\right); \quad a_i \in A_i.$$

Teorém. *Ve strategické hře s dokonalou pamětí existuje aspoň jeden rovnovážný vektor, jehož komponenty jsou rozvinuté smíšené strategie.* Obráceně, *ke každému rovnovážnému vektoru s^* lze ve hře s dokonalou pamětí najít rovnovážný vektor t^*, jehož komponenty jsou rozvinuté smíšené strategie a který je ekvivalentní s vektorem* s^*, tj. pro nějž platí rovnosti (8.19).

Historicky nejstarší teorém o existenci rovnovážných vektorů se týká strategických her s úplnou informací.

Teorém. *Každá nekooperativní hra s úplnou informací má alespoň jeden rovnovážný vektor, jehož komponenty jsou ryzí strategie*; symbolicky:

$$\exists(a^* \in A)\ \forall(i \in I)\ \forall(s_i \in S_i)\ H_i(a^*) \geqq H_i(s_i, a^*_{-i}).$$

Z tvrzení uvedeného v předcházejícím paragrafu snadno vyplývá, že ke konstrukci rovnovážného vektoru ryzích strategií stačí znát preferenční stupnice všech hráčů jenom v (konečném) prostoru ryzích výsledků $\Omega^{(0)}$ (srovn. (4.5)). Lze tedy ve hrách s úplnou informací definovat pojem rovnovážného vektoru ryzích strategií i v případě, kdy hráči mají ordinální, ale nikoli kardinální preference, a zaručit existenci takového rovnovážného vektoru.

Přejdeme k vyšetřování strategických her o dvou hráčích. *Antihrou* ke strategické hře o dvou hráčích nazveme strategickou hru, která se liší od dané hry jenom svým preferenčním schématem (U'_1, U'_2), přičemž U'_1 (resp. U'_2) je systém preferencí, který je antagonistický k systému preferencí U_2 (resp. U_1) dané hry; srovn. (6.93). Nekooperativní strategická hra o dvou hráčích se nazývá *kvasiantagonistická*, je-li množina všech rovnovážných výplatních vektorů dané hry identická s množinou všech rovnovážných vektorů její antihry a jestliže existuje alespoň jeden vektor smíšených strategií, který je současně rovnovážný v dané hře i v její antihře.

Příkladem kvasiantagonistické hry jest dilema vězně, jehož exaktní formulaci jsme provedli v předcházejícím paragrafu. Pro tuto hru platí, že vektor (a_1, a_2) je současně jediným rovnovážným vektorem k ní přiřazené antihry.

Teorém. *V kvasiantagonistické hře existuje právě jeden rovnovážný výplatní vektor.*

V kvasiantagonistické hře nazveme vektor smíšených strategií *oboustranně rovnovážný*, je-li rovnovážný v dané hře i v její antihře. Z posledního teorému vyplývá jako

Důsledek. *Každé dva oboustranně rovnovážné vektory smíšených strategií jsou záměnné a ekvivalentní.*

Existence oboustranně rovnovážného bodu je ovšem postulována v definici kvasiantagonistické hry. Platí:

Každá antagonistická hra je kvasiantagonistická a lze ji definovat vlastností, že je sama k sobě antihrou. Každý rovnovážný bod antagonistické hry je již oboustranně rovnovážný.

Z těchto faktů ihned plyne:

Teorém. *Vektor smíšených strategií s^* v antagonistické hře je rovnovážný, když a jen když s_1^*, s_2^* jsou garanční strategie hráčů; přitom platí rovnosti*

$$H_1(s^*) = -H_2(s^*) = v(1) = -v(2)$$

za předpokladu, že výplatní funkce hráčů jsou určeny soustavou užitkových funkcí o nulovém součtu.

Tím jsme opět dospěli k výsledkům, které byly uvedeny v jiné formulaci na konci kapitoly 6.

Významnou pomůckou ke konstrukci rovnovážných vektorů v nekooperativních hrách, kterou nyní nakonec uvedeme, je následující

Lemma. *Nechť $a_i \in A_i$ je ryzí strategie hráče $i \in I$ v nekooperativní hře, k níž existuje strategie $a'_i \in A_i$, která má vlastnost, že pro každé $a_{-i} \in A_{-i}$* platí nerovnost

$$H_i(a_i, a_{-i}) < H_i(a'_i, a_{-i}) .$$

Potom pro každý rovnovážný vektor s^* je splněna rovnost $s_i^*(a_i) = 0$.

V příkladě 2 má vlastnost uvedenou v lemmatu druhá strategie prvního hráče a druhá strategie druhého hráče. Musí mít tedy rovnovážné vektory komponenty, jež jsou směsi první a třetí strategie hráče i ($i = 1, 2$), čehož jsme při konstrukci množiny S_{stab} použili.

Koalice s racionálními členy

Dříve než se budeme zabývat problémem predikce ve hrách, které nejsou nekooperativní, musíme vyšetřit strategickou hru z hlediska jedné zformované koalice. V předcházející kapitole jsme obecně formulovali problém rozhodování za neurčitosti za předpokladu, že rozhoduje jeden subjekt. Ve strategické hře realisovaná koalice rovněž stojí před problémem rozhodování za neurčitosti s tou důležitou změnou, že každý člen koalice má k výsledkům jiný postoj. Rozhodování koalice K musí tedy vycházet ze subjektivní charakteristiky koalice $\{U_i\}_{i \in K}$; srovn. (6.9).

Objektivní base hry v normálním tvaru (7.1) má z hlediska koalice K tvar (6.8), takže rozhodovací problém, před který je postavena koalice K v případě rozhodování o volbě své sdružené strategie, je representován trojící

$$(\Omega, \{U_i\}_{i \in K}, (B, D)) \tag{8.21}$$

(srovn. (7.14)), kde $\Omega = \Omega_E$ a kde jsou pravidla rozhodování (B, D) dána rovnostmi

$$B = A_{-K}, \quad D = D_\varrho$$

(srovn. (7.4)). Přitom jsme položili

$$D_\varrho = \{d_{a_K} : a_K \in A_K\} ,$$

kde

$$d_{a_K}(b) = \varrho(b, a_K) \quad \text{pro} \quad b = a_{-K} \in B = A_{-K} .$$

Vycházíme z toho, že v rozhodovacím problému, v němž je rozhodovatelem koalice, jsou pojmy *rozhodnutí* resp. elementárního rozhodnutí formálně definovány stejně jako v případě, kdy je rozhodovatelem hráč; prostor rozhodnutí i zde budeme značit symbolem D^* (resp. prostor elementárních rozhodnutí symbolem D_0). Prvek $d \in D^*$ nazýváme určitěji *rozhodnutí koalice* K. Dostupné rozhodnutí v D-problému (8.21) odpovídá pojmu smíšené strategie koalice K interpretované ve smyslu objektivní pravděpodobnosti, tj. realisovatelné náhodovým mechanismem: $d \in [D_\varrho]$, když a jen když existuje $s_K \in S_K$ takové, že (srovn. (6.21) resp. (6.82))

$$\forall(b \in B)\, d(b) = \varrho(b, s_K) .$$

Ryzí dostupné rozhodnutí odpovídá ryzí sdružené strategii koalice K.

Kritérium, podle něhož rozhoduje koalice K, charakterisuje *dohodu* mezi členy koalice o výběru rozhodnutí z těch, které jsou koalici dostupné. Ani pro koalici s racionálními členy nemůžeme žádat v nedegenerovaném případě, kdy není identita zájmů všech členů koalice (srovn. úvodní paragraf minulé kapitoly), aby se tento výběr rozhodnutí řídil podle kardinální preferenční stupnice v prostoru rozhodnutí D^*, neboť podle teorému o subjektivní pravděpodobnosti je k tomu nutnou a postačující podmínkou existence společné užitkové funkce celé koalice; pro koalici, v níž nejsou identické zájmy a není možnost kompensací, není možné najít kardinální systém preferencí na výsledcích, jenž by představoval rozumný kompromis mezi zájmy členů koalice. Na druhé straně očekáváme v koalici s racionálními členy, že jejich společné preference dohodnuté pro výběr rozhodnutí splňují alespoň minimální požadavek racionality, totiž požadavek ordinality těchto preferencí. Proto na dohodu o výběru rozhodnutí budeme klást požadavek, aby byla charakterisována preferenční stupnicí v prostoru rozhodnutí.

Dohoda o rozhodování koalice musí dále splňovat následující postulát o racionálním rozhodování koalice, který je důsledkem principu motivace jednání uplatněného pro každého člena koalice zvlášť. Všimněme si, že je tento postulát zobecněním postulátu o rozhodování isolovaného hráče, uvedeného v předcházející kapitole, na případ koalice a že je s posledně zmíněným postulátem identický pro případ jednočlenné koalice $K = \{i\}$, jak plyne z poznámky tam uvedené.

Postulát o rozhodování (koalice): Koalice $K \subset I$ se rozhodne zvolit ze dvou svých smíšených strategií s_K, s'_K spíše strategii s_K, když pro každou smíšenou strategii s_{-K} antikoalice platí vztah

$$(8.22) \qquad \varrho(s_K, s_{-K}) \succsim_i \varrho(s_K, s'_{-K}) \quad \text{pro každé} \quad i \in K\,,$$

tj. nerovnost $H_i(s_K, s_{-K}) \geqq H_i(s'_K, s_{-K})$ platí pro každého člena i koalice K, a když současně existuje aspoň jedna strategie $s^{(0)}_{-K}$ antikoalice, pro niž platí vztah

$$(8.23) \qquad \varrho(s_K, s^{(0)}_{-K}) \succ_i \varrho(s'_K, s^{(0)}_{-K}) \quad \text{pro každé} \quad i \in K\,,$$

tj. nerovnost $H_i(s_K, s^{(0)}_{-K}) > H_i(s_K, s^{(0)}_{-K})$ platí pro každého člena i koalice K.

Smysl podmínky (8.23) vyplývá z této úvahy: kdyby totiž pro jednoho člena i koalice K byla tato podmínka porušena, takže by platil podle (8.22) vztah $\varrho(s_K, s^{(0)}_{-K}) \sim$ $\sim_i \varrho(s'_K, s^{(0)}_{-K})$, neměl by hráč i důvod preferovat strategii s_K proti s'_K, kdyby také platilo $\varrho(s_K, s_{-K}) \sim_i \varrho(s'_K, s_{-K})$ pro všechna ostatní $s_{-K} \in S_{-K}$, což podmínka (8.22) nevylučuje; řekli jsme, že se racionální hráč důsledně řídí jenom svou preferenční stupnicí a žádných dalších faktorů při svém rozhodování a priori nepoužívá.

Podmínka (8.22) s požadavkem její platnosti pro každou smíšenou strategii antikoalice je ekvivalentní s podmínkou

$$\forall(a_{-K} \in A_{-K})\, \forall(i \in K)\, \varrho(s_K, a_{-K}) \succsim_i \varrho(s'_K, a_{-K})\,;$$

tedy stačí její platnost požadovat jen pro ryzí strategie antikoalice. Za předpokladu platnosti podmínky (8.22) lze vyslovit druhou část postulátu o rozhodování ve tvaru

$$\forall(i \in K)\, \exists(a^{(i)}_{-K} \in A_{-K})\, \varrho(s_K, a^{(i)}_{-K}) \succ_i \varrho(s_K, a^{(i)}_{-K})\,.$$

Obě poslední podmínky přepíšeme jako požadavky kladené na dvojici rozhodnutí d_1, d_2 přiřazenou dvojici strategií s_K, s'_K definicemi

$$d_1(b) = \varrho(b, s_K),\ d_2(b) = \varrho(b, s'_K);\ b \in B = A_{-K}\,.$$

Tím dostaneme podmínky:

(8.24) $$\forall(i \in K)\, \forall(b \in B) \quad d_1(b) \succsim_i d_2(b)\,,$$

(8.25) $$\forall(i \in K)\ \exists(b^{(i)} \in B)\, d_1(b^{(i)}) \succ_i d_2(b^{(i)})\,.$$

Ve smyslu předcházející diskuse je *dohoda o rozhodování* koalice K definována jako preferenční stupnice C v prostoru rozhodnutí D^*, která má tyto vlastnosti: (1) když $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$ jsou rozhodnutí, která současně splňují podmínku (8.24) a (8.25), pak jest $d_1 \succ_C d_2$; (2) když pro $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$ jest $d_1(b) \sim_i d_2(b)$ pro každé $b \in B$ a pro každé $i \in K$, pak $d_1 \sim_C d_2$. Stále mlčky předpokládáme, že žádný člen koalice K není indiferentní, neboť od indiferentů neočekáváme vstup do koalic.

Obecný pojem dohody se opírá o slabší princip motivace dohod (tj. koaličního jednání; srovn. II. princip na str. 112). Koalici, v níž je zvýšená ochota ke spolupráci, budeme říkat *tým*: to znamená, že se tým bude řídit silnějším principem motivace dohod (srovn. I. princip na str. 111).

Týmová dohoda o rozhodování koalice K je preferenční stupnice C v prostoru rozhodnutí D^*, která splňuje požadavky: (1) když $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$ jsou rozhodnutí, která splňují podmínku (8.24), přičemž

$$d_1(b^{(i)}) \succ_i d_2(b^{(i)}) \quad \text{pro některé} \quad i \in K\,,\ b^{(i)} \in B\,,$$

pak $d_1 \succ_C d_2$; (2) když pro d_1, $d_2 \in D^*$ jest $d_1(b) \sim_i d_2(b)$ pro každé $i \in I$, $b \in B$, pak $d_1 \sim_C d_2$. Tudíž v týmové dohodě se členové koalice K řídí silnějším principem dohod.

Vyšetříme nyní pojem dohody trochu blíže. Zaveďme si pro některá speciální rozhodnutí následující označení: pro $\omega \in \Omega_E$ budiž d_ω rozhodnutí definované vztahy

$$d_\omega(b) = \omega \quad \text{pro každé} \quad b \in B\,.$$

Je-li C dohoda o rozhodování, definujeme relaci $U^{(C)}$ v Ω_E požadavkem: $\omega U^{(C)} \omega'$, když a jen když $d_\omega C d_{\omega'}$. Zřejmě $U^{(C)}$ je preferenční stupnice v prostoru smíšených výsledků, kterou se alespoň za jistých okolností jednání koalice řídí. Rozšíříme-li tento požadavek na všechna jednání koalice, tedy na všechna její rozhodnutí, což lze u koalice s racionálními členy očekávat, dospějeme k tomuto závěru: když rozhodnutí d_1, d_2 splňují požadavky

(8.26) $$\forall(b \in B)\, d_1(b) \succsim_U d_2(b)\,,$$

(8.27) $$\exists(b \in B)\, d_1(b) \succ_U d_2(b)\,,$$

kde $U = U^{(C)}$, pak již bude $d_1 \succ_C d_2$.

Z definice dohody plyne, že preferenční stupnice $U = U^{(C)}$ má tyto vlastnosti: (1) když pro smíšené výsledky ω, ω' jest

$$\omega \succ_i \omega' \quad \text{pro každé} \quad i \in I \, ,$$

pak $\omega \succ_U \omega'$; (2) když pro smíšené výsledky ω, ω' platí že $\omega \sim_i \omega'$ pro každé $i \in K$, pak $\omega \sim_U \omega'$. Každou preferenční stupnici U, která splňuje požadavky (1) a (2), budeme nazývat *preferenční stupnicí koalice* K; třídu všech možných preferenčních stupnic koalice K budeme značit symbolem $\boldsymbol{U}_K$.

Dohoda C o rozhodování koalice K se nazývá *relativní* vzhledem k preferenční stupnici $U \in \boldsymbol{U}_K$, nebo krátce *U-relativní*, když pro každou dvojici rozhodnutí d_1, d_2 (a) splňující podmínky (8.26) a (8.27) jest $d_1 \succ_C d_2$; (b) splňující podmínku, že $d_1(b) \sim_U d_2(b)$ pro každé $b \in B$, jest $d_1 \sim_C d_2$. Relativní dohodu vzhledem k dané preferenční stupnici koalice stačí ovšem charakterisovat jako ordinální systém preferencí v D^* vyhovující požadavkům (a), (b).

Z definice týmové dohody vyplývá, že preferenční stupnice $U = U^{(C)}$ má vlastnost:

$$\forall(\omega \in \Omega_E)\, \forall(\omega' \in \Omega_E)\, \omega U_K \omega' \Rightarrow \tag{8.28}$$
$$\Rightarrow \left[(\omega' U_K \omega \Rightarrow \omega' \sim_U \omega)\, \&\, \exists(i \in K)\, \omega \succ_i \omega' \Rightarrow \omega \succ_U \omega'\right] ;$$

přitom U_K je koaliční systém preferencí, tj. částečné uspořádání dané v (6.10). Každou preferenční stupnici U splňující podmínku (8.28) budeme nazývat *týmovou preferenční stupnicí* koalice K; týmová preferenční stupnice koalice je již preferenční stupnicí dané koalice podle hořejší definice. Všimněme si, že podmínka (8.28) představuje jenom jinou formulaci silnějšího principu motivace dohod, kdežto podmínky (1) a (2) v definici pojmu preferenční stupnice koalice jsou přeformulací slabšího principu motivace dohod.

Relativní týmová dohoda C o rozhodování koalice K je podle definice preferenční stupnice v prostoru rozhodnutí D^*, k níž existuje týmová preferenční stupnice U koalice K taková, že platnost podmínky (8.26) implikuje platnost vztahu $d_1 \succsim_C d_2$ pro každou dvojici d_1, $d_2 \in D^*$; je-li ještě splněna podmínka (8.27), pak $d_1 \succ_C d_2$. Relativní týmové dohodě vzhledem k týmové preferenční stupnici U budeme říkat *U-relativní* týmová dohoda.

Tvrzení. *Když U je (týmová) preferenční stupnice koalice K, pak C je U-relativní (týmová) dohoda, když a jen když C je očekávání rozhodovatele v problému rozhodování za neurčitosti*

$$(\Omega_E, U, (A_{-K}, D_\varrho)) \, .$$

Jinými slovy, v relativní dohodě vystupuje koalice již jako rozhodující subjekt (rozhodovatel) a nikoli jenom jako skupina různých subjektů.

