

Zařízení s reverzním čítačem jako model homogenního procesu imigrace a emigrace

FRANTIŠEK ZRCEK

Byly vytvořeny a sledovány dva modely markovského procesu typu imigrace – emigrace. Jeden z nich, fyzikální, sleduje a indikuje stav reverzního čítače náhodných impulsů pomocí samočinného počítáče. Druhý, matematický, modeluje tentýž druh procesu metodou Monte Carlo. Jsou předloženy a porovnány získané výsledky.

0. ÚVOD

Při studiu soustav, jejichž chování má náhodný charakter a je natolik složité, že jeho početní zvládnutí je obtížné, se obvykle používá různých fyzikálních nebo matematických modelů.

Jako možný fyzikální model může přijít v úvahu popisované zařízení, využívající reverzního čítače, který, vhodně spojen se samočinným číslicovým počítáčem, umožní imitovat řadu stochastických procesů, zvláště procesů markovského typu.

Nejprve bude popsáno vlastní zařízení, jehož bylo použito k získání experimentálních výsledků. V dalším ukážeme, že toto zařízení samo modeluje jednoduchý markovský homogenní proces imigrace a emigrace.

Odtud vyplývá, že k modelování složitějších stochastických procesů lze využít uvedeného jednoduchého procesu imigrace – emigrace, náležitým způsobem řízeného samočinným počítáčem.

Protože fyzikální model jednoduchého procesu imigrace – emigrace není vždy snadno dosažitelný, zvláště jeho řízení samočinným počítáčem je technicky náročnější, byl současně studován také matematický model tohoto procesu, realizovaný pomocí počítáče metodou Monte Carlo.

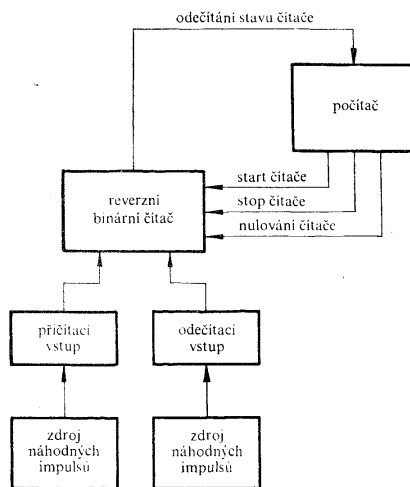
Parametry fyzikálního a matematického modelu byly voleny shodně, aby bylo možno získané výsledky snadno porovnat. Protože realizace procesu fyzikálním modelem je časově dosti náročná, bylo omezení počtu variant řešení, získaných pomocí matematického modelu, dáno především možnostmi experimentální části práce.

1. POPIS ZAŘÍZENÍ

Blokové schéma zařízení, jehož bylo použito k experimentálnímu modelování jednoduchého procesu imigrace – emigrace, je znázorněno na obr. 1.

Na obr. 2 je uvedeno blokové schéma zdroje náhodných impulsů s Poissonovým

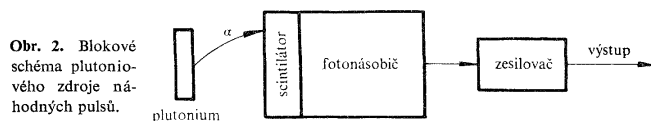
152 rozdělením pravděpodobnosti. Vlastním zdrojem náhodných signálů je plutoniový zdroj částic α . Je to kruhový terčik, zhotovený z hliníkové fólie a pokrytý tenkou vrstvičkou aktivního plutonia, emitujícího částice α .



Obr. 1. Blokové schéma zařízení pro modelování jednoduchého procesu imigrace — emigrace.

Použitý zářič měl intenzitu řádově 10^4 částic/min. Emitovaná částice α se pomocí scintilátoru a fotonásobiče přemění v elektrický signál, který se dále dostatečně zesílí zesilovačem pro další využití.

V zařízení byly instalovány dva zdroje: jeden byl připojen na přičítací vstup reverzního binárního čítače, druhý na jeho odečítací vstup.



Obr. 2. Blokové schéma plutoniového zdroje náhodných pulsů.

Kdykoliv se objevil signál na přičítacím vstupu čítače, jeho stav se o jednotku zvýšil. Signál na odečítacím vstupu vyvolal naopak snížení stavu čítače o jednotku. Čítač byl schopen rozlišit časovou posloupnost dvou za sebou následujících signálů, bez ohledu o jakou kombinaci vstupů se jedná, nenásledovaly-li za sebou v době kratší než $50 \mu\text{s}$.

Uvedená soustava čítače byla ovládána počítačem podle příslušného programu.