Teorém. *Nechť C je relativní týmová dohoda o rozhodování koalice K* (bez indiferentů; $K \neq \emptyset$), *která představuje v prostoru rozhodnutí kardinální systém pre-*

ferencí. Potom existuje soustava $\{u_i\}_{i\in K}$ *užitkových funkcí členů koalice* K *a právě jedna smíšená strategie* $s_{-K} \in S_{-K}$ *antikoalice taková, že číselná funkce*

$$u_C(d) = \sum_{b\in B} s_{-K}(b) \sum_{i\in K} u_i(d(b))$$

je užitková funkce pro systém preferencí C; přitom C je $\bar{U}_K$-relativní týmová dohoda, kde $\bar{U}_K$ je kompensační systém preferencí koalice K vzhledem k soustavě $\{u_i\}_{i\in K}$.

Poznamenejme, že kompensační systém preferencí $\bar{U}_K$ koalice K, k němuž užitkovou funkcí je koaliční užitková funkce $\bar{u}_K$ definovaná v (6.63), je speciálním případem týmové preferenční stupnice koalice K. Strategicky ekvivalentní hry s užitkovými funkcemi mají obecně různé koaliční užitkové funkce (tj. fiktivní užitek), ale jeden a tentýž kompensační systém preferencí dané koalice; srovn. (6.77). Každé třídě soustav $\{u_i\}_{i\in K}$ užitkových funkcí koalice K v dané hře s kardinálními preferencemi, strategicky ekvivalentních ve smyslu transformačních rovnic (6.77), odpovídá právě jeden kompensační systém preferencí koalice K v dané hře, a obráceně.

Obecně zavedeme pojem kompensační dohody následující definicí. Preferenční stupnice C v prostoru rozhodnutí D^* se nazývá *kompensační dohoda* o rozhodování koalice K, když lze najít soustavu $\{u_i\}_{i\in K}$ užitkových funkcí členů koalice K, pro niž jsou splněny požadavky: když $d_1 \in D^*$, $d_2 \in D^*$ jsou (1) rozhodnutí, která splňují podmínky

$$\forall(b \in B) \sum_{i\in K} u_i(d_1(b)) \geqq \sum_{i\in K} u_i(d_2(b)),$$

$$\exists(b \in B) \sum_{i\in K} u_i(d_1(b)) > \sum_{i\in K} u_i(d_2(b)),$$

pak $d_1 \succ_C d_2$; (2) rozhodnutí vyhovující rovnostem

$$\forall(b \in B) \sum_{i\in K} u_i(d_1(b)) = \sum_{i\in K} u_i(d_2(b)),$$

pak $d_1 \sim_C d_2$.

Každá kompensační dohoda je týmová, ale obecně nemusí být relativní. Relativní kompensační dohoda tvoří ovšem již kardinální systém preferencí v prostoru D^*, pro který platí věta o subjektivní pravděpodobnosti. Je zřejmé, že pro kompensační dohodu C je $U^{(C)} = \bar{\bar{U}}_K$.

Rozhodovací kritérium člena i koalice K je podle definice racionální očekávání rozhodovatele v problému rozhodování za neurčitosti

$$(\Omega_E, U_i, (A_{-K}, D_\varrho)).$$

Dohodu C o rozhodování koalice K nazveme *dohoda o společném očekávání* $s_{-K} \in S_{-K}$, když pro rozhodovací kritérium $C_{(i)}$ člena i koalice K, definované podmínkou

$$d_1 C^{(i)} d_2\,, \quad \text{když a jen když} \quad \sum_{b\in B} s_{-K}(b)\, d_1(b) \gtrsim_i \sum_{b\in B} s_{-K}(b)\, d_2(b)\,,$$

platí implikace

$$d_1 C^{(i)} d_2 \Rightarrow d_1 C d_2 ,$$

a to pro každé $i \in K$. Dohoda C je *racionální*, když platí pro některé $s_{-K} \in S_{-K}$ a $U \in \boldsymbol{U}_K$ podmínka: $d_1 C d_2$, když a jen když

$$\sum_{b \in B} s_{-K}(b)\, d_1(b) \gtrsim_U \sum_{b \in B} s_{-K}(b)\, d_2(b) .$$

Racionální dohoda je relativní dohoda o společném očekávání, ale obráceně relativní dohoda o společném očekávání nemusí být racionální. Jako důsledek shora uvedeného teorému máme:

Tvrzení. *Kompensační dohoda je racionální, když a jen když je relativní.*

Studujeme-li otázku, jak má jednat zformovaná koalice ve hře z hlediska svého isolovaného rozhodování, dává nám náš rozbor odpověď jenom podmíněnou: když všichni členové koalice K očekávají smíšenou strategii s_{-K} (neboli jejich pravděpodobnostní odhad jednání antikoalice je vyjádřen jejich subjektivní pravděpodobností s_{-K}), poradíme jim, aby se dohodli na společné preferenční stupnici U a jednali podle racionální dohody jednoznačně odpovídající dohodnuté preferenční stupnici U a společnému očekávání s_{-K}.

Odpověď, jaký návod k jednání máme dát ve hře zformované koalici, se tím rozpadne na dva kroky: (1) návod, jakým způsobem mají členové koalice provést vnitrokoaliční vyjednávání, při němž se dohodnou na společné preferenční stupnici; (2) návod, jakým způsobem mají členové koalice společně provést předpověď jednání členů antikoalice. Prvním krokem se budeme zabývat později v kapitole o vyjednávání a arbitráži. Druhý krok nás vede opět na problém predikce, jímž se chceme v této kapitole zabývat.

Nejprve však v dalším paragrafu vyšetříme speciální případ maximální koalice.

Týmová predikce a dohodové hry

Vyšetříme obecné pojmy zavedené v předcházejícím paragrafu pro případ maximální koalice $K = I$. Ježto antikoalice k maximální koalici je prázdná, informační množina $B = A_0$ v rozhodovacím problému (8.21) obsahuje podle (6.1) jako jedinou strategii prázdné zobrazení, tedy $|B| = 1$, a pojem dohody se obsahově kryje s pojmem preferenční stupnice maximální koalice: dohoda o rozhodování maximální koalice představuje dohodu o volbě preferenční stupnice $U \in \boldsymbol{U}_I$ v prostoru smíšených výsledků. Přitom týmová dohoda je representována týmovou preferenční stupnicí maximální koalice.

Každá dohoda o rozhodování maximální koalice je již racionální. Formálně můžeme rozeznávat mezi rozhodnutím maximální koalice a smíšeným výsledkem, i když fakticky oba pojmy představují totéž.

Všimněme si, že rozhodnutí maximální koalice d_ω (srovn. označení zavedené v minulém paragrafu) je dostupné v D-problému (8.21) právě tedy, když jest $\omega \in \Omega^{(0)}$ (srovn. (4.5)). Ještě jinak řečeno, $d_\omega \in [D]$, když a jen když $u_I(\omega) \in \tilde{X}$, tudíž když $u_I(\omega)$ leží v redukovaném prostoru výplatních vektorů (vzhledem k některé soustavě užitkových funkcí dané hry); srovn. (5.35) a (5.44). Je-li U libovolná preferenční stupnice v prostoru smíšených výsledků a je-li Ω' některá neprázdná množina smíšených výsledků, pak výsledek $\omega \in \Omega'$ se nazývá *největší* v množině Ω' vzhledem k U, když pro každé $\omega' \in \Omega'$ platí, že $\omega \gtrsim_U \omega'$. Platí:

Teorém 1. *Když C je dohoda o rozhodování maximální koalice, pak d je optimální dostupné rozhodnutí v (8.21) vzhledem k očekávání C maximální koalice jako rozhodovatele s preferenční stupnicí $U = U^{(C)}$ v rozhodovacím problému (8.30), když a jen když existuje (jednoznačně určený) smíšený výsledek ω, který je největší v množině $[\Omega^{(0)}]$ vzhledem k $U^{(C)}$ a pro který $d = d_\omega$.*

Dostupné rozhodnutí d_ω je optimální vzhledem k některé dohodě o rozhodování maximální koalice tehdy a jenom tehdy, když je smíšený výsledek ω hromadně racionální vzhledem ke koaliční výsledkové funkci v_α resp v_β. dané jako garanční resp. prevenční hodnota hry; jinými slovy, když je výplatní vektor $u_I(\omega)$ hromadně racionální vzhledem k $\boldsymbol{v}_\alpha$ resp. $\boldsymbol{v}_\beta$ dané jako α-hodnota resp. β-hodnota hry.

Dostupné rozhodnutí d_ω je optimální vzhledem k některé týmové dohodě o rozhodování maximální koalice tehdy a jenom tehdy, když je smíšený výsledek ω maximálně dosažitelný v koaličním tvaru dané hry pro garanci resp. pro prevenci; jinými slovy, *když výplatní vektor $u_I(\omega)$ leží v Paretově optimální množině P_I hry s abstraktní charakteristickou funkcí $\boldsymbol{v}_\alpha$ resp. $\boldsymbol{v}_\beta$.*

Resultát teoretického rozboru uvedený v teorému lze vyjádřit slovy, že optimalita rozhodnutí maximální koalice odpovídá hromadné racionalitě, přičemž ve speciálním případě, kdy maximální koalice postupuje při volbě svého jednání jako tým, pak množina výplatních vektorů odpovídajících všem možným optimálním rozhodnutím maximální koalice je totožná s Paretovou optimální množinou výplatních vektorů, které si maximální koalice může garantovat, které tudíž nejsou preventovatelné (srovn. str. 137).

Když C je dohoda o rozhodování maximální koalice, tedy $U^{(C)}$ je dohodnutá preferenční stupnice koalice I, pak ovšem nemusí existovat dostupné rozhodnutí optimální vzhledem k C ani za předpokladu, že dohoda je týmová: uvedená věta pouze konstatuje, jaké vlastnosti má optimální dostupné rozhodnutí, pokud existuje. Zvláštním případem týmové dohody je kompensační dohoda, která je pro maximální koalici kardinální, takže existuje vzhledem k ní optimální dostupné rozhodnutí d_ω, kde výsledek ω vyhovuje rovnici

$$\sum_{i \in I} u_i(\omega) = M ;$$

přitom číslo M je pro danou soustavu užitkových funkcí definováno vztahem (6.68). Hořejší teorém lze doplnit o tvrzení následující věty:

Teorém 2. *Je-li smíšený výsledek ω maximálně dosažitelný v koaličním tvaru dané hry pro garanci (resp. pro prevenci), pak existuje soustava užitkových funkcí*

$\{u_i\}_{i \in I}$ *dané hry taková, že* d_ω *je dostupné rozhodnutí pro maximální koalici, které je optimální vzhledem ke kompensační dohodě* C *s užitkovou funkcí* u_C *danou vztahem*

$$u_C(d_{\omega'}) = \sum_{i \in I} u_i(\omega'), \quad \omega' \in [\Omega^{(0)}].$$

Z posledního teorému vyplývá, že každý maximálně dosažitelný výsledek dané hry lze obdržet rozhodnutím maximální koalice, které je optimální vzhledem k některé kardinální týmové dohodě. Existují kardinální dohody maximální koalice, které nejsou týmové: např. dohoda C s užitkovou funkcí u_C definovanou vztahem

$$u_C(d_\omega) = \sum_{i \in K} u_i(\omega), \quad \omega \in [\Omega^{(0)}], \tag{8.31}$$

kde $K \neq I$ je libovolná neprázdná *subkoalice* maximální koalice. Odtud plyne, že teorém uvedený v předcházejícím paragrafu neplatí pro relativní dohody, které nejsou týmové.

Je-li $U^{(C)}$ preferenční stupnice maximální koalice pro dohodu C s užitkovou funkcí (8.31), lze ji charakterisovat slovy, že subkoalice K diktuje své preference celé koalici I; spec. když $K = \{i\}$, představuje hráč i diktátora vnucujícího svůj postoj k možným výsledkům celému kolektivu hráčů. Podmínka týmovosti preferenční stupnice vyjadřuje demokratický princip uplatněný v rámci dané koalice. Volně vyjádřeno, ochota ke spolupráci je nutnou podmínkou k uplatnění demokratického rozhodování.

Porovnáme optimalitu rozhodnutí maximální koalice s predikcí vnějšího pozorovatele v dohodové hře, tj. ve strategické hře s maximální koalicí jako jedinou přípustnou koalicí (srovn. str. 91). Platí:

Teorém 3. *Globální smíšená strategie* $s \in S$ *je v dohodové hře vnitřně stabilní (vzhledem k postulátu o predikci), když a jen když* $\varrho(s)$ *je hromadně racionální výsledek v koaličním tvaru dané hry pro garanci (resp. pro prevenci)*; jinými slovy, *když a jen když* $H_I(s)$ *je hromadně racionální výplatní vektor pro garanční (resp. prevenční) charakteristickou funkci dané hry*; srovn. (5.47), (6.40) a str. 109, str. 137.

Jako důsledek teorémů 1 a 2 dostaneme (srovn. též str. 126, str. 112 a (6.52)):

Teorém 4. *Existuje aspoň jeden výsledek maximálně dosažitelný pro koalici* I *při kompensacích, a tudíž existuje aspoň jeden výsledek maximálně dosažitelný v dané hře vzhledem ke koaliční výsledkové funkci* v_α *(resp.* v_β*) pro garanci (resp. pro prevenci); tudíž existuje aspoň jeden hromadně racionální výsledek* ω *v koaličním tvaru dané hry pro garanci (resp. pro prevenci) takový, že* $\omega = \varrho(s)$ *pro některé* $s \in S$.

Korolár. *V dohodové hře jest*: $S_{\text{stab}} \neq \emptyset$.

Označme symbolem D_{opt} množinu všech dostupných rozhodnutí maximální koalice, které jsou optimální vzhledem k některé z možných dohod o rozhodování:

$$D_{\text{opt}} = \{d_\omega : \omega \in [\Omega^{(0)}]; \exists(U \in \mathbf{U}_I)\,\forall(\omega' \in [\Omega^{(0)}])\,\omega U \omega'\}\,.$$

Potom lze symbolicky zapsat obsah teorému 3 ve tvaru

$$D_{\text{opt}} = \{d_{\varrho(s)} : s \in S_{\text{stab}}\}\,.$$

Tím je potvrzeno, že rozhodování maximální koalice s racionálními členy vede k týmž výsledkům jako predikce racionálního pozorovatele ve strategické hře, v níž se může realisovat jenom maximální koalice.

Budeme nyní studovat obecný problém predikce za předpokladu, že se všechny přípustné koalice chovají jako týmy v tom smyslu, že se řídí silnějším principem motivace koaličního jednání (jde tu o první princip motivace dohod o volbě strategií; srovn. str. 114).

Nechť K je přípustná koalice $K \in \Psi(\boldsymbol{K})$. Pravíme, že globální strategie $s \in S_{\text{adm}}$ (srovn. (8.10)) *týmově dominuje* globální strategii $s' \in S_{\text{adm}}$ *via koalice* K, ve znacích $s \operatorname{dom}_K s'$, kdy existuje přípustná koaliční struktura $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$ taková, že

$$\begin{gathered} K \in \mathscr{K}\,, \quad s \in S_{\mathscr{K}}\,, \quad s' \in S_{\mathscr{K}}\,, \quad s_{-K} = s'_{-K}\,, \\ H_i(s) \geqq H_i(s') \quad \text{pro každé} \quad i \in K\,, \\ H_{i_0}(s) > H_{i_0}(s') \quad \text{pro některé} \quad i_0 \in K\,. \end{gathered}$$

Jsou s a s' přípustné globální smíšené strategie, řekneme, že s *týmově dominuje* s', což zapisujeme jako $s \operatorname{dom} s'$, když existuje přípustná koalice K taková, že s týmově dominuje s' via koalice K:

$$s \operatorname{dom}_K s' \quad \text{pro některé} \quad K \in \Psi(\boldsymbol{K})\,.$$

Třídu S^*_{stab} globálních smíšených strategií definujeme vztahem:

$$S^*_{\text{stab}} = \{s^* : s^* \in S_{\text{adm}};\ \forall(s \in S_{\text{adm}})\ \text{non}\ [s \operatorname{dom} s^*]\}\,. \tag{8.32}$$

Každý prvek množiny S^*_{stab} budeme nazývat *týmová vnitřně stabilní* globální smíšená strategie.

Když přípustná strategie s dominuje přípustnou strategii s', pak již s týmově dominuje s':

$$s \operatorname{Dom} s' \Rightarrow s \operatorname{dom} s'\,.$$

Odtud plyne podle (8.11) množinová inkluse:

$$S^*_{\text{stab}} \subset S_{\text{stab}}\,. \tag{8.33}$$

Označme r^* relaci v množině $\mathscr{C}$ všech rozhodovacích kritérií pozorovatele, která je definována tím, že pro $s \in S$, $s' \in S$ klademe $C_s r^* C_{s'}$, když a jen když

$$\text{buď } s \text{ dom } s' \text{ pro } s \in S_{\text{adm}},\ s' \in S_{\text{adm}}, \quad \text{nebo } s \in S_{\text{adm}} \text{ a není } s' \in S_{\text{adm}}.$$

Snadno nahlédneme, že $r^* \in \mathscr{D}_{\mathsf{P}}$ (srovn. (8.3)), kde $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \,\&\, \mathsf{P}_2$; tudíž r^* je relace dominování, která je konformní s postulátem o predikci (tj. P-konformní pro $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \,\&\, \mathsf{P}_2$).

Tvrzení. *Globální smíšená strategie s je týmová vnitřně stabilní, když a jen když rozhodovací kritérium pozorovatele C_s je vnitřně stabilní vzhledem k relaci dominování r^*. Tudíž (srovn. (8.8)):*

$$S_{r^*} = S^*_{\text{stab}}\,.$$

Tím jsme prokázali, že týmová vnitřně stabilní globální smíšená strategie odpovídá subjektivnímu očekávání racionálního pozorovatele, který ví, že všechny přípustné koalice jednají jako týmy. Abychom tuto skutečnost objasnili ještě z jiné strany, označme $\mathsf{P}^*_1(r)$ výrok

$$\forall(\mathscr{K} \in \boldsymbol{K})\, \forall(K \in \mathscr{K})\, \forall(s \in S_{\mathscr{K}})\, \forall(s' \in S_{\mathscr{K}}) \,[(s_{-K} = s'_{-K}\, \& \tag{8.34}$$

$$\&\, [\varrho(s)\, U_K\, \varrho(s')] \,\&\, \exists(i \in K)\, [\varrho(s) \succ {}_i\varrho(s')]) \Rightarrow C_s \,\text{dom}_r\, C_{s'}]$$

(U_K je koaliční systém preferencí definovaný v (6.10)), který představuje postulát kladený na relaci dominování (tj. antireflexivní relaci) r v množině $\mathscr{C}$ všech rozhodovacích kritérií pozorovatele. Konjunkce požadavků (8.34) a (8.2), formálně $\mathsf{P}^*_1 \,\&\, \mathsf{P}_2$, representuje exaktní formulaci tzv. *postulátu o týmové predikci.*

Tvrzení. *Pro* $\mathsf{P} = \mathsf{P}^*_1 \,\&\, \mathsf{P}_2$ *je* r^* *minimální* P- *konformní relace dominování:*

$$r_{\mathsf{P}} = r^*\,; \quad \mathscr{C}_{\mathsf{P}} = \mathscr{C}_{r^*}\,, \quad S_{\mathsf{P}} = S^*_{\text{stab}}\,.$$

Tudíž týmová vnitřně stabilní globální smíšená strategie je konsistentní s postulátem o týmové predikci, a obráceně. Jinak řečeno, jde tu o vnitřní stabilitu vzhledem k postulátu o týmové predikci. Tento postulát zachycuje typ neurčitosti, z něhož vychází racionální pozorovatel ve svých předpovědích: že totiž v dané konfliktní situaci hráči projevují jako členové přípustných koalic ochotu ke spolupráci.

V nekooperativní hře se nemůže ochota hráčů ke spolupráci projevit, neboť netriviální koalice nemohou vzniknout: postulát o týmové predikci se v tomto případě redukuje na postulát o predikci. Formálně zapsáno:

$$S^*_{\text{stab}} = S_{\text{stab}}\,.$$

Avšak zvýšená ochota všech hráčů ke spolupráci se může projevit i v nekooperativní hře při vyjednávání o efektivním rovnovážném vektoru. Rovnovážný vektor smíšených strategií s^* (tj. $s^* \in S_{\text{stab}}$) nazveme *týmově efektivním*, když vyhovuje požadavku, že neexistuje žádný rovnovážný vektor $t^* \in S_{\text{stab}}$ takový, že

$$H_i(t^*) \geqq H_i(s^*) \quad \text{pro každé} \quad i \in I$$

a že t^* není ekvivalentní s vektorem s^*; srovn. (8.19). Označíme-li symbolem S^*_{efekt} množinu všech týmově efektivních rovnovážných vektorů smíšených strategií, platí

$$S^*_{\text{efekt}} \subset S_{\text{efekt}}\,; \tag{8.35}$$

srovn. (8.20). Slovy, každý *týmově efektivní rovnovážný vektor smíšených strategií je efektivní.*

V nekonečné množině rovnovážných vektorů smíšených strategií nekooperativní hry uvedené v příkladě 2 na str. 170 je právě jeden týmově efektivní rovnovážný vektor $s^* = s^{(1,1)}$.

Jako příklad nekooperativní hry, v níž vystupuje jasně rozdíl mezi ochotou a neochotou ke spolupráci, vezměme bimaticovou hru (5.53) s maticemi typu 2×2

$$Q^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q^{(2)} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Jediným týmově efektivním rovnovážným vektorem smíšených strategií je vektor ryzích strategií $s^* = ((1, 0), 1, 0))$. Položíme-li $t^* = ((0,1), (1,0))$, platí:

$$S_{\text{stab}} = S_{\text{efekt}} = \{\lambda s^* + (1 - \lambda)\, t^* : 0 \leqq \lambda \leqq 1\}\,.$$

Rovnovážných vektorů dané hry je nekonečně mnoho a každý z nich je efektivní. První hráč je v této hře při volbě své strategie zcela indiferentní, kdežto v zájmu druhého hráče je zvolit strategii $s_2 = (1, 0)$. Žádný způsob vyjednávání ze strany druhého hráče nemůže přimět prvního hráče, pokud není ochotný spolupracovat, aby zvolil strategii $s_1 = (1, 0)$. Naopak první hráč může druhého hráče úmyslně poškodit tím, že zvolí strategii $s_1' = (0, 1)$, aniž přitom sám utrpí nějakou ztrátu na svém užitku.

V dohodové hře se snaha hráčů o zvýšenou spolupráci v maximální koalici projeví obecně redukcí třídy všech vnitřně stabilních strategií:

Teorém 5. *Vnitřně stabilní globální smíšená strategie $s \in S$ v dohodové hře je týmová, když a jen když výsledek $\varrho(s)$ je maximálně dosažitelný v koaličním tvaru dané hry pro garanci (resp. pro prevenci)*; jinými slovy, *když a jen když výplatní vektor $H_I(s)$ leží v Paretově optimální množině P_I hry s abstraktní charakteristickou funkcí $\mathbf{v}_\alpha$ (resp. $\mathbf{v}_\beta$):*

$$S^*_{\text{stab}} = \{s : H_I(s) \in P_I\}\,.$$

Přitom z teorému 4 plyne, že v dohodové hře jest $S^*_{\text{stab}} \neq \emptyset$.

Označme symbolem D_{opt} množinu všech dostupných rozhodnutí maximální koalice, které jsou optimální vzhledem k některé z možných týmových dohod o rozhodování. Z teorému 1 a 5 plynou vztahy:

$$D_{\text{opt}} = \{d_\omega : u_I(\omega) \in P_I\} = \{d_{\varrho(s)} : s \in S^*_{\text{stab}}\} .$$

Poslední rovnosti lze charakterisovat slovy, že týmovým rozhodováním dospěje maximální koalice k týmž výsledkům jako racionální pozorovatel, který ve svých předpovědích vychází ze zvýšené ochoty všech hráčů k závazné kooperaci.

Teorém 6. *V dohodové hře existuje aspoň jedna týmová vnitřně stabilní globální strategie, která je individuálně racionální:*

$$S^*_{\text{stab}} \cap S_{\text{ind}} \neq \emptyset .$$

Tento teorém je důsledkem faktu, že v Paretově optimální množině libovolné hry s abstraktní charakteristickou funkcí lze najít alespoň jeden individuálně racionální výplatní vektor.

V dohodové hře je vnitřně stabilní strategie $s \in S_{\text{stab}}$ podle definice *efektivní,* když je individuálně racionální, a *týmově efektivní,* když je navíc týmová, tj. když $s \in S^*_{\text{stab}}$; zachováme-li symboliku stejnou jako v případě nekooperativních her, máme pro dohodovou hru definice (srovn. (8.13)):

$$(8.36) \qquad S_{\text{efekt}} = S_{\text{stab}} \cap S_{\text{ind}} ; \quad S^*_{\text{efekt}} = S^*_{\text{stab}} \cap S_{\text{ind}} .$$

Odlišnost definice efektivity v nekooperativní hře a v dohodové hře je jenom zdánlivá; obecně je pojem efektivity charakterisován dvěma vlastnostmi, a to individuální racionalitou a simultanní racionalitou všech účastníků hry. V nekooperativní hře je individuální racionalita zaručena předem, takže je nutno v definici efektivity postulovat pouze simultanní racionalitu. V dohodové hře je tomu právě naopak: vnitřní stabilitou máme zabezpečenu simultanní racionalitu a priori, proto stačí v definici klást jenom požadavek individuální racionality.

V dohodové hře stejně jako v nekooperativní hře platí vztah (8.35). Z teorému 6 plyne, že v dohodové hře efektivní a týmově efektivní globální strategie skutečně existují. Z tvrzení uvedeného na konci prvního paragrafu této kapitoly vyplývá, že v dohodové hře je strategie $s \in S_{\text{stab}}$ efektivní, když a jen když je vnitřně stabilní vzhledem k postulátům racionality P_1, P_2 a P_3, a je týmově efektivní, když a jen když je vnitřně stabilní vzhledem k postulátům racionality P^*_1, P_2, P^*_3; přitom P^*_3 je postulát, který vznikne z postulátu P_3, když v něm nahradíme relaci Dom relací dom (srovn. (8.34)).

Při vyjednávání mezi racionálními hráči, které se týká jejich dohody C o rozhodování v maximální koalici, charakterisované společnou preferenční stupnicí $U^{(C)}$, lze rozumně očekávat jen takovou dohodu, vzhledem k níž optimální dostupné rozhodnutí d_ω zajistí výsledek ω takový, že výplatní vektor $u_I(\omega)$ je individuálně racionální. Hráč i, pro něhož by užitek $u_i(\omega)$ byl menší než garanční výplata $v(i)$, se může totiž bránit hrozbou, že zvolí některou svou garanční strategii, čímž si svůj užitek zvýší, ať si počínají partneři jakkoli, alespoň na hodnotu $v(i)$. Tedy za jediné kandidáty na racionální dohodu o společném jednání kolektivu všech hráčů lze považovat v dohodové hře pouze ty vnitřně stabilní globální smíšené strategie, které jsou efektivní. Očekáváme-li týmové chování hráčů, pak těmito kandidáty jsou týmově efektivní vnitřně stabilní strategie.

Zdůrazněme zde, že tyto orientační úvahy o efektivitě mají smysl jen pro strategické hry *bez kompensací*. Ve hrách s kompensacemi jde o maximalisaci sumárního fiktivního užitku, čímž dostaneme celkovou sumu $M = v(I)$, kterou lze vždy rozdělit na podíly $y_i \geqq v(i)$, i když výplata $H_i(s)$ při použité vnitřně stabilní strategii s je pro některého hráče i nižší než garanční.

Příklad. Dilema vězně, které bylo popsáno jako strategická hra v abstraktním tvaru na str. 167, vyšetříme jako dohodovou hru. Snadno zjistíme, že

$$S_{\text{stab}} = S^*_{\text{stab}} = \\ = \{s : s \in S; \exists(0 \leqq \lambda \leqq 1)\, \varrho(s) = \lambda e_2 + (1 - \lambda)\, e_4 \quad \text{nebo} \\ \varrho(s) = \lambda e_2 + (1 - \lambda)\, e_3\}\,,$$

$$S_{\text{efekt}} = S^*_{\text{efekt}} = \\ = \{s : s \in S; \exists(\lambda)\, [(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq 1)\, \&\, (\varrho(s) = \lambda e_2 + (1 - \lambda)\, e_4) \quad \text{nebo} \\ (\lambda_2 \leqq \lambda \leqq 1)\, \&\, (\varrho(s) = \lambda e_2 + (1 - \lambda)\, e_3)]\}\,,$$

kde λ_1, λ_2 jsou ta jednoznačně určená čísla, pro něž platí relace indiference

$$e_1 \sim_1 \lambda_1 e_2 + (1 - \lambda_1)\, e_4\,, \quad e_1 \sim_2 \lambda_2 e_2 + (1 - \lambda_2)\, e_3\,.$$

Abychom si mohli učinit názornou představu, zavedeme užitkové funkce definicemi výplatních vektorů

$$u_I(e_1) = (-5, -5)\,, \quad u_I(e_3) = (0, -10)\,, \\ u_I(e_4) = (-10, 0)\,, \quad u_I(e_2) = (-1, -1)\,, \tag{8.37}$$

kde číselné hodnoty odpovídají typu rozsudků podle let, které mají vězňové „odsedět". Připojený obrázek zachycuje situaci ve vyšetřované dohodové hře: obě tučně vytažené úsečky representují množinu těch výplatních vektorů, které dostaneme volbou některé efektivní globální smíšené strategie; doplníme-li obě úsečky o polotučně vytažené části, je jimi representována Paretova optimální množina dané hry, která jednoznačně určuje množinu S^*_{stab} podle teorému 5; vyšrafovaný trojúhelník představuje redukovaný prostor výplatních vektorů $\tilde{X}$ dané hry.

Pro preferenční stupnice U_1, U_2, které jsou ve shodě s dilematem vězně popsaným na str. 89, dostaneme snadným výpočtem hodnoty

$$\lambda_1 = \frac{5}{9}\,, \quad \lambda_2 = \frac{5}{9}\,.$$

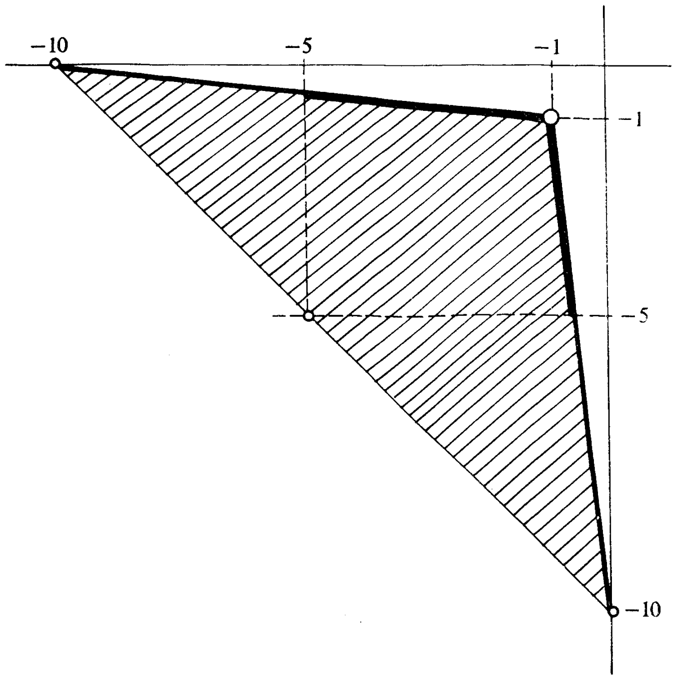
Přitom garanční výplaty, odpovídající užitkovým funkcím (8.37), jsou vyjádřeny hodnotami

$$v(1) = -5\,, \quad v(2) = -5\,,$$

jichž se dosáhne použitím garančních strategií a_1, a_2.

Při vyjednávání mezi oběma hráči o volbě efektivní globální strategie bychom intuitivně očekávali, že se vzájemně dohodnou na vektoru ryzích strategií (a'_1, a'_2), vedoucímu k výplatnímu vektoru $(-1, -1)$. Jinými slovy, očekáváme, že dojde k závazné dohodě o tom, že se žádný z nich nepřizná.

Tento závěr je v našem případě oprávněný, neboť lze předpokládat, že oba vězňové oceňují ztrátu vyplývající z nutnosti strávit určitý počet let ve vězení stejně vysoko; jinak řečeno, jejich zde záporný užitek je mezi oběma hráči navzájem srovnatelný. Na základě srovnatelnosti užitků lze pro každou efektivní strategii s zjistit rozdíl užitků $H_1(s) - H_2(s)$ a považovat za nejpřijatelnější tu efektivní strategii $s^{(0)}$, pro niž je absolutní hodnota tohoto rozdílu minimální. Pro libovolnou dohodovou hru o dvou hráčích lze dokázat, že toto minimum existuje a že každá efektivní



strategie $s^{(0)}$ příslušná k tomuto minimu vede k jednomu a témuž výplatnímu vektoru. V našem případě dilematu vězně lze najít jedinou strategii $s^{(0)} = (a_1', a_2')$, pro niž

$$0 = |H_1(s^{(0)}) - H_2(s^{(0)})| = \min\{|H_1(s) - H_2(s)| : s \in S^*_{\text{efekt}}\}.$$

Relativní predikce a typy rovnováhy

Představme si, že při realisaci dané hry vznikne koalice K. Problém, před nímž tato realisovaná koalice stojí, je nalézt „rozumnou" dohodu o společném rozhodování. Má-li být taková dohoda o rozhodování koalice K racionální, musí se členové koalice K nejprve dohodnout na některém společném očekávání $s_{-K} \in S_{-K}$, tedy musí společně odhadnout očekávané jednání antikoalice. Je-li s_{-K} společný odhad očekávaného jednání antikoalice, který koalice K provedla, zbývá této koalici smluvit se na společné preferenční stupnici; označme ji $U^K(s_{-K})$, tedy $U^K(s_{-K}) \in \boldsymbol{U}_K$.

Koalice K může však postupovat také tak, že místo toho, aby provedla společný odhad očekávaného jednání antikoalice, dohodne se pro každé možné jednání antikoalice $s_{-K} \in S_{-K}$ na společné preferenční stupnici $U^K(s_{-K})$.

Pro danou smíšenou strategii antikoalice $s_{-K} \in S_{-K}$ vznikne z hlediska koalice K nová hra

$$(K, \Omega_E, \{U_i\}_{i \in K}, (\{A_i\}_{i \in K}, \varrho')) ,$$

kde klademe

$$\varrho'(a_K) = \varrho(a_K, s_{-K}) \quad \text{pro} \quad a_K \in A_K .$$

Odvozená hra je dohodová s množinou hráčů K a k jejímu vyšetřování lze použít metod předcházejícího paragrafu. Přitom se při hledání „rozumné" preferenční stupnice $U^K(s_{-K}) \in \boldsymbol{U}_K$ můžeme opřít o pravidla vyjednávání v dohodové hře, jimiž se budeme zabývat v kapitole o vyjednávání a arbitráži. Jde-li o hru s kompensacemi, je ovšem zřejmé, že smluvená preferenční stupnice musí být kompensačním systémem preferencí vzhledem k té soustavě užitkových funkcí $\{u_i\}_{i \in K}$ koalice K, v níž jsou užitky hráčů srovnatelné; tedy $U^K(s_{-K}) = \bar{U}_K$ (srovn. str. 124).