Zařízení pracovalo podle tohoto algoritmu:

Binární čítač byl počítačem vynulován a spuštěn (tj. uveden do funkčního stavu, kdy se k počtu již zaznamenaných impulsů přičítají nebo odečítají další přicházející impulsy).

Po uplynutí stanoveného časového intervalu byl čítač počítačem zastaven a zjištěn výsledný počet zaznamenaných impulsů. Tento stav byl připočten k předepsané velikosti počáteční hodnoty počtu prvků soustavy a výsledek zaznamenan do paměti počítače. Pak byl opět nastaven stav čítače na nulovou hodnotu a čítač uveden v činnost na dobu rovnou vzorkovacímu intervalu. Po zastavení čítače byl jeho stav počítačem znovu zjištěn, připočten k poslední zaznamenané hodnotě a opět uložen do paměti počítače.

Tento postup byl při realizaci experimentu zopakován 100krát. Jednotlivé intervaly, během nichž se proces vyvíjel a po jejichž uplynutí byl zjišťován stav čítače, byly dlouhé 0,1 sec.

Po ukončení průběhu procesu přistoupil počítač k jeho zopakování. Celkem byl proces takto zopakován 960-krát.

Nakonec počítač přistoupil k vyhodnocení naměřených dat, tj. k výpočtu průměrných hodnot a středně kvadratických odchylek pro každý ze 100 řádků matice, sestavené z 96 000 naměřených údajů tak, že je tvořena 100 řádky a 960 sloupci.

Proces byl realizován pomocí počítače URAL 2. Celý experiment trval na tomto počítači 3,5 hodiny.

2. CHARAKTER PROCESU MODELOVANÉHO REVERZNÍM ČÍTAČEM

Reverzní čítač s oběma uvedenými zdroji poissonovských náhodných impulsů možno považovat za soustavu, obsahující určité množství částic, jejichž počet se neustále náhodně mění.

Jak známo z literatury (viz např. [5]), pravděpodobnost $p_n(t)$, že počet členů soustavy v čase t dosáhne stavu n , je popsána Kolmogorovovými rovnicemi, které pro uvažovaný případ nabývají tvaru

$$(1) \quad \frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t),$$

pro $n > 0$ a

$$(2) \quad \frac{d}{dt} p_0(t) = \mu p_1(t) - \lambda p_0(t)$$

pro $n = 0$, přičemž $\mu_0 = 0$.

Veličiny λ a μ jsou tzv. intenzitní koeficienty růstu resp. ubývání. V uvažovaném

případě jsou to konstanty nezávislé na čase a na počtu členů soustavy. Pouze pro nulový stav soustavy platí $\mu_0 = 0$, neboť úbytek z nulového stavu není v tomto případě možný.

Rovnice (1) a (2) jsou Kolmogorovovy rovnice pro Erlangův model hromadné obsluhy s jediným obsluhujícím zařízením. Z hlediska zde uvažované aplikace je proces, který popisují, označován jako jednoduchý homogenní proces imigrace – emigrace.

Řešení rovnic (1) a (2) vede k výrazu

$$(3) \quad p_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \left\{ \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{a-n} I_{n-a}[2t\sqrt{(\lambda\mu)}] + \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{a-n+1} I_{n+a+1}[2t\sqrt{(\lambda\mu)}] + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \sum_{k=n+a+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^k I_k[2t\sqrt{(\lambda\mu)}] \right\}.$$

Pro případ, že $\lambda = \mu$, je pravděpodobnost dosažení nulového stavu v čase t

$$(4) \quad p_0(t) = e^{-2\lambda t} [I_a(2\lambda t) + I_{a+1}(2\lambda t)].$$

Výraz pro střední hodnotu počtu částic uvedeného procesu jest

$$(5) \quad M[X_t] = a + (\lambda - \mu)t + \mu a \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^a \int_0^t \left(\frac{t-\tau}{\tau} \right) e^{-(\lambda+\mu)\tau} I_a[2\tau\sqrt{(\lambda\mu)}] d\tau - \lambda(a+1) \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{a+1} \int_0^t \left(\frac{t-\tau}{\tau} \right) e^{-(\lambda+\mu)\tau} I_{a+1}[2\tau\sqrt{(\lambda\mu)}] d\tau.$$