Jsou-li racionálnímu pozorovateli např. známa pravidla vyjednávání, jichž použije každá možná přípustná koalice v dané hře k nalezení společné preferenční stupnice, pak lze předpokládat, že racionální pozorovatel předem zná preferenční stupnice

$$U^K(s_{-K}) \quad \text{pro všechna} \quad K \in \Psi(\boldsymbol{K}) , \quad K \neq \emptyset ; \quad s_{-K} \in S_{-K} . \tag{8.38}$$

Tímto předpokladem o znalosti pozorovatele se změní typ neurčitosti pro racionální předpovědi jednání účastníků v dané konfliktní situaci. Mluvíme o *relativní predikci* vzhledem k dané soustavě preferenčních stupnic (8.38).

Označme danou soustavu preferenčních stupnic (8.38), kde $U^K(s_{-K}) \in \boldsymbol{U}_K$ pro $K \in \Psi(\boldsymbol{K})$, symbolem $\mathcal{U}$. Řekneme, že globální strategie $s \in S_{\text{adm}}$ *$\mathcal{U}$-dominuje* globální strategii $s' \in S_{\text{adm}}$ *via koalice* K, ve znacích $s \operatorname{dom}_{\mathcal{U},K} s'$, když existuje přípustná koaliční struktura $\mathcal{K} \in \boldsymbol{K}$ taková, že

$$K \in \mathcal{K} , \quad s \in S_{\mathcal{K}} , \quad s' \in S_{\mathcal{K}} , \quad s_{-K} = s_{-K} , \quad \varrho(s) \succ_{\mathcal{U}} \varrho(s') ;$$

přitom poslední symbol znamená, že

$$\varrho(s) \succ_U \varrho(s') , \quad \text{kde} \quad U = U^K(s_{-K}) .$$

Pravíme, že s *$\mathcal{U}$-dominuje* s', a píšeme $s \operatorname{dom}_{\mathcal{U}} s'$, kdy platí, že

$$s \operatorname{dom}_{\mathcal{U},K} s' \quad \text{pro některé} \quad K \in \Psi(\boldsymbol{K}) .$$

Strategii $s^* \in S_{\text{adm}}$ nazveme *$\mathcal{U}$-relativní vnitřně stabilní* globální smíšenou strategií, když leží v množině

$$S^{\mathcal{U}}_{\text{stab}} = \{s^* : s^* \in S_{\text{adm}}; \forall(s \in S_{\text{adm}}) \text{ non } [s \operatorname{dom}_{\mathcal{U}} s']\} . \tag{8.39}$$

Ze skutečnosti, že $U^K(s_{-K}) \in \boldsymbol{U}_K$, plyne implikace: $s \operatorname{Dom} s' \Rightarrow s \operatorname{dom}_{\mathscr{U}} s'$, takže

$$S^{\mathscr{U}}_{\text{stab}} \subset S_{\text{stab}} .$$

Slovy, $\mathscr{U}$-relativní vnitřně stabilní strategie představují zvláštní případ vnitřně stabilních strategií, což je ve shodě s tím, že racionální pozorovatel má více znalostí o konfliktu, zná-li soustavu $\mathscr{U}$. Označíme-li $\mathsf{P}_1^{\mathscr{U}}(r)$ výrok

$$(8.40) \quad \forall(\mathscr{K} \in \boldsymbol{K})\,\forall(K \in \mathscr{K})\,\forall(s \in S_{\mathscr{K}})\,\forall(s' \in S_{\mathscr{K}})\left[(s_{-K} = s'_{-K} \,\&\, \varrho(s) \succ_{\mathscr{U}} \varrho(s')) \Rightarrow \Rightarrow C_s \operatorname{dom}_r C_{s'}\right],$$

jímž je vyjádřen požadavek kladený na relaci dominování r v množině $\mathscr{C}$ všech rozhodovacích kritérií pozorovatele, pak konjunkce postulátů (8.40) a (8.2), tj. $\mathsf{P}_1^{\mathscr{U}} \,\&\, \mathsf{P}_2$, představuje exaktní formulaci *postulátu o relativní predikci.*

Tvrzení. *Pro* $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1^{\mathscr{U}} \,\&\, \mathsf{P}_2$ *platí:*

$$S_{\mathsf{P}} = S^{\mathscr{U}}_{\text{stab}} .$$

Tudíž $\mathscr{U}$-relativní vnitřně stabilní globální strategie je konsistentní s postulátem o relativní predikci, a obráceně; uvedeným tvrzením je tedy prokázáno, že taková globální strategie odpovídá subjektivnímu očekávání racionálního pozorovatele, který zná soustavu (8.38), čili ví, podle kterých svých preferenčních stupnic jednají přípustné koalice. Jde tedy skutečně o *vnitřní stabilitu vzhledem k postulátu o relativní predikci.*

Je-li pro každou přípustnou koalici K a pro každou strategii antikoalice s_{-K} systém preferencí $U^K(s_{-K})$ týmová preferenční stupnice koalice K, pak platí množinová inkluse:

$$(8.41) \qquad S^{\mathscr{U}}_{\text{stab}} \subset S^*_{\text{stab}} ;$$

slovy, každá $\mathscr{U}$-relativní vnitřně stabilní globální strategie je za daných předpokladů týmová (srovn. (8.32)).

Jak jsme již upozornili, ve strategické hře s kompensacemi jsou známy preferenční stupnice všech přípustných koalic, je-li dána soustava užitkových funkcí $\{u_i\}_{i \in K}$. Strategickou hru s kompensacemi ovšem studujeme jako hru s užitkovými funkcemi, takže o racionálním pozorovateli předpokládáme, že zná užitkové funkce všech hráčů; z hlediska interpretace je samozřejmě nutné, aby byla splněna hypotéza o srovnatelnosti užitku mezi hráči. Vyšetřování relativní predikce má význam především pro hry s kompensacemi, neboť v těchto hrách není o společných preferencích vytvořených koalic žádných pochyb (srovn. princip motivace kompensačních dohod).

Učiňme v dalších úvahách předpoklad, že ve strategické hře (7.1) je pevně dána soustava užitkových funkcí $\{u_i\}_{i \in I}$. Definujme soustavu preferenčních stupnic $\mathscr{U}$, tj. soustavu (8.38), vztahy

$$(8.42) \qquad U^K(s_{-K}) = \overline{U}_K \quad \text{pro každé} \quad K \in \Psi(\boldsymbol{K}), \quad K \neq \emptyset, \quad s_{-K} \in S_{-K},$$

a položme definitoricky

$$S_{\text{cstab}} = S^{\mathscr{U}}_{\text{stab}} .$$

Každou strategii $s^* \in S_{\text{cstab}}$ budeme nazývat *kompensačně stabilní* globální smíšená strategie. Máme podle (8.41) a (8.33):

$$(8.43) \qquad S_{\text{cstab}} \subset S^*_{\text{stab}} \subset S_{\text{stab}} .$$

Tudíž každá kompensačně stabilní globální strategie je týmová vnitřně stabilní strategie.

Zavedený teoretický aparát nyní použijeme na vyšetřování strategických *her s pevnou koaliční strukturou*, tj. her, v nichž $\boldsymbol{K} = \{\mathscr{K}\}$ (srovn. str. 91).

Teorém 1. *Ve hře s pevnou koaliční strukturou existuje alespoň jedna kompensačně stabilní globální smíšená strategie*:

$$S_{\text{cstab}} \neq \emptyset .$$

Korolár. *Ve hře s pevnou koaliční strukturou existuje alespoň jedna (týmová) vnitřně stabilní globální smíšená strategie*:

$$S_{\text{stab}} \neq \emptyset \ (S^*_{\text{stab}} \neq \emptyset) .$$

Korolár je důsledkem vztahů (8.43). Vyslovený teorém plyne z Nashovy věty o existenci rovnovážných vektorů smíšených strategií, kterou jsme uvedli v této kapitole. Nekooperativní hra a dohodová hra představují dva krajní typy hry s pevnou koaliční strukturou, takže korolár zahrnuje teorémy o existenci vnitřně stabilních strategií ve zmíněných typech her, jež jsme vyslovili v dřívějších paragrafech, jako speciální případy.

Všimněme si, že pro $K \in \mathscr{K}$, $s_K \in S_K$, $s'_K \in S_K$, $s_{-K} \in S_{-K}$ a pro soustavu $\mathscr{U}$ definovanou v (8.42) je vztah

$$\varrho(s_K, s_{-K}) \succ_{\mathscr{U}} \varrho(s'_K, s_{-K})$$

ekvivalentní s nerovností

$$\sum_{i \in K} H_i(s_K, s_{-K}) > \sum_{i \in K} H_i(s'_K, s_{-K}) .$$

Odtud plyne, že $\mathscr{K}$-vektor smíšených strategií $s^* \in S_{\mathscr{K}}$ (srovn. (6.81)) je kompensačně stabilní globální strategií ve hře s pevnou koaliční strukturou $\mathscr{K}$, když a jen když s^* je rovnovážný vektor smíšených strategií v nekooperativní hře

$$(K, \Omega_E, \{\overline{U}_K\}_{K \in \mathscr{K}}, (\{A_K\}_{K \in \mathscr{K}}, \varrho)) ,$$

v níž přípustné koalice vystupují jako hráči. Proto každý kompensačně stabilní $\mathscr{K}$-vektor $s^* \in S_{\mathscr{K}}$ ve hře s pevnou koaliční strukturou $\mathscr{K}$ nazýváme *kompensačně $\mathscr{K}$-rovnovážným*.

Užili jsme mimo jiné toho, že ve hře s pevnou koaliční strukturou $\mathscr{K}$ jsou jedinými přípustnými globálními smíšenými strategiemi $\mathscr{K}$-vektory; tj. $S_{\mathrm{adm}} = S_{\mathscr{K}}$. Je-li $\mathscr{K}$ kterákoli koaliční struktura v normalisované strategické hře bez vyznačené kooperace, nazveme $\mathscr{K}$-vektor smíšených strategií s^* *$\mathscr{K}$-rovnovážným*, když s^* je vnitřně stabilní ve hře s pevnou koaliční strukturou $\mathscr{K}$; nazveme jej *týmově $\mathscr{K}$-rovnovážným*, když s^* je týmový vnitřně stabilní při vyznačené kooperaci $\boldsymbol{K} = \{\mathscr{K}\}$.

$\mathscr{K}$-vektor $s^* \in S_{\mathscr{K}}$ je týmově $\mathscr{K}$-rovnovážný tehdy a jenom tehdy, když pro každou koalici $K \in \mathscr{K}$ a pro každou její strategii $s_K \in S_K$ platí, že buď

$$H_i(s^*) = H_i(s_K, s^*_{-K}) \quad \text{pro každé} \quad i \in K\,,$$

nebo

$$H_i(s^*) > H_i(s_K, s^*_{-K})$$

alespoň pro jednoho člena i koalice K.

Slovy, buď žádný z členů koalice K nemá zájem na změně koaliční strategie s^*_K ve strategii s_K, ježto se jejich výplaty nezmění, nebo alespoň jeden člen je proti této změně, neboť by tím utrpěl ztrátu na svém užitku; to vše za předpokladu, že se ostatní koalice přidrží svých strategií s^*_L, $L \in \mathscr{K}$, $L \neq K$.

Smysl $\mathscr{K}$-rovnováhy bez předpokladu týmovosti jsme již popsali v prvním paragrafu této kapitoly (srovn. str. 164). Vlastnost týmové rovnováhy je důraznější, takže týmově rovnovážných $\mathscr{K}$-vektorů je obecně méně než rovnovážných. Z hořejšího koroláru k teorému 1 dostáváme:

Teorém 2. *Existuje alespoň jeden (týmově) $\mathscr{K}$-rovnovážný $\mathscr{K}$-vektor smíšených strategií.*

Je tomu tak proto, že existuje alespoň jeden kompensačně $\mathscr{K}$-rovnovážný $\mathscr{K}$-vektor smíšených strategií.

Pro $\mathscr{K}$-rovnovážné $\mathscr{K}$-vektory lze zavést pojmy ekvivalence a záměnnosti obdobným způsobem, jako jsme to učinili v případě rovnovážných vektorů. Speciálně lze konstatovat, že jsou-li v dané hře s pevnou koaliční strukturou $\mathscr{K}$ všechny $\mathscr{K}$-rovnovážné globální strategie záměnné a ekvivalentní, lze její výsledek jednoznačně předpovědět.

Poznamenejme, že obdobně bychom mohli definovat pojem $\mathscr{U}$-relativního $\mathscr{K}$-rovnovážného $\mathscr{K}$-vektoru, kde $\mathscr{U}$ je libovolná soustava preferenčních stupnic (8.38). Otázky existence $\mathscr{U}$-relativních $\mathscr{K}$-rovnovážných vektorů, kde $\mathscr{U}$ by odpovídalo určitým pravidlům vyjednávání, nebyly dosud studovány.

Vraťme se k případu, kdy soustava $\mathscr{U}$ je dána kompensačně, tj. definicemi (8.42), a hledejme množinu všech $\mathscr{K}$-rovnovážných globálních strategií v dohodové hře, tj. ve hře s pevnou koaliční strukturou $\boldsymbol{K} = \{\mathscr{K}_I\}$, $\mathscr{K}_I = \{I\}$. Jako doplněk k teorému 1 obdržíme:

Teorém 3. *V dohodové hře je globální smíšená strategie $s^* \in S$ kompensačně stabilní* (tj. kompensačně $\mathscr{K}_I$-rovnovážná), *když a jen když*

$$\sum_{i \in I} H_i(s^*) = M = v(I)\,;$$

srovn. (6.65), (6.68) a (6.70).

V příkladu uvedeném v předcházejícím paragrafu, v němž jsme vyšetřovali dilema vězně jako dohodovou hru, množina S_{cstab} obsahuje jedinou kompensačně stabilní globální strategii, a to vektor ryzích strategií (a'_1, a'_2), pro který platí rovnosti:

$$H_1(a'_1, a'_2) + H_2(a'_1, a'_2) = -2 = M .$$

Jako další příklad vezměme modifikované dilema vězně jako dohodovou hru s týmiž užitky obou hráčů jako v předešlém příkladě s výjimkou výsledku e_2, pro který definujeme $u_I(e_2) = (-5, -5)$. Takto modifikovanou hru můžeme interpretovat tak, že ať se oba obvinění přiznají, nebo ať se oba nepřiznají, vždy si „odsedí" 5 let. Vyšetřujeme-li tuto novou hru jako dohodovou hru bez kompensací, zjistíme, že v tomto případě efektivními globálními strategiemi jsou ty strategie $s \in S$, pro něž $H_I(s) = (-5, -5)$; tyto strategie jsou rovněž týmově efektivní a každá z nich je směsí vektorů ryzích strategií (a_1, a_2) a (a'_1, a'_2).

V této hře je každá globální smíšená strategie $s \in S$ vnitřně stabilní a přitom týmová. Navíc platí, že také

$$S_{\text{cstab}} = S\,(= S_{\text{stab}} = S^*_{\text{stab}}) ;$$

tudíž každá strategie $s \in S$ je rovněž kompensačně stabilní. Vyšetřujeme-li tedy modifikované dilema vězně jako dohodovou hru s kompensacemi, jeví se nám každá globální strategie stejně dobrá. Tato skutečnost není překvapující, uvědomíme-li si interpetační zásady platné pro hru s kompensacemi: užitek hráčů lze kompensovat penězi, přičemž je tento užitek srovnatelný. Např. když oba hráči oceňují 1 rok vězení jako ztrátu rovnou 100 000 Kčs, mohou se závazně dohodnout na tom, že první hráč se přizná a druhý nikoli, ale zaplatí prvnímu hráči 500 000 Kčs odškodného, které mu kompensuje 5 let vězení, o něž musí déle „sedět"; sumární ztráta z každého typu rozsudku je totiž stejná pro každé $s \in S$, tj.

$$H_1(s) + H_2(s) = -10 ,$$

a každý z hráčů ji oceňuje částkou 1 milion Kčs.

Jako poslední příklad vyšetříme hru, v níž první hráč má jedinou ryzí strategii a_1, kdežto druhý hráč má dvě alternativy: a_2, a'_2. Přitom výplatní funkce jsou dány hodnotami výplatních vektorů

$$H_I(a_1, a_2) = (3,3) , \quad H_I(a_1, a'_2) = (1,4) .$$

Studujeme-li tuto hru jako hru dohodovou, zjistíme, že každá globální smíšená strategie $s \in S$ je vnitřně stabilní a týmová: $S^*_{\text{stab}} = S_{\text{stab}} = S$. Jedinou efektivní globální strategií je vektor (a_1, a'_2) s výplatami (1,4), který představuje „řešení" dané hry jako hry bez kompensací. Na druhé straně jedinou kompensačně stabilní globální strategií je vektor (a_1, a_2), k němuž příslušná sumární výplata je rovna $3 + 3 = 6$. Ve hře s kompensacemi je pro druhého hráče výhodné spojit se s prvním hráčem s cílem maximalisovat sumární užitek, neboť první hráč se ochotně zaváže zajistit druhému podíl ≥ 4. Je tedy „řešením" dané hry při kompensacích vektor (a_1, a_2), který je za daných okolností „rozumnější" než vektor (a_1, a'_2).

Základním problémem v teorii predikce, jak jsme zdůraznili v úvodní části předcházející kapitoly, je otázka existence vnitřně stabilních globálních strategií. Pojem rovnováhy, jak jsme jej zavedli v tomto paragrafu, nám poslouží jako nástroj k vyšetření tohoto základního problému, přičemž se opřeme o větu:

Teorém 4. *Nutnou podmínkou k tomu, aby globální smíšená strategie $s^* \in S$ byla (týmová) vnitřně stabilní, je, aby pro každou přípustnou koaliční strukturu $\mathcal{K} \in \boldsymbol{K}$, pro niž $s^* \in S_{\mathcal{K}}$, byl $\mathcal{K}$-vektor s^* (týmově) $\mathcal{K}$-rovnovážný.*

Uvedeme si nyní některé postačující podmínky k existenci vnitřně stabilních globálních strategií.

Teorém 5. *Nechť v je von Neumannova charakteristická funkce hry v normálním tvaru s libovolně vyznačenou kooperací $\boldsymbol{K}$, definovaná s pomocí některé soustavy užitkových funkcí dané hry. Když je hra (I, v) neesenciální, pak každý vektor smíšených strategií s^*, jehož komponenty jsou garanční strategie, tj. s_i^* je garanční strategie hráče i pro $i \in I$, je vnitřně stabilní i kompensačně stabilní (a tedy týmový), přičemž platí rovnost:*

$$H_I(s) = \{v(i)\}_{i \in I} .$$

Obráceně, *uvedenou rovnost splňuje každá vnitřně stabilní globální strategie s^* dané hry.*

Speciálním případem neesenciální hry je hra antagonistická. Z vysloveného teorému plyne, že jakékoliv kooperativní nebo nekooperativní „řešení" antagonistické hry vede k výplatnímu vektoru $(v(1), v(2))$, i když soustava užitkových funkcí (u_1, u_2) nemá nulový resp. konstantní součet; poslední připomínka platí jen pro hry bez kompensací, ve hrách s kompensacemi je volba soustavy (u_1, u_2) podstatná. Ovšem v kooperativním „řešení" roli vnitřně stabilní globální strategie hraje i libovolná směs vektorů garančních strategií.

Pro další vyšetřování problému existence vnitřně stabilních strategií si zavedeme některé pomocné pojmy. Koaliční struktura $\mathcal{K}'$ se nazývá *zjemněním* koaliční struktury $\mathcal{K}$, když ke každé koalici $K' \in \mathcal{K}'$ lze nalézt koalici $K \in \mathcal{K}$ tak, že $K' \subset K$, tedy že K' je subkoalicí koalice K, pokud s ní není totožná. Připomeňme, že se smíšeným strategiím netriviálních koalic v literatuře také říká korelované strategie. Je-li $\mathcal{K}$ koaliční struktura, pak se $\mathcal{K}$-vektor smíšených strategií $s \in S_{\mathcal{K}}$ nazývá *silně korelovaný*, když neexistuje koaliční struktura $\mathcal{K}'$, která by byla zjemněním koaliční struktury $\mathcal{K}$ a různá od $\mathcal{K}$, přičemž by bylo $s \in S_{\mathcal{K}'}$; tedy silně korelovaný $\mathcal{K}$-vektor není podle definice $\mathcal{K}'$-vektorem pro žádné zjemnění $\mathcal{K}'$ koaliční struktury $\mathcal{K}$.

Je-li $\boldsymbol{K}$ vyznačená kooperace dané hry, pak $\mathcal{K} \in \boldsymbol{K}$ nazveme *maximální koaliční strukturou* dané hry (vzhledem ke $\boldsymbol{K}$), když $\mathcal{K}$ není zjemněním žádné koaliční struktury $\mathcal{K}' \in \boldsymbol{K}$, $\mathcal{K}' \neq \mathcal{K}$. V kooperativní hře (srovn. str. 91) je jedinou maximální koaliční strukturou systém $\mathcal{K}_I$, ale obecně může existovat více než jedna maximální koaliční struktura.

Teorém 6. *Když pro některou maximální koaliční strukturu $\mathcal{K}$ dané hry* s vy*značenou kooperací je s^* (týmově) $\mathcal{K}$-rovnovážný $\mathcal{K}$-vektor smíšených strategií, který je silně korelovaný, pak s^* je (týmová) vnitřně stabilní globální smíšená strategie.*

Globální smíšená strategie s se nazývá *silně korelovaná*, když pro žádnou koaliční strukturu $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}_I$ není s $\mathcal{K}$-vektor smíšených strategií. Z teorému 6 plyne

Korolár. *Když v kooperativní hře je s^* silně korelovaná globální smíšená strategie, pro niž výsledek $\varrho(s^*)$ je hromadně racionální vzhledem ke koaliční výsledkové funkci v_α (resp. v_β), pak s^* je vnitřně stabilní. Je-li navíc výsledek $\varrho(s^*)$ maximálně dosažitelný, tj. leží-li výplatní vektor $H_I(s^*)$ v Paretově optimální množině hry s abstraktní charakteristickou funkcí $\boldsymbol{v}_\alpha$ (resp. $\boldsymbol{v}_\beta$), pak s^* je týmová vnitřně stabilní globální strategie.*

Z teorému 4 plyne obráceně, že každá vnitřně stabilní globální strategie s^* v kooperativní hře má vlastnost, že výsledek $\varrho(s^*)$ je hromadně racionální, a je-li s^* navíc týmová, pak $H_I(s^*)$ leží v Paretově optimální množině maximální koalice.

Tím máme dán návod, jak v kooperativní hře najít vnitřně stabilní globální smíšené strategie, pokud existují. Najdeme nejprve všechny globální smíšené strategie, které vedou k hromadně racionálním výsledkům; takové strategie existují, neboť k nim příslušná rozhodnutí maximální koalice musí být optimální, takže jejich existence je důsledkem teorému o dohodových hrách uvedených v předešlém paragrafu. Je-li mezi těmito strategiemi silně korelovaná, je vnitřně stabilní. Lze říci, že ve strategických hrách, které nejsou v jistém smyslu degenerovány, vždy existují silně korelované globální strategie vedoucí k hromadně racionálním výsledkům, které jsou dokonce maximálně dosažitelné.

Jako příklad degenerované strategické hry může sloužit dilema vězně, jež jsme vyšetřovali jako dohodovou hru v minulém paragrafu. Dilema vězně jako kooperativní hra nemá žádné vnitřně stabilní globální strategie: např. strategie (a'_1, a'_2) je dominována ze stanoviska koalice $\{1\}$, tj. prvního hráče, strategií (a_1, a'_2). Zhruba lze říci, že podmínky vnitřní stability v kooperativní hře zaručují, že se žádný hráč ani žádná subkoalice nesnaží hrát na svůj vrub za zády ostatních ústupem od dohody, representované některou smluvenou vnitřně stabilní globální strategií, neboť si tím nemohou polepšit. Dohody odpovídající vnitřní stabilitě v kooperativní hře nemají vlastně charakter apriorní závaznosti, nýbrž jsou dodržovány dobrovolně. Dilema vězně nemá v tomto smyslu charakter kooperativní hry, neboť dohoda o tom, že se oba vězňové nepřiznají, musí splňovat aspekt závaznosti.

Vyjdeme-li z hlediska faktické závaznosti dohod, příp. vynutitelné z vnějšku, dospějeme k oslabení pojmu vnitřní stability. Řekneme, že globální smíšená strategie s^* je (*týmová*) *slabě stabilní*, když buď (a) existuje přípustná koaliční struktura $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$ taková, že s^* je (týmově) $\mathscr{K}$-rovnovážný $\mathscr{K}$-vektor smíšených strategií, nebo (b) když s^* je rovnovážný vektor smíšených strategií; množinu všech slabě stabilních strategií označíme $\bar{S}_{\text{stab}}$ a množinu všech týmových slabě stabilních strategií označíme $\bar{S}^*_{\text{stab}}$. Podle teorému 2 máme:

$$\emptyset \neq \bar{S}^*_{\text{stab}} \subset \bar{S}_{\text{stab}} ,$$

takže slabě stabilní globální strategie, i týmové, vždycky existují.

Mezi slabě stabilní strategie zařazujeme rovnovážné vektory strategií, i když není $\mathscr{K}_0 \in \boldsymbol{K}$, proto, aby si každý hráč mohl zajistit při nejhorším alespoň svou garanční výplatu.

Slabě stabilní globální strategii s^* budeme nazývat [*týmově*] *efektivní*, když (1) je individuálně racionální a (2) neexistuje individuálně racionální slabě stabilní globální strategie t^* taková, že $t^* \in S_{\mathscr{K}}$, $s^* \in S_{\mathscr{K}'}$, kde $\mathscr{K}'$ je zjemnění koaliční struktury $\mathscr{K}$, přičemž $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$, $\mathscr{K}' \in \boldsymbol{K}$ a

$$H_i(t^*) > H_i(s^*) \quad \text{pro každé} \quad i \in I$$

$$\left[H_i(t^*) \geqq H_i(s^*) \quad \text{pro každé} \quad i \in I\,, \quad H_I(t^*) \neq H_I(s^*)\right].$$

Množinu efektivních resp. týmově efektivních strategií označujeme S_{efekt} resp. S^*_{efekt}.

Teorém 7. *Existuje alespoň jedna (týmově) efektivní slabě stabilní globální smíšená strategie; přitom:*

$$S^*_{\text{efekt}} \subset S_{\text{efekt}}\,.$$

Lze ukázat, že k pojmu slabé stability dospějeme přímou cestou tím, že interpretujeme postulát o predikci z hlediska racionálního pozorovatele, který má jako informační množinu dvojice $(a; \mathscr{K})$, $a \in A$, $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$, a tudíž který má předpovídat jednání hráčů za podmínky, že zná ve hře realisované koaliční struktury; mluvíme o tzv. *podmíněné predikci.*

Smysl pojmu efektivity vyplývá z toho, že při vyjednávání koaliční struktura $\mathscr{K}'$, v níž se mohou koalice sdružit ve větší, aby její členové dosáhli vyšších výplat, fakticky nevznikne.

V kooperativních hrách s kompensacemi definujeme *kompensačně efektivní* strategii s^* jako takovou, že

$$\sum_{i \in I} H_i(s^*) = M = v(I)\,.$$

Označíme-li symbolem S_{cefekt} množinu všech kompensačně efektivních strategií, pak:

$$S_{\text{cefekt}} \subset \bar{S}^*_{\text{stab}}\,;$$

slovy, *každá kompensačně efektivní strategie je týmová slabě stabilní.* Snadno nahlédneme, že globální strategie je kompensačně efektivní právě tehdy, když je kompensačně stabilní v dané hře vyšetřované jako hra dohodová.

Důvod, proč ve hrách s kompensacemi je třeba efektivitu definovat jinak, než je tomu ve hrách bez kompensací, je zřejmý z interpretace takových her, jak jsme se přesvědčili na příkladech uvedených v tomto paragrafu.

Zatím jsme splnili první část programu, který jsme nastínili v úvodním paragrafu kap. 7: Ve strategických hrách bez kompensací definujeme množinu S_0 jako množinu efektivních resp. týmově efektivních globálních strategií, které jsou konsistentní s určitými postuláty racionálního jednání; neexistují-li efektivní vnitřně stabilní globální strategie, vždy můžeme najít efektivní slabě stabilní globální strategie. Ve strategických hrách s kompensacemi zahrneme do množiny S_0 kompensačně stabilní globální strategie, pokud existují, jinak vezmeme do konkurence všechny kompensačně efektivní. Zbývá další krok: vyšetřit problém vyjednávání mezi hráči, což provedeme v následující kapitole.

9. VYJEDNÁVÁNÍ A ARBITRÁŽ

Vyjednávání ve hře bez kompensací

Teorie vyjednávání se snaží dát racionální návod k dohodám mezi hráči v rámci jedné koalice a k dohodám mezi koalicemi v téže koaliční struktuře. V případě nepřípustnosti kompensací jde v podstatě o jeden a tentýž problém, neboť v případě racionálních dohod o rozhodování uvnitř jedné koalice bereme jednání antikoalice jako parametr (srovn. (8.38)), čímž redukujeme problém vyjednávání na dohodovou hru bez kompensací, kdežto v případě mezikoaličního vyjednávání se opíráme o pomocně vytvořenou dohodovou hru tvaru (7.2). Znamená to, že očekáváme, že se může vytvořit jen taková přípustná koaliční struktura $\mathscr{K}$, pro niž je průnik $S_0 \cap S_{\mathscr{K}}$ neprázdný, k níž tedy existuje efektivní $\mathscr{K}$-vektor strategií, a studujeme problém vyjednávání za předpokladu, že se taková koaliční struktura $\mathscr{K}$ realisovala. Jinými slovy, představujeme si, že po realisaci koaliční struktury $\mathscr{K}$ dojde k mezikoaličnímu vyjednávání ve smyslu nezávazné kooperace o dohodě týkající se společné preferenční stupnice v množině výsledků

$$\{\varrho(s) : s \in S_0 \cap S_{\mathscr{K}}\} .$$

Tento přístup k problému vyjednávání je nejobecnější, neboť pravidla vyjednávání mohou záviset na typu realisované koaliční struktury. Zde se budeme zabývat jednodušším problémem, kdy budeme hledat „nejrozumnější" společnou preferenční stupnici všech hráčů v celé množině „nejefektivnějších" výsledků

$$\Omega_0 = \varrho(S_0) = \{\varrho(s) : s \in S_0\} .$$

Jinak řečeno, činíme mlčky předpoklad, že naše pravidla vyjednávání budou nezávislá na realisaci přípustných koaličních struktur. Z rozboru optimálních rozhodnutí podle dohodnuté preferenční stupnice vyplyne rovněž poznatek, které koaliční struktury jsou pro účastníky hry nejvýhodnější.

Proces vyjednávání je založen na metodě hrozeb, jimiž se hráči snaží čelit pro ně nevýhodným dohodám o společných preferencích. Při tomto procesu se mohou hráči sdružovat do přípustných subkoalic, v nichž se společně brání přijetí nevýhodných globálních strategií, takže výsledek vyjednávání vyjadřuje kompromis mezi hrozbami a ústupky. Abychom si celý problém vyjednávání zjednodušili, omezíme se na strategické hry o dvou hráčích, neboť zde odpadá vznik netriviálních subkoalic maximální koalice. Řekněme předem, že ani v případě vyjednávání mezi dvěma hráči není problém racionálních dohod uspokojivě řešen, poněvadž žádná dosud navrhovaná pravidla racionálního vyjednávání nejsou zcela přesvědčivá. Proto se v našich úvahách omezíme v podstatě na jediné takové pravidlo, které se jeví z více hledisek jako intuitivně nejuspokojivější.

Budeme předpokládat, že oba hráči projevují ochotu ke spolupráci, takže S_0 se skládá z týmově efektivních globálních strategií. Potom pro každou dvojici ω_1, ω_2

výsledků ležících v Ω_0, které nejsou ekvivalentní, tedy není $\omega_1 \equiv \omega_2$ (srovn. str. 76), platí buď

$$(9.1) \qquad \omega_1 \succ_1 \omega_2\,, \quad \omega_2 \succ_2 \omega_1\,,$$

nebo

$$\omega_2 \succ_1 \omega_1\,, \quad \omega_1 \succ_2 \omega_2\,.$$

Předmětem vyjednávání je otázka, zda ve společné preferenční stupnici U má platit pro danou dvojici ω_1, ω_2 relace

$$\omega_1 \succ_U \omega_2 \quad \text{nebo} \quad \omega_2 \succ_U \omega_1 \quad \text{nebo} \quad \omega_1 \sim_U \omega_2\,.$$

Všimněme si, že z efektivity globálních strategií v S_0 plyne, že $u_1(\omega) \geqq v(1)$, $u_2(\omega) \geqq v(2)$ pro každý výsledek $\omega \in \Omega_0$.

Pro určitost budeme předpokládat, že pro danou dvojici ω_1, ω_2 jsou splněny vztahy (9.1). Když se oba hráči dohodnou, že ve společné prererenční stupnici U bude platit relace $\omega_2 \succ_U \omega_1$, znamená to, že první hráč *ustoupí* druhému hráči a přijme jeho preference. Tím se při případném rozhodování mezi výsledky ω_1 a ω_2 docílí, že koalice obou hráčů přijme výsledek ω_2, čímž první hráč utrpí ztrátu na svém užitku rovnou $u_1(\omega_1) - u_1(\omega_2)$. Obráceně, když druhý hráč ustoupí prvnímu, takže bude $\omega_1 \succ_U \omega_2$, sníží se užitek druhého hráče při rozhodování mezi ω_1 a ω_2 o rozdíl $u_2(\omega_2) - u_2(\omega_1)$. Kdyby byly obě ztráty na užitku mezi hráči *srovnatelné*, mohli bychom přijmout jako návod k vyjednávání, že *ustoupí ten z obou hráčů, jehož ztráta je menší.*

Obecně však užitky obou hráčů nejsou mezi sebou srovnatelné, takže je třeba najít způsob, podle něhož bychom obě ztráty

$$u_1(\omega_1) - u_1(\omega_2)\,, \quad u_2(\omega_2) - u_2(\omega_1)$$

mohli mezi sebou porovnat. První hráč si může zaručit bez pomoci spoluhráče výsledek, jehož užitek je rovný nejméně garanční výplatě $v(1)$. Při rozhodování mezi výsledky ω_1 a ω_2 může první hráč *hrozit* druhému hráči, když mu neustoupí a nepřijme výsledek ω_1, že si první hráč použitím některé své garanční strategie zajistí výsledek alespoň $v(1)$. Jestliže přesto druhý hráč neustoupí a první hráč svou hrozbu uskuteční, představuje rozdíl $u_1(\omega_1) - v(1)$ ztrátu užitku prvního hráče, která vznikne ve srovnání s případem, kdy druhý hráč prvnímu hráči ustoupí. Podíl

$$q_1 = \frac{u_1(\omega_1) - u_1(\omega_2)}{u_1(\omega_1) - v(1)}$$

vyjadřuje poměr ztráty, plynoucí z *ústupu* prvního hráče, ke ztrátě, vzniklé provedením *hrozby*, tedy *poměrnou ztrátu prvního hráče*, která je důsledkem neústupnosti druhého hráče. Podobně podíl

$$q_2 = \frac{u_2(\omega_2) - u_2(\omega_1)}{u_2(\omega_2) - v(2)}$$

representuje *poměrnou ztrátu druhého hráče* za předpokladu neústupnosti prvního hráče. Poměrné ztráty q_1, q_2 jsou již nezávislé na zvolené soustavě užitkových funkcí (u_1, u_2) dané hry, tj. jsou invariantní vůči přípustným lineárním transformacím užitku podle (5.34). To znamená, že obě ztráty můžeme mezi sebou srovnávat a dát oběma hráčům jako *návod k dohodě, aby ustoupil ten, jehož poměrná ztráta je menší.*

Pravidlo vyjednávání (o společných preferencích): Když $\omega_1 \in \Omega_0$, $\omega_2 \in \Omega_0$ jsou výsledky, pro něž platí vztahy (9.1), pak oba hráči společně preferují výsledek ω_1 proti výsledku ω_2, je-li poměrná ztráta q_1 prvního hráče větší než poměrná ztráta q_2 druhého hráče:

$$\omega_1 \succ_U \omega_2 \quad \text{pro} \quad q_1 > q_2 \, .$$

Definujme obecněji, je-li Ω některá neprázdná množina smíšených výsledků, (u_1, u_2) daná soustava užitkových funkcí obou hráčů a $c = (c_1, c_2)$ některý číselný vektor takový, že

$$u_1(\omega) \geqq c_1 \, , \quad u_2(\omega) \geqq c_2 \quad \text{pro každé} \quad \omega \in \Omega \, ,$$

systém preferencí U_c v množině Ω tím, že klademe $\omega U_c \omega'$, když a jen když (1) buď současně platí $u_1(\omega) \geqq u_1(\omega')$, $u_2(\omega) \geqq u_2(\omega')$, (2) nebo současně platí $u_1(\omega) > u_1(\omega')$, $u_2(\omega) < u_2(\omega')$ a

$$\frac{u_1(\omega) - u_1(\omega')}{u_1(\omega) - c_1} \geqq \frac{u_2(\omega') - u_2(\omega)}{u_2(\omega') - c_2}$$

Tvrzení. *Systém preferencí U_c je preferenční stupnice v množině Ω a relace $\omega U_c \omega'$ platí v případě, kdy $\omega \succ_1 \omega'$ a $\omega' \succ_2 \omega$, právě tehdy, je-li splněna nerovnost*

$$\big(u_1(\omega) - c_1\big)\big(u_2(\omega) - c_2\big) \geqq \big(u_1(\omega') - c_1\big)\big(u_2(\omega') - c_2\big) \, .$$

Jinými slovy, jestliže množina Ω má silnější vlastnost, že platí $u_1(\omega) > c_1$, $u_2(\omega) > c_2$ pro každý výsledek $\omega \in \Omega$, představuje funkce u_c definovaná na množině Ω rovnicí

$$u_c(\omega) = \big(u_1(\omega) - c_1\big)\big(u_2(\omega) - c_2\big) \, , \quad \omega \in \Omega \, ,$$

kvantitativní representaci preferenční stupnice U_c; tato preferenční stupnice nemůže být s výjimkou degenerovaných případů kardinální.