Pro rozptyl platí

$$(6) \quad D[X_t] = \mu'_2 - (M[X_t])^2,$$

kde

$$(5) \quad \mu'_2 = a^2 + \{2a(\lambda - \mu) + (\lambda + \mu)\}t + (\lambda - \mu)^2 t^2 + \mu a \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^a \int_0^t \frac{t-\tau}{\tau} e^{-(\lambda+\mu)\tau} I_a[2\tau\sqrt{(\lambda\mu)}] [(\lambda - \mu)(t - \tau) - 1] d\tau - \lambda(a+1) \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{a+1} \int_0^t \frac{t-\tau}{\tau} e^{-(\lambda+\mu)\tau} I_{a+1}[2\tau\sqrt{(\lambda\mu)}] [(\lambda - \mu)(t - \tau) - 1] d\tau.$$

V rovnicích (3) až (6) značí a počet členů soustavy na počátku procesu (při $t = 0$)

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} I_\nu(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}.$$

V části 1 již bylo uvedeno, že generátor náhodných impulsů využívá plutoniového zdroje částic s Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti.

Jestliže v zařízení podle obr. 1 uzavřeme odečítací vstup čítače, bude stav čítače modelovat Poissonův náhodný proces, který je popsán rovnicemi

$$(7) \quad \frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$

pro $n > 1$ a

$$(8) \quad \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

pro $n = 0$.

Patrně, že rovnice (7) a (8) jsou identické s rovnicemi (1) a (2) pro $\mu = 0$.

Protože oba zdroje náhodných impulsů lze ve funkci zaměnit a jejich působení na čítač je až na znaménko stejné, vidíme, že koeficienty λ a μ našeho procesu jsou v zařízení na obr. 1 fyzikálně realizovány právě těmito zdroji náhodných impulsů.

Velikost obou koeficientů je možno nastavit na požadovanou hodnotu regulováním intenzity proudu částic α , vycházejícího z plutoniového zdroje, např. změnou vzdálenosti plutoniové vrstvy od scintilátoru.

Při nastavování koeficientů λ a μ na předepsanou hodnotu zjišťujeme časový průběh střední hodnoty $M^*[X_t]$ počtu částic zaznamenaných čítačem.

Podle vzorce pro střední hodnotu náhodné veličiny, řídicí se Poissonovým zákonem, stanovíme

$$(9) \quad \lambda = \frac{M^*[X_{t_2}] - M^*[X_{t_1}]}{t_2 - t_1} \quad \text{částic/s,}$$

kde $M^*[X_t]$ je naměřená průměrná hodnota stavu čítače při odpojeném odečítacím vstupu.

Stejným způsobem nastavíme také koeficient μ .

Proces imigrace – emigrace byl realizován za těchto podmínek:

koeficienty λ a μ byly nastaveny na hodnotu $\lambda = \mu = 10$ částic/s;

počáteční hodnota stavu soustavy $a = 10$;

počítačem bylo provedeno vzorkování soustavy v pravidelných časových intervalech 0,1 sec;

každý jednotlivý proces byl zakončen po odebrání 100 vzorků;

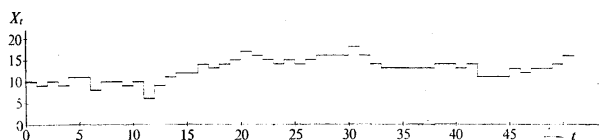
celkový počet opakování procesu byl 960;

156 z 960 hodnot X , získaných v každém ze 100 vzorkování, byla vypočtena průměrná hodnota

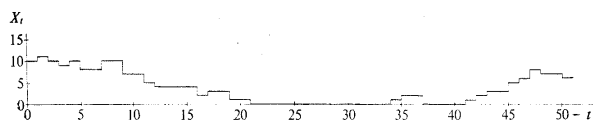
$$(10) \quad M^*[X] = \frac{1}{960} \sum_{k=1}^{960} X_k$$

a střední kvadratická odchylka

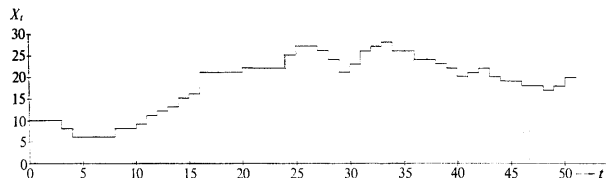
$$(11) \quad \sigma^* = \sqrt{\left[\frac{1}{960} \sum_{k=1}^{960} (X_k - M^*[X])^2 \right]}$$



Obr. 3. Průběh jednoduchého homogenního procesu vzniku a zániku získaný pomocí zařízení s reverzním čítačem. Vzorkovací interval 1 rel. čas. jedn.; $\lambda = \mu = 1$ částice/rel. čas. jedn.