Číselnému vektoru $c = (c_1, c_2)$ se říká *nárokovaný* vektor (angl. claim point), číslo c_i $(i = 1, 2)$ se nazývá nejmenší *výplata nárokovaná hráčem i.* Systém preferencí U_c v množině Ω nazveme *preferenční stupnicí pro nárokovaný vektor* c; rozumí se tím, že jde o společnou preferenční stupnici obou hráčů.

Zřejmě preferenční stupnice U_c v množině $\Omega_0 = \varrho(S_0)$ pro nárokovaný vektor $c = (v(1), v(2))$ je ve shodě se shora uvedeným pravidlem vyjednávání o společných preferencích obou hráčů. Platí totiž, že při splnění vztahů (9.1) bude pro $U = U_c$ vyhověno relaci

$$\omega_1 \succ_U \omega_2\,, \quad \text{když a jen když} \quad q_1 > q_2\,.$$

Teorém 1. *V dohodové hře o dvou hráčích budiž Ω_0 množina těch výsledků ω, k nimž existuje týmově efektivní globální strategie $s \in S$ taková, že $\omega = \varrho(s)$. Nechť U_c je preferenční stupnice v množině Ω_0 pro nárokovaný vektor $c = (v(1), v(2))$, kde $v(i)$ je garanční výplata hráče i $(i = 1, 2)$. Výsledek $\omega \in \Omega_0$ je největší v množině Ω_0 vzhledem k preferenční stupnici U_c, neboli rozhodnutí d_ω je optimální dostupné rozhodnutí maximální koalice vzhledem k její dohodě C o rozhodování, pro niž $U^{(C)} = U_c$, když a jen když součin*

$$(u_1(\omega) - v(1))\,(u_2(\omega) - v(2))$$

je maximální mezi všemi součiny

$$(u_1(\omega') - v(1))\,(u_2(\omega') - v(2))\,, \quad kde \quad \omega' \in \Omega_0\,,$$

čili mezi všemi součiny $(x_1 - v(1))\,(x_2 - v(2))$, kde $x = (x_1, x_2)$ probíhá Paretovu optimální množinu P_I.

Přitom rovnice (srovn. (5.44))

$$(9.2) \qquad (x_1^{(0)} - v(1))\,(x_2^{(0)} - v(2)) =$$
$$= \max\,\{(x_1 - v(1))\,(x_2 - v(2)) : x \in \tilde{X},\, x_1 \geqq v(1),\, x_2 \geqq v(2)\}$$

má jediné řešení $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ a pro největší výsledek ω platí rovnosti

$$u_1(\omega) = x_1^{(0)}\,, \quad u_2(\omega) = x_2^{(0)}\,.$$

Teorém 1 nám zaručuje, že v dohodové hře výsledky maximální vzhledem k vyjednané preferenční stupnici skutečně existují a jsou navíc navzájem ekvivalentní, tedy určeny až na ekvivalenci (srovn. str. 76) jednoznačně. Týmovost, tj. ochota ke spolupráci je zde nutným předpokladem k tomu, aby hráči byli ochotni si navzájem činit ústupy podle hořejšího pravidla o vyjednávání společných preferencí.

V příkladu věnovaném dilematu vězně jako dohodové hře (na str. 185) má rovnice (9.2) řešení $x^{(0)} = (-1, -1)$, takže optimální dostupné rozhodnutí maximální koalice vzhledem k preferenční stupnici sjednané podle hořejšího pravidla je použít strategie, že se žádný z obou vězňů nepřizná.

Teorém 2. *V nekooperativní hře o dvou hráčích budiž Ω_0 množina těch výsledků ω, k nimž existuje týmově efektivní rovnovážný vektor strategií s takový, že*

$\omega = \varrho(s)$:

$$\Omega_0 = \{\varrho(s) : s \in S^*_{\text{efekt}}\} .$$

Je-li U_c preferenční stupnice v Ω_0 pro nárokovaný vektor $c = (v(1), v(2))$, kde $v(i)$ je garanční výplata hráče i $(i = 1, 2)$, pak existuje alespoň jeden výsledek $\omega \in \Omega_0$, který je největší vzhledem k preferenční stupnici U_c; přitom platí nerovnosti

$$(u_1(\omega) - v(1))(u_2(\omega) - v(2)) \geqq (u_1(\omega') - v(1))(u_2(\omega') - v(2))$$

pro každé $\omega' \in \Omega_0$.

V nekooperativní hře může vést naše pravidlo vyjednávání k tzv. *mrtvému bodu*, neboť teorém 2 nám nezaručuje jednoznačnou existenci maximálního výsledku. Např. v nekooperativní hře dané jako bimaticová hra

$$Q^{(1)} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad Q^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

vede naše pravidlo vyjednávání k dvěma různým výsledkům, které jsou oba největší vzhledem k preferenční stupnici U_c, kde $c = (v(1), v(2)) = (0, 0)$. Jsou to výsledky odpovídající výplatním vektorům (2,1) a (1,2). Tato skutečnost je zásadní povahy: v nekooperativní hře zde uvedené nelze dát žádné racionální zdůvodnění toho, proč by oba hráči měli společně dát přednost výplatnímu vektoru (2,1) proti výplatnímu vektoru (1,2), nebo obráceně. Jde tu tedy o potíž, která je v nekooperativním pojetí principiálně nepřekonatelná. Vyšetřujeme-li však tuto hru jako dohodovou, pak stačí oba výplatní vektory smísit v poměru $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, čímž dostaneme jako optimální výplatní vektor $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, k němuž vede použití silně korelované globální smíšené strategie, která je směsí příslušných ryzích vektorů strategií.

Pojem týmové efektivity v kooperativní hře je totožný s pojmem týmové efektivity v dohodové hře, jak je možno se snadno přesvědčit z definice, uvedené v obecném tvaru na str. 183. Tudíž pro kooperativní hru o dvou hráčích platí výsledky uvedené v teorému 1.

V procesu vyjednávání nejde ani tolik o společné preference, nýbrž o maximální výsledek podle smluvených preferencí dosažený, který representuje kompromis mezi zájmy účastníků hry. Omezíme-li se na dohodovou hru, můžeme si představit, že proces vyjednávání mezi dvěma hráči probíhá takto: hráč i navrhne k dohodě globální smíšenou strategii $s^{(i)} \in S^*_{\text{efekt}}$ a hrozí hráči j, že v případě jeho nesouhlasu použije některé své strategie $s_i \in S_i$ $(i, j = 1, 2,; i \neq j)$; v této souvislosti se s_i nazývá *hrozbová strategie* hráče i.

Pravidlo vyjednávání, jímž se hráči řídí v případě, že platí vztahy

$$H_i(s^{(i)}) > H_i(s^{(j)}) \geqq H_i(s_1, s_2) \; ; \quad i, j = 1, 2 \; ; \quad i \neq j \, ,$$

budiž dáno preferenční stupnicí U_c, kde $c = H_I(s_1, s_2)$.

Když se hráči řídí uvedeným pravidlem vyjednávání o optimální globální strategii, potom lze ukázat, že oba hráči mají tzv. *optimální hrozbové strategie* s_1^*, s_2^*, které jsou ve vzájemné rovnováze, a že lze najít vektor $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ležící v Paretově optimální množině P_I takový, že hráč i si použitím hrozbové strategie s_i^* zajistí výplatu nejméně o velikosti $x_i^{(0)}$.

Přitom užitek výsledku ω, který je největší vzhledem k preferenční stupnici U_c, kde $c = H_I(s_1^*, s_2^*)$, je pro hráče i roven

$$u_i(\omega) = x_i^{(0)}\,; \quad i = 1, 2\,.$$

V tomto paragrafu jsme předvedli ukázku metod vyjednávání mezi dvěma hráči o společných preferencích nebo přímo o způsobu společného jednání, jež by představovalo optimální kompromis mezi zájmy obou účastníků hry. Složitější metody vyjednávání, jež byly dosud navrženy, najde čtenář v pracech, uvedených v seznamu literatury na konci této stati. Tyto složitější metody počítají nejenom s hrozbami isolovaných hráčů, nýbrž také s hrozbami skupin hráčů sdružených do subkoalic. Je zřejmé, že pokud nejde o dohodové hry, může se dospět racionálním postupem vyjednávání k celé množině rozumných kompromisů, jež jsou mezi sebou nesrovnatelné, takže záleží spíše na okolnostech stojících mimo konfliktní situaci, jež určují, který z těchto kompromisů hráči zvolí.

Arbitráž

V minulém paragrafu jsme zjistili, že i rozumné způsoby vyjednávání o kompromisu mohou vést k mrtvému bodu, ježto rozumných kompromisů může být celá řada a mohou být navzájem neekvivalentní. Proto vzniká myšlenka předložit celý konflikt nezávislému rozhodčímu, který se snaží najít na základě všeobecně přijatelných principů kompromis, který by byl co nejspravedlivější vůči celému kolektivu hráčů a současně byl pro všechny závazný. Spravedlivostí kompromisu se míní nejenom respektování zájmů každého hráče, ale také ohled na jeho možnosti jednání k hájení těchto zájmů.

Daným principům, jimiž se řídí hledání spravedlivého kompromisu, se říká *arbitrážní schéma* a výsledek, představující kompromis odpovídající danému arbitrážnímu schématu, se nazývá *arbitrážní*. Popíšeme si zde arbitrážní schéma pro dohodovou hru, které nebere v úvahu, že se hráči mohou sdružovat k hájení svých zájmů do koalic.

Arbitrážní schéma musí fungovat pro kteroukoli hru daného typu. Vyjdeme z předpokladu, že dohodová hra má právě n hráčů a že je dána v základním tvaru (srovn. str. 140), který lze pro dané $n = |I|$ přepsat podle (1.1) jako dvojici

$$(\tilde{X}, c)\,, \quad \text{kde} \quad c = (v(1), v(2), \ldots, v(n))\,,$$

přičemž lze předpokládat, že $\tilde{X} \subset R^n$. Víme, že redukovaný prostor výplatních vektorů $\tilde{X}$ je representován konvexním (a kompaktním) polyedrem v R^n. Omezme se na třídu dohodových her, pro něž $c \in \tilde{X}$. Potom arbitrážní schéma je formálně definováno jako zobrazení f, které přiřazuje každé dvojici $(\tilde{X}, c)$, kde $\tilde{X}$ je konvexní (a kompaktní) polyedr v R^n a kde $c \in \tilde{X}$, arbitrážní vektor (*arbitrážní řešení*)

$$f(\tilde{X}, c) \in \tilde{X} ,$$

tedy výplatní vektor representující kompromis mezi hráči.

Arbitrážní schéma f budeme charakterisovat těmito požadavky:

(1) $f(\tilde{X}, c) \in P_I$, tj. arbitrážní výplatní vektor $f(\tilde{X}, c)$ leží v Paretově optimální množině dané hry; srovn. (6.53) a (6.54);

(2) když $\tilde{X}' \subset \tilde{X}$ a $f(\tilde{X}, c) \in \tilde{X}'$, kde $c \in \tilde{X}'$, pak také $f(\tilde{X}', c) = f(\tilde{X}, c)$; slovy, arbitrážní řešení se nezmění, když při stejném výplatním vektoru c zmenšíme redukovaný prostor výplatních vektorů tak, aby do něho toto řešení ještě patřilo;

(3) když $\tilde{X}$ je symetrický polyedr a $v(i) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$f_i(\tilde{X}, c) = f_j(\tilde{X}, c) \quad \text{pro} \quad i \neq j \; ; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \; ;$$

slovy, pro symetrický redukovaný prostor výplatních vektorů a pro vektor c identický s počátkem souřadnic jsou výplaty všem hráčům pro arbitrážní vektor stejné.

Poznamenejme, že množina M je symetrická v prostoru R^n (kolem počátku souřadnic), když má vlastnost, že s každým vektorem $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ do ní patří každý vektor, který vznikne některou permutací složek vektoru x.

Teorém. *Arbitrážní řešení $f(\tilde{X}, c)$, získané podle arbitrážního schématu splňujícího požadavky (1), (2) a (3), je jediným řešením rovnice:*

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i^{(0)} - c_i) = \max \left\{ \prod_{i=1}^{n} (x_i - c_i) : x \in \tilde{X}, \, x_i \geqq c_i \; (i = 1, 2, \ldots, n) \right\} ,$$

tj. $f_i(\tilde{X}, c) = x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Srovnáme-li tento teorém pro $n = 2$ s teorémem 1 předcházejícího paragrafu, zjistíme, že v tomto případě je arbitrážní řešení identické s optimálním kompromisem dosaženým podle tam uvedeného pravidla vyjednávání.

Arbitrážní řešení splňující požadavky (1), (2) a (3) se nazývá v literatuře podle svého autora *Nashovo*. Pravidlu vyjednávání, uvedenému v předcházejícím paragrafu, se říká podle autora *Zeuthenovo*. Lze tedy konstatovat, že *Nashovo arbitrážní schéma* poskytuje pro dohodové hry o dvou hráčích týž výsledek jako *Zeuthenovo pravidlo vyjednávání* o kompromisní preferenční stupnici. V obojím případě běží o vyjednávání a arbitráž ve hrách bez kompensací.

Pro hry s kompensacemi navrhl arbitrážní schéma Shapley. *Shapleyovo arbitrážní schéma* poskytuje arbitrážní racionální podílový vektor, který representuje způsob rozdělení maximálního sumárního užitku, jehož mohou hráči dosáhnout, na podíly jednotlivým účastníkům hry. Shapleyovo arbitrážní schéma je formálně vyjádřeno jako zobrazení w, které přiřazuje každé hře (I, v) s číselnou charakteristickou funkcí některý podílový vektor

$$w(I, v) \in Y_{\text{imp}} .$$

Požadavky, jimiž je arbitrážní podílový vektor $w(I, v)$ v Shapleyově případě charakterisován, uvádět nebudeme, ale uvedeme si výsledek, k němuž toto arbitrážní schéma vede. Platí:

$$w_i(I, v) = \sum_{\substack{K \subset I \\ K \ni i}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} [v(K) - v(K - \{i\})]$$

$$\text{pro } i \in I \ (k = |K|).$$

Číslu $w_i(I, v)$ se v literatuře říká *Shapleyova hodnota hry* pro hráče $i \in I$. Shapleyova hodnota udává v podstatě „sílu" hráče z hlediska tvorby koalic: zachycuje průměrný příspěvek hráče i jednotlivým koalicím, v nichž může být členem.

V současné době byla vypracována celá rozsáhlá teorie, která se zabývá problematikou arbitráže ve strategických hrách z nejrozmanitějších hledisek, charakterisujících různá pojetí spravedlivosti arbitrážního řešení; v literatuře je známa pod anglickým názvem „valuation theory" (něm. Bewertungstheorie).

Vyjednávání ve hře s kompensacemi

Problém vyjednávání za předpokladu, že jsou přípustné kompensace, budeme vyšetřovat pro případ kooperativních her. Toto omezení není podstatné, neboť v matematickém modelu lze učinit nepřípustné koalice a priori přípustnými, ale přitom zařídit formálními prostředky, aby pro hráče nebylo výhodné do nich vstupovat, takže se ukáží při racionálním postupu hráčů ex post nerealisovatelnými. Na rozdíl od strategických her bez kompensací neběží při vyjednávání ve hrách s kompensacemi o vyhledání přijatelného kompromisu charakterisovaného některým smíšeným výsledkem, dosažitelným s pomocí určitých efektivních globálních strategií; nejde tedy o hledání přijatelné společné preferenční stupnice, neboť ta je ve hrách s kompensacemi předem dána podle principu motivace kompensačních dohod. Jak víme, ve strategických hrách s kompensacemi použijí hráči kterékoli globální strategie maximalisující sumární užitek, tj. kterékoli kompensačně efektivní strategie (srovn. str. 194). Tím hráči dosáhnou maximálního sumárního užitku M (srovn. (6.68)) a hlavní problém, který se zde vynoří, je otázka, jak se mají hráči o tento celkový „produkt" svého jednání podělit. Setkáváme se tu s problémem vyjednávání o rozdělení sumárního produktu M mezi jednotlivé hráče.

Každá dohoda mezi hráči o rozdělení celkového produktu M je charakterisována některým podílovým vektorem, který je hromadně racionální (srovn. str. 130). Jak víme, proces vyjednávání se opírá o metodu hrozeb, jimiž se hráči snaží čelit dohodám pro ně nevýhodným. Každý hráč si může vynutit hrozbou, že použije své garanční strategie, podíl, který nepoklesne pod jeho garanční výplatu. Můžeme tedy předpokládat, že a priori možnou dohodou mezi hráči může být jenom racionální podílový vektor, tj. imputace (srovn. (6.76)).

Budeme se zabývat procesem vyjednávání, v němž se hráči, ať již sami nebo sdruženi do subkoalic, brání nevýhodným dohodám podle principu garance; viděli jsme, že se hráči mohou bránit i jinými hrozbovými strategiemi (srovn. str. 199). Toto omezení nám umožňuje vyjít při našem vyšetřování z kanonického tvaru hry s kompensacemi, daného jako hra s číselnou charakteristickou funkcí (srovn. str. 136). Konstatujme hned na tomto místě, že v literatuře problém vyjednávání ve hrách s kompensacemi nebyl doposud pro jiné případy řešen.

Vyjdeme-li z principu garance, pak skupina hráčů sdružená do subkoalice K bude ochotna zúčastnit se spolupráce v některé větší koalici L, $K \subset L$, když jí bude zaručeno, že její celkový podíl $\sum_{i \in K} y_i$ neklesne pod hodnotu $v(K)$, kterou si subkoalice K může zajistit vlastními silami. Odtud:

Princip koaliční racionality: Subkoalice K se nespojí s jinými hráči ke spolupráci v koalici $L \supset K$, když jí koalice L nabídne dohodu o podílech $\{y_i\}_{i \in L}$ takovou, že $\sum_{i \in K} y_i < v(K)$.

Principu koaliční racionality nejprve použijeme na maximální koalici. Podílový vektor $y \in Y$ nazveme *koaličně racionálním*, když pro každou koalici $K \subset I$ platí nerovnost

$$\sum_{i \in K} y_i \geqq v(K) .$$

Každý koaličně racionální podílový vektor je zřejmě individuálně a hromadně racionální, tj. leží v prostoru Y_{imp}. Množina všech koaličně racionálních podílových vektorů se nazývá *jádro hry*; jádro hry označíme symbolem $\mathbf{C}$.

Teorém 1. *Každá esenciální hra s konstantním součtem má prázdné jádro,* tj. *neexistují v ní žádné koaličně racionální podílové vektory.*

Když y je koaličně racionální podílový vektor, pak je intuitivně zřejmé, že žádná skupina hráčů nemůže nic namítat proti dohodě o rozdělení sumárního užitku M na podíly dané vektorem y, neboť nemá proti této dohodě žádné účinné hrozby ve smyslu garančního principu. Ve strategické hře s neprázdným jádrem lze tedy jádro $\mathbf{C}$ považovat za „řešení" hry, neboť každý koaličně racionální vektor representuje nenapadnutelnou, a tedy rozumnou dohodu mezi hráči o distribuování produktu M na podíly.

Neesenciální hra obsahuje jediný racionální podílový vektor $\{v(i)\}_{i \in I}$, který je zároveň koaličně racionální. Strategická hra popsaná v příkladě na str. 134 obsahuje jako jediný koaličně racionální podílový vektor, jak je možno se snadno přesvědčit, vektor $y^{(0)}$. Modifikujeme-li tuto hru tak, že součet $\alpha + \beta + \gamma > 2$, pak příslušná hra má prázdné jádro; pro $\alpha + \beta + \gamma < 2$ je jádro neprázdné a obsahuje nekonečně mnoho podílových vektorů.

Řekneme, že podílový vektor y *dominuje* podílový vektor x *via koalice* K, a píšeme $y \operatorname{Dom}_K x$, když

$$\sum_{i \in K} y_i \leqq v(K) \quad \text{a} \quad y_i > x_i \quad \text{pro každé} \quad i \in K .$$

Intuitivně to znamená, že z hlediska koalice K dohoda representovaná podílovým vektorem y, v němž si svůj celkový podíl může koalice K zaručit vlastními silami, je lepší než dohoda representovaná podílovým vektorem x.

Říkáme, že podílový vektor y *dominuje* podílový vektor x, když $y \operatorname{Dom}_K x$ pro některou koalici $K \subset I$ $(K \neq \emptyset)$; relaci dominování zapisujeme jako $y \operatorname{Dom} x$.

Lze ukázat, že relace dominování zde definovaná v prostoru Y odpovídá minimální relaci dominování v množině všech rozhodovacích kritérií racionálního pozorovatele, který se snaží předpovědět podílové vektory, jež mohou při vyjednávání mezi hráči vzniknout jako dohody o distribuci celkového produktu.

Individuálně racionální podílový vektor y se nazývá *vnitřně stabilní* (vzhledem k relaci dominování Dom), když nelze najít žádný individuálně racionální podílový vektor z takový, že $z \operatorname{Dom} y$.

Tvrzení. *Individuálně racionální podílový vektor je vnitřně stabilní, když a jen když je koaličně racionální.*

Tudíž vnitřní stabilita je pojem ekvivalentní s koaliční racionalitou. Jinak řečeno, množina všech vnitřně stabilních (individuálně) racionálních podílových vektorů tvoří jádro hry. Pravíme, že *jádro hry* $\mathbf{C}$ *má vnější stabilitu*, jestliže ke každému racionálnímu podílovému vektoru z, který není koaličně racionální, existuje koaličně racionální podílový vektor y, tj. $y \in \mathbf{C}$, takový, že $y \operatorname{Dom} z$.

Ve smyslu našich úvah a z hlediska relace dominování lze považovat za jediné rozumné dohody o distribuci podílů jenom vnitřně stabilní, tj. koaličně racionální podílové vektory, tedy prvky ležící v jádru hry. Vnější stabilita jádra je charakterisována vlastností, že každou a priori možnou dohodu o distribuci podílů lze z hlediska některé koalice vylepšit na dohodu, která splňuje požadavek vnitřní stability. Zjistili jsme však, že celé skupiny her mají prázdné jádro, takže v nich neexistují žádné striktně racionální dohody o rozdělení užitku. Proto je třeba tento pojem striktní racionality dohody oslabit.

Jsou známy dvě cesty, jak oslabit pojem racionality dohod. První, která pochází od zakladatele teorie her von Neumanna, upouští od koaliční racionality a nahrazuje ji vnější stabilitou. Druhá, navržená teprve nedávno, uchovává koaliční racionalitu podmíněně vzhledem ke koaličním strukturám, v nichž nemusí obecně maximální koalice vystupovat, a doplňuje pojem vnitřní stability z hlediska nového přístupu k vyjednávání.

Množina $T \subset Y_{\text{imp}}$ se nazývá *von Neumannovo řešení* hry, když žádné dva podílové vektory ležící v množině T se nedominují a když ke každému vektoru $y \in Y_{\text{imp}}$, který není prvkem množiny T, lze najít podílový vektor $t \in T$ takový, že $t \operatorname{Dom} y$.

Teorém 2. *Když T je von Neumannovo řešení hry, pak* $\mathbf{C} \subset T$; slovy, *každé von Neumannovo řešení obsahuje jádro hry jako svou část. Hra o dvou hráčích má jediné von Neumannovo řešení, které je identické s jádrem hry a skládá se ze všech imputací y, které splňují podmínku, že $y_1 + y_2 = M$. Každá hra o třech hráčích* *má aspoň jedno von Neumannovo řešení. Každá hra, jejíž jádro má vnější stabilitu, má právě jedno von Neumannovo řešení, jež je totožné s jádrem hry.*

O strategické hře, v níž vystupují více než tři hráči, se obecně neví, zda má aspoň jedno von Neumannovo řešení. Strategická hra o třech hráčích, jejíž jádro nemá vnější stabilitu, má nekonečně mnoho von Neumannových řešení. Speciálně to platí o hře uvedené v příkladu na str. 134; charakter von Neumannových řešení zmíněné hry je poměrně složitý, proto je zde popisovat nebudeme. Poznamenejme, že pro některé speciální třídy her o libovolném počtu hráčů byla dokázána existence nekonečně mnoha von Neumannových řešení.

Lze ukázat, že se každé von Neumannovo řešení skládá z imputací, které jsou vnitřně stabilní vzhledem k některé modifikované relaci dominování, přičemž tato modifikace spočívá v tom, že se některé koalice nemohou za určitých okolností při dominování uplatnit.

Druhá cesta k oslabení pojmu racionality dohod, kterou navrhli Aumann a Maschler, představuje nový přístup ke kooperativním hrám s kompensacemi a nepostuluje jako kompensačně efektivní jenom taková jednání hráčů, která vedou k maximalisaci sumárního užitku největší koalice. Pro určitost vyjdeme z interpretace hry s číselnou charakteristickou funkcí jako hry koaliční, což znamená, že když se vytvoří koalice K, obdrží celkový podíl rovný číslu $v(K)$. Dvojici $(y; \mathscr{K})$, kde $y \in Y$ a $\mathscr{K}$ je některá koaliční struktura, budeme nazývat *podílovou konfigurací*, když

$$\sum_{i \in K} y_i = v(K) \quad \text{pro každou koalici} \quad K \in \mathscr{K} .$$

To znamená, že v podílové konfiguraci dostane každá koalice z dané koaliční struktury právě svůj podíl.

Vycházejíce z principu koaliční racionality, nazveme podílovou konfiguraci $(y; \mathscr{K})$ *racionální*, když pro každou subkoalici L kterékoli koalice K patřící do koaliční struktury $\mathscr{K}$ platí nerovnost

$$\sum_{i \in L} y_i \geqq v(L) .$$

Nechť $(z; \mathscr{K}_1)$ a $(y; \mathscr{K}_2)$ jsou racionální podílové konfigurace a nechť L_1 a L_2 jsou dvě disjunktní subkoalice některé koalice $K \in \mathscr{K}_1$. Konfigurace $(y; \mathscr{K}_2)$ se nazývá *námitka* subkoalice L_1 proti konfiguraci $(z; \mathscr{K}_1)$ vzhledem k subkoalici L_2, když lze najít disjunktní koalice K_1 a K_2 patřící do koaliční struktury $\mathscr{K}_2$, tj. $K_1 \in \mathscr{K}_2$, $K_2 \in \mathscr{K}_2$, takové, že $L_1 \subset K_1$, $L_2 \subset K_2$, přičemž platí, že

$$y_i > z_i \quad \text{pro každé} \quad i \in L_1 ,$$

$$y_i \geqq z_i \quad \text{pro každé} \quad i \in K_1 .$$

Slovy, členové ze subkoalice L_1 ve své námitce tvrdí, že si mohou bez pomoci hráčů ze subkoalice L_2 zajistit v jiné konfiguraci vyšší podíly, přičemž jejich noví partneři v koalici K_1 obdrží nejméně takové podíly jako v původní konfiguraci.

Je-li $(y; \mathscr{K}_2)$ námitka subkoalice L_1 proti $(z; \mathscr{K}_1)$ vzhledem k subkoalici L_2, pak racionální podílovou konfiguraci $(x; \mathscr{K}_3)$ nazveme *protinámitkou* subkoalice L_2, když existuje koalice $K \in \mathscr{K}_3$ taková, že $L_2 \subset K$ a není $L_1 \subset K$, přičemž platí, že

$$x_i \geqq z_i \quad \text{pro všechna} \quad i \in K ,$$

$$x_i \geqq y_i \quad \text{pro všechna} \quad i \in K \cap K_1 ,$$

kde $K_1 \in \mathscr{K}_2$ je ta koalice v $\mathscr{K}_2$, pro niž $L_1 \subset K_1$.

Slovy, ve své protinámitce členové subkoalice L_2 tvrdí, že nepotřebují pomoci všech členů subkoalice L_1 a přece si zajistí podíly nejméně takové jako v původní konfiguraci; přitom těm členům subkoalice L_1, jejichž pomoci potřebují, i jejich partnerům v námitce zajistí nejméně takové podíly, které jim byly při námitce nabídnuty.

Racionální podílová konfigurace $(y; \mathscr{K})$ se nazývá *vnitřně stabilní*, když ke každé námitce subkoalice L_1 existuje protinámitka subkoalice L_2, ať L_1 a L_2 jsou jakékoli disjunktní subkoalice libovolné koalice $K \in \mathscr{K}$. Množina všech vnitřně stabilních racionálních podílových konfigurací se nazývá *(Aumann-Maschlerova) dohodová množina.*

Pojem vnitřní stability podílové konfigurace lze zavést s pomocí vhodně zvolené relace dominování v prostoru všech racionálních podílových konfigurací obdobným postupem, jehož jsme použili v dřívějších případech. Lze ukázat, že taková relace dominování odpovídá minimální relaci dominování ve třídě všech rozhodovacích kritérií pozorovatele, který si klade za úkol předpovědět konfigurace podílů, které jsou konsistentní s pravidly vyjednávání, založenými na pojmech námitky a protinámitky.

Snadno se ukáže, že ve strategické hře uvedené v příkladě na str. 134 obsahuje dohodová množina podílovou konfiguraci $(y^{(0)}; \mathscr{K}_I)$, kde $\mathscr{K}_I = \{I\}$.

Teorém 3. *V každé hře existuje alespoň jedna vnitřně stabilní racionální podílová konfigurace.*

Dohodová množina, skládající se z konfigurací, představuje „řešení" kooperativní hry s kompensacemi. Vnitřně stabilní konfigurace $(y; \mathscr{K})$ representuje dohodu, při níž vznikne koaliční struktura $\mathscr{K}$ a v níž si každá koalice $K \in \mathscr{K}$ svůj celkový výtěžek $v(K)$, jehož může samostatně dosáhnout, rozdělí mezi své členy tak, že každá skupina členů L této koalice si nemůže stěžovat, poněvadž dostane částku rovnou nejméně $v(L)$, tedy nikoli méně, než si může sama zajistit. Přitom k rozpadu koalice K nemůže dojít, neboť každá námitka některé její subkoalice L je vyvážena protinámitkou.

Teorém 3 zajišťuje pro Aumannovu-Maschlerovu koncepci „řešení" existenci racionálních dohod v každé hře s kompensacemi, kdežto o existenci von Neumannových řešení není obecně nic známo.

POZNÁMKY

K části I. V matematických modelech konfliktních situací, s nimiž se obyčejně pracuje, nevystupuje explicitně subjektivní base hry a kardinalita preferencí se projevuje jenom nepřímo v apriorní definici normalisované výplatní funkce, založené fakticky na hypotéze o středním užitku. Např. pod pojmem normální nebo normalisovaná hra se rozumí hra v redukovaném kanonickém tvaru (srovn. str. 84) a mlčky se předpokládá, že žádný z hráčů není indiferentní.

Strategickým hrám v rozvinutém tvaru, a to zvláště hrám s úplnou informací je věnována monografie [20]. O hrách v rozvinutém tvaru se čtenář může poučit v základní knize o teorii her [3] a v první učebnici o teorii her [18]. Hry s dokonalou pamětí vyšetřoval poprvé Kuhn a poučení o nich lze najít v [18] a v přehledovém článku [33]. Normalisaci hry v rozvinutém tvaru provedl jako první von Neumann v článku [2] a detailnější výklad je podán v knize [3].

Obsah kap. 5 patří do tzv. teorie užitku, kterou začal budovat rovněž jako první zakladatel teorie her von Neumann, a to v knize [3]. Ve zmíněné knize je tato teorie budována v abstraktním tvaru, kdežto zde se opíráme v podstatě o pojetí uvedené v knize [12]. Postačující podmínky k tomu, aby existovala kvantitativní representace obecně nekardinální preferenční stupnice, jsou uvedeny v článku [28]; z něho také vyplývá metoda ke konstrukci preferenčních stupnic, které kvantitativně representovatelné nejsou. Myšlenky, na nichž jsou založena dalekosáhlá zobecnění pojmu preference jako vztahu pravděpodobnostního charakteru, najde čtenář v článku [29].

S ideou založit matematickou teorii her na několika všeobecně přijatelných postulátech kladených na racionalitu účastníků konfliktní situace přišel jako první Harsanyi; srovn. [37], [47]. Jeho pojetí se vícekrát změnilo a zdokonalilo, přičemž byl silně ovlivněn nematematickou knihou Schellingovou [23], plnou zajímavých myšlenek. V našem výkladu jsme se přidržovali zvláště moderního pojetí kooperace ve smyslu její závaznosti. Ještě Nash chápal nekooperativní hru jako nekomunikativní, takže ji považoval za řešitelnou jenom ve výjimečných případech. Harsanyi založil svoji teorii řešení nekooperativních her na myšlence nezávazné spolupráce; srovn. [38].

V literatuře se hry obyčejně dělí do dvou tříd, a to na hry nekooperativní a kooperativní. Kooperativní hry se pak studují dvojím způsobem: jako hry, které jsme nazvali dohodové, při nichž všichni hráči vzájemnou spoluprací nebo za pomoci rozhodčího – arbitra – hledají kompromis jako jediný výplatní (resp. podílový) vektor, dosažitelný některou globální strategií; nebo jako hry dané ve tvaru s abstraktní (když kompensace nejsou připuštěny), resp. s číselnou charakteristickou funkcí (při kompensacích), v nichž se hledají množiny výplatních resp. podílových vektorů, které mají vnější stabilitu. V základní knize [3] se von Neumann omezuje na hry s číselnou charakteristickou funkcí a vyšetřuje existenci stabilních množin, jež jsme nazvali von Neumannovými řešeními. Výchozím bodem mu k tomu slouží pojem garance.

Strategická hra v koaličním tvaru byla poprvé stručně charakterisována kolegou Šubertem v [14] a zde jsme věnovali pozornost motivaci zavedení tohoto pojmu, jehož kanonisace vede k hrám s Aumannovou-Pelegovou charakteristickou funkcí; srovn. [55], [56], [57], [58], [59].

V kap. 6 jsme také provedli, a to v literatuře poprvé, detailnější rozbor motivace předpokladů, jež se činí, a to většinou mlčky, ve strategických hrách s kompensacemi. Bylo to nutné proto, že mezi autory vládne doposud určitý zmatek kolem otázky, lze-li připustit ve hrách s kompensacemi předpoklad nesrovnatelnosti užitku mezi hráči.

Pojem prevence se poprvé vyskytl v souvislosti s faktem, že hru v normálním tvaru nelze jednoznačně převést na hru s Aumannovou-Pelegovou charakteristickou funkcí; srovn. [56]. To nás vedlo k tomu, že jsme uvedli von Neumannovu větu o minimaxu v jiných souvislostech, než je to běžné v literatuře.

Nejasnosti, které vládnou v literatuře kolem pojmu hry s konstantním resp. s nulovým součtem, jsou způsobeny tím, že se obvykle pracuje jenom s výplatními funkcemi a dostatečně se nezdůrazňuje možnost přípustných lineárních transformací užitku. V našem abstraktnějším pojetí se tyto obtíže nevyskytují, jak plyne z definice na str. 138.

K části II. Výklad o analyse konfliktní situace se opírá o myšlenku, že v komunikativních hrách může vždy dojít alespoň k nezávazné spolupráci. Nekomunikativní hry jsme ponechali stranou. Základním problémem nekomunikativních her je tzv. problém koordinace (termín Schellingův; srovn. [23]). Racionální hráči stojí před otázkou, jak zvolit své strategie, aby dosáhli racionálního výsledku, aniž se mohou navzájem dohovořit. Jak říká Schelling, každý hráč „se snaží uhádnout, co se budou druzí domnívat, jak on sám odhadne to, co se oni domnívají, a tak dále ad infinitum".

Pojem predikce, který je zde vyšetřován poprvé, je v podstatě založen na posledně citované Schellingově myšlence, kde však nevystupují hráči sami, ale nezávislý pozorovatel, který nemá možnost s hráči komunikovat. Ukazuje se, že zde zvolený přístup k problému „řešení" strategických her z hlediska predikce racionálního pozorovatele zahrne všechny v literatuře známé teoretické přístupy jako zvláštní případy.

Pojem predikce je založen na obecnějším pojmu rozhodování za neurčitosti. V literatuře se většinou chápe rozhodování za neurčitosti tak, že rozhodovatel stojí nikoli proti subjektům, ale rozhoduje za neznámých vnějších okolností, jak se říká, jeho oponentem je indiferentní „příroda". Zde jsme pojali rozhodování za neurčitosti v co nejširším smyslu. Přitom se opíráme o poměrně velmi nový výsledek, jímž je teorém o subjektivní pravděpodobnosti. Tento teorém je předznamenán výsledky Savageovými v knize [26], ale v souvislosti zde užité byl dokázán až v roce 1963 v článku [30].

Poznamenejme, že jsme hrám proti přírodě a na nich postaveném pojetí statistického rozhodování nevěnovali pozornost a čtenáře odkazujeme na knihu [27];

stručný úvod do této problematiky nalezne čtenář v knize [19], a to v kapitole věnované rozhodování za neurčitosti, resp. za nejistoty.

Predikce v nekooperativních hrách vede k pojmu rovnovážných vektorů strategií, který byl poprvé zaveden Nashem v [31], [32]. Algoritmy k vyhledání třídy všech rovnovážných vektorů v bimaticových hrách byly udány Vorobjevem a Kuhnem; srovn. [34], [35] a také [36]. Připomeňme, že pod pojmem bimaticová hra se v literatuře obyčejně rozumí jenom hra nekooperativní. Přehledový článek o nekooperativních hrách napsal Vorobjev; srovn. [33].

Jak víme, přechodem od rozvinutého tvaru k normalisovanému tvaru hry neztratíme žádný podstatný údaj potřebný k rozboru konfliktní situace, s výjimkou her s úplnou informací. O tom svědčí teorém o existenci rovnovážných vektorů strategií, které jsou ryzí; tento teorém poprvé dokázal pro hry s úplnou informací Zermelo v práci [1], kde se omezuje sice jenom na hru v šachy, ale jeho metoda zůstává v platnosti i v obecném případě; srovn. [3], [20]. Zermelův důkaz je podrobně proveden v česky psaném článku [16]. Rovněž dokonalou paměť lze využít k vyhledání speciálního typu rovnovážných vektorů strategií, jak ukázal poprvé Kuhn; důkaz a literaturu najde čtenář v [33]. Kvasiantagonistické hry zavedl Aumann pod názvem „almost strictly competitive games"; jeho článek o těchto hrách vyšel v Journ. Soc. Industr. Appl. Math., sv. 9, str. 544–550.

Antagonistické hry o dvou hráčích byly prvním typem her, které byly v literatuře studovány, a je jim doposud věnována největší pozornost. Jak víme, složky rovnovážných vektorů strategií v antagonistických hrách se nazývají optimální strategie. Teorie rovnovážných vektorů a optimálních strategií v antagonistických hrách je v současné době značně rozpracována; nejelementárnější poučení psané zábavnou formou najde čtenář v českém překladu Williamsovy knihy [13]; další česky psaný pramen je překlad [12]. Podrobné poučení o antagonistických hrách podává kniha Dresherova [24]. V souvislosti s lineárním programováním a ekonomickými modely jsou tyto hry probírány v [21] a [22]. Hojně jsou studovány také nekonečné antagonistické hry se spojitými výplatními funkcemi. Rozsáhlou kapitolu tohoto vyšetřování tvoří tzv. diferenciální hry (srovn. monografii [25]); jde tu o matematické modely pronásledování, hry s pohybujícím se objektem apod. Poznamenejme, že v souvislosti s antagonistickými hrami, a nejenom s nimi, se studují tzv. iterace her; jde o opakování partií téže hry a využívání znalostí z minulých partií k volbě dokonalejších strategií v dalších hrách.

Pravidla vyjednávání, na něž jsme se omezili v textu, byly navrženy Nashem a Harsanyim; poslední vyšel z Zeuthenova principu, který byl v poněkud jiných souvislostech navržen v knize [46]; srovn. [45], [47]. Harsanyi navrhl metody vyjednávání jak v kooperativních, tak v nekooperativních hrách; srovn. [48], [49], [38]. Zobecnění Nashova principu z hlediska možných hrozeb subkoalic se zabýval Miyasawa v [50]. Problém arbitráže v nejobecnějším pojetí je řešen v práci [52]; speciální případ Shapleyovy hodnoty byl poprvé uveřejněn v článku [51].

Kolem pojmu von Neumannova řešení a jeho zobecnění existuje rozsáhlá literatura; zde odkazujeme především na základní knihu [3] a na soupis vybrané literatury na toto téma uvedený v připojeném seznamu. Zde bychom se chtěli zmínit, že pojem von Neumannova řešení zobecnil Aumann a Peleg na hry s abstraktní charakteristickou funkcí, tj. na hry bez kompensací; srovn. [55], [56]. Jejich definice je formálně stejná, přičemž se opírá o převedení pojmu dominování do oblasti her s abstraktní charakteristickou funkcí $\mathbf{v}$ touto definicí: výplatní vektor x dominuje výplatní vektor y, když existuje koalice K taková, že $x \in \mathbf{v}(K)$ a $x_i > y_i$ pro všechna $i \in K$.

Pojetí „řešení" hry s číselnou charakteristickou funkcí, které vede k Aumannově-Maschlerově dohodové množině skládající se z podílových konfigurací, zavedli oba autoři v práci [39]. Další příspěvky k tomuto tématu obsahují práce [40] a [41]. Jiné možnosti pojetí „řešení" jako určitého typu rovnováhy jsou uvedeny v článcích [42] a [43]. Článek [44] je věnován pojmu rovnováhy za předpokladu, že jeden a tentýž hráč může být současně členem několika koalic.

Článek [60] obsahuje první netriviální aplikaci pojmu Aumannovy-Maschlerovy dohodové množiny na konkrétní problém z chemického průmyslu. Význam pojmu dohodové množiny záleží mimo jiné také v tom, že tuto množinu lze v principu vždycky zkonstruovat, i když tato konstrukce může být velmi pracná.

Závěrem lze říci, že teorie strategických her je aplikovatelná v každé oblasti, v níž vzniká konflikt zájmů. Základní potíže v aplikacích jsou na jedné straně při vyhledávání empirických dat a na druhé straně v značné pracnosti metod. Teorie sama, jak jsme se mohli přesvědčit při výkladu, má ještě mnoho mezer a nedává ještě na celou řadu otázek uspokojivou odpověď. Avšak i současná teorie může sehrát svou positivní roli, když přestane být doménou jenom matematiků a když pracovníci těch oblastí, v nichž dochází ke konfliktům zájmů, budou sami s porozuměním používat výsledků teorie a z jejího hlediska sbírat potřebná data, jež budou stimulovat další teoretické bádání.

I. Nejstarší práce

[1] Zermelo, E.: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings of the Fifth Intern. Congress of Mathematicians (Cambridge 1912), Cambridge University Press, 1913, 501—504. Ruský překlad ve sborníku [9], 167—172.

[2] von Neumann, J.: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathem. Annalen *100* (1928), 295—230. Anglický překlad ve sborníku [7], 13—42. Ruský překlad ve sborníku [9], 173 až 204.

[3] von Neumann, J.; Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton 1944; 2. vyd. 1947; 3. vyd. 1953. Do němčiny přeloženo r. 1961 (Physica-Verlag, Würzburg).

II. Sborníky

[4] Contributions to the Theory of Games, vol. I. Annals of Math. Study No. 24. Princeton 1950.

[5] Contributions to the Theory of Games, vol. II. Annals of Math. Study No. 28. Princeton 1953.

[6] Contributions to the Theory of Games, vol. III. Annals of Math. Study No. 39. Princeton 1957.

[7] Contributions to the Theory of Games, vol. IV. Annals of Math. Study No. 40. Princeton 1959. Připojena bibliografie z teorie her, cca 1000 bibliografických údajů.

[8] Advances in Game Theory. Annals of Math. Study No. 52. Princeton 1964.

[9] Матричные игры. Ред. Н. Н. Воробьев. Москва 1961.

[10] Бесконечные антагонистические игры. Ред. Н. Н. Воробьев. Москва 1963.

[11] Позиционные игры. Ред. Н. Н. Воробьев. Москва 1967.

III. Česky psané prameny

[12] Blackwell, D., Girshick, M. A.: Teorie her a statistického rozhodování. NČSAV, Praha 1964. Přeloženo z anglického originálu Theory of Games and Statistical Decisions, New York 1954. (Vyšlo též rusky.)

[13] Williams, J. D.: Dokonalý stratég aneb slabikář teorie strategických her. Orbis, Praha 1966. Přeloženo z anglického originálu The Compleat Strategist etc., New York 1954. (Ruský překlad z r. 1960.)

[14] Šubert, B.: O teorii strategických her. Ekonomicko-matematický obzor *3* (1967), 1, 1—28.

[15] Winkelbauer, K.: Strategické hry. Vesmír *43* (1964), 3, 72—74.

[16] Winkelbauer, K.: Šach a teorie her. Ve sborníku Problémy kybernetiky, NČSAV, Praha 1965, 41—67.

[17] Winkelbauer, K.: Strategické hry. Skripta k přednáškám na semináři o teorii her konaném 1.—3. VI. 1966. Přednášeli: B. Šubert a K. Winkelbauer. Vyd. Socialistická akademie (I., II., III. díl), Praha 1967 (rozmnoženo, 172 str.).

IV. Knihy

[18] McKinsey, J. C. C.: Introduction to the Theory of Games. New York 1952. (Též přeloženo do ruštiny.)

[19] Luce, R. D. — Raiffa, H.: Games and Decisions: Introduction and Critical Survey. New York 1957. S rozsáhlou bibliografií. (Též přeloženo do ruštiny.)

[20] Berge, C.: Théorie générale des jeux à *n* personnes. Paris 1957. (Vyšlo též v ruském překladu.)

[21] Karlin, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics. London 1959. (Též v ruském překladu.)
[22] Gale, D.: The Theory of Linear Economic Models. McGraw-Hill, New York 1960.
[23] Schelling, T. C.: The Strategy of Conflict. Cambridge (Mass.), 1960.
[24] Dresher, M.: Games of Strategy: Theory and Applications. Prentice-Hall Appl. Math. Ser., Englewood Cliffs (N. J.), 1961. (Ruský překlad z r. 1964.)
[25] Isaacs, R.: Differential Games. Wiley, New York 1965. (Přeloženo do ruštiny r. 1967.)
[26] Savage, L. J.: The Foundations of Statistics. Wiley, New York 1954.
[27] Wald, A.: Statistical Decision Functions. Wiley, New York 1950.

V. Články

1. Teorie užitku a subjektivní pravděpodobnosti

[28] Fleisher, I.: Numerical Representation of Utility. Journ. Soc. Industr. Appl. Math. *9* (1961), 48—50.
[29] Luce, R. D.: Utility Theory. Mathematics and Social Sciences, Proceedings of the Seminars of Menthon-Saint-Bernard and of Gösing (1960, 1962), Mouton & Co., the Hague 1965, 55—71.
[30] Anscombe, F. J. - Aumann, R. J.: A Definition of Subjective Probability. Ann. Math. Statist. *34* (1963), 199—205.

2. Teorie rovnováhy a nekooperativní hry

[31] Nash, J. F.: Equilibrium Points in n-Person Games. Proc. Nat. Acad. Sci. *36* (1950), 48 až 49.
[32] Nash, J. F.: Non-Cooperative Games. Annals of Mathem. *54*, No. 2 (1951), 286—295.
[33] Воробьев, Н. Н.: Конечные безкоаличные игры. Усп. матем. наук *14* (1959), 21—56.
[34] Воробьев, Н. Н.: Ситуации равновесия в биматричных играх. Теория вероятн. и ее прим *3* (1958), вып. 3, 318—331.
[35] Kuhn, H. W.: An Algorithm for Equilibrium Points in Bimatrix Games. Proc. N.A.S. *47* (1961), 1657—1662.
[36] Lemke, C. E., Howson, J. T. jr.: Equilibrium Points of Bimatrix Games. Journ. Soc. Industr. Appl. Math. *12* (1964), 413—423.
[37] Harsanyi, J. C.: Rationality Postulates for Bargaining Solutions in Cooperative and in Non-Cooperative Games. Management Sci. *9* (1962), 141—153.
[38] Harsanyi, J. C.: A General Solution for Finite Non-Cooperative Games, Based on Risk-Dominance. Ve sborníku [8], 651—679.

3. Pojmy rovnováhy při kooperaci

[39] Aumann, R. J., Maschler, M.: The Bargaining Set for Cooperative Games. Ve sborníku [8], 443—476.
[40] Davis, M., Maschler, M.: Existence of Stable Payoff Configurations for Cooperative Games. Bull. Amer. Math. Soc. *69* (1963), 106—108.
[41] Peleg, B.: Bargaining Sets of Cooperative Games without Side Payments. Israel Journ. Math. *1* (1963), 197—200.
[42] Aumann, R. J.: Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games. Ve sborníku [7], 287—324.
[43] Randström, H.: A Property of Stability Possessed by Certain Imputations. Ve sborníku [8], 513—529.
[44] Воробьев, Н. Н.: О коалиционных играх. Докл. АН СССР 124, (1959), 253—256.

4. Teorie vyjednávání a arbitráže

[45] Nash, J. F.: Two-Person Cooperative Games. Econometrica *21* (1953), 128—140.

[46] Zeuthen, F.: Problems of Monopoly and Economic Warfare. London 1930.

[47] Harsanyi, J. C.: On the Rationality Postulates Underlying the Theory of Cooperative Games. Journ. Conflict Resolution *5* (June 1961), 179—196.

[48] Harsanyi, J. C.: A Bargaining Model for the Cooperative n-Person Game. Ve sborníku [7], 325—355.

[49] Harsanyi, J. C.: A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game. Intern. Econ. Review *4* (1963), 194—220.

[50] Miyasawa, K.: The n-Person Bargaining Game. Ve sborníku [8], 547—575.

[51] Shapley, L. S.: A Value for n-Person Games. Ve sborníku [5], 307—317.

[52] Selten, R.: Valuation of n-Person Games. Ve sborníku [8], 577—626.

5. Von Neumannova řešení a příbuzné pojmy

[53] Gillies, D. B.: Solutions to General Non-Zero Sum Games. Ve sborníku [7], 47—85.

[54] Thrall, R. M., Lucas, W. F.: n-Person Games in Partition Function Form. Naval Res. Logist. Quart. *10* (1963), 281—298.

[55] Aumann, R. J., Peleg, B.: Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments. Bull. Amer. Math. Soc. *66* (1960), 173—179.

[56] Aumann, R. J.: Cooperative Games without Side Payments. Recent Advances in Game Theory, Proceedings of a Princeton University Conference (October 1961), Princeton 1962 (rozmnoženo), 83—99.

[57] Aumann, R. J.: The Core of a Cooperative Game without Side Payments. Trans. Amer. Math. Soc. *98* (1961), 539—552.

[58] Burger, E.: Bemerkungen zum Aumannschen Core-Theorem. Zeitschrft. Wahrscheinlichkeitsth. *3* (1964), 148—153.

[59] Stearns, R. E.: Three-Person Cooperative Games without Side Payments. Ve sborníku [8], 377—406.

[60] Andersen, S. L., Traynor, E. A.: An Application of the Aumann-Maschler n-Person Cooperative Game. Recent Advances in Game Theory, Proceedings of a Princeton Univ. Conf. (October 1961), Princeton 1962 (rozmnož.), 265—270.

OBSAH