Obr. 4. Průběh s nulovými stavy jednoduchého homogenního procesu vzniku a zániku získaný pomocí zařízení s reverzním čítačem. Vzorkovací interval 1 rel. čas. jedn.; $\lambda = \mu = 1$ částice/rel. čas. jedn.



Obr. 5. Jeden z průběhů jednoduchého homogenního procesu vzniku a zániku, který dosahoval vysoké početnosti členů soustavy. Získán pomocí zařízení s reverzním čítačem. Vzorkovací interval 1 rel. čas. jedn.; $\lambda = \mu = 1$ částice/rel. čas. jedn.

Na obrázcích 3, 4 a 5 jsou uvedeny 3 ukázky časového vývoje pozorované fyzikální soustavy. Bylo zde použito relativního časového měřítka, které bere za jednotku času 0,1 s, takže je možno považovat za hodnoty koeficientů $\lambda = \mu = 1$. Počet

částic zjištěný v jednotlivých pozorovacích intervalech se zde samozřejmě může navzájem lišit více než o jednotku.

Relativní časové měřítko bylo zavedeno za účelem získání možnosti srovnávat výsledky fyzikálního modelu s matematickým modelem.

Průměrné hodnoty a střední kvadratické odchylky jsou vyneseny v tabulce 5, pod označením „fyzikální model“.

Všechny hodnoty jsou uváděny pouze do $T = 50$ relativních časových jednotek.

4. REALIZACE JEDNODUCHÉHO HOMOGENNÍHO PROCESU IMIGRACE — EMIGRACE METODOU MONTE CARLO

Rovnice (1) a (2) definují zákonitost, jíž se řídí fyzikální soustava, reprezentovaná popsaným zařízením s reverzním čítačem. Byl učiněn pokus porovnat chování matematického modelu soustavy, konstruovaného na základě rovnic (1) a (2), s výsledky dosaženými experimentálními vyšetřováními fyzikálního modelu.

Při sledování funkce matematického modelu metodou Monte Carlo bylo postupováno způsobem známým z literatury.

V podstatě jde o konstrukci dvou pomocných náhodných veličin, z nichž jedna představuje časový interval S náhodné délky, zakončený změnou stavu soustavy, a druhá z nich, V , nabývá hodnoty 1, značí-li uvedená změna přírůstek početního stavu členů soustavy o jednotku, nebo hodnoty 0, je-li uvedená změna úbytkem stavu o jednotku.

Zavedeme-li výraz $q_n(t + s)$ jako pravděpodobnost, že soustava setrvává v čase $(t + s)$ ve stavu n , jestliže se v tomto stavu nacházela už v čase t , platí

$$q_n(t + s) = e^{-(\lambda + \mu)s}.$$

Vzhledem k významu $q_n(t + s)$ lze psát

$$P\{S \leq s\} = 1 - e^{-(\lambda + \mu)s}.$$

Pro distribuční funkci náhodné proměnné S tedy platí

$$(12) \quad F(s) = 1 - e^{-(\lambda + \mu)s}.$$

Zavedme pomocnou náhodnou proměnnou X takovou, že

$$S = \frac{X}{2(\lambda + \mu)}.$$

Protože

$$P\left\{\frac{X}{2(\lambda + \mu)} \leq \frac{X}{2(\lambda + \mu)}\right\} = P\{X \leq x\} = 1 - e^{-x/2},$$

158 je distribuční funkce náhodné proměnné X

$$F(x) = 1 - e^{-x/2}$$

a hustota pravděpodobnosti

$$(13) \quad \varphi(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{2} e^{-x/2}.$$

Jestliže porovnáme (13) s výrazem pro hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny χ^2 , vidíme, že naše náhodná proměnná S má stejné rozdělení pravděpodobnosti jako náhodná veličina $\chi^2/[2(\lambda + \mu)]$ pro χ^2 se dvěma stupni volnosti.

Ke konstrukci intervalů S náhodné délky použijeme výraz pro hustotu pravděpodobnosti $\varphi(s)$, plynoucí z (12)

$$\varphi(s) = (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)s}.$$

Zavedeme náhodnou proměnnou σ ,

$$\sigma = \frac{\varphi(s)}{\lambda + \mu} = e^{-(\lambda + \mu)s},$$

kteřá nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ se stejnou pravděpodobností.

Náhodně zvolená hodnota σ_i z tohoto intervalu, např. podle tabulek náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti, pak umožní vyčíslit délku intervalu

$$s_i = \frac{1}{\lambda + \mu} \ln \frac{1}{\sigma_i}.$$

Pravděpodobnost, že probíhající interval S bude zakončen příchodem nové částice, je

$$P\{V = 1\} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Pravděpodobnost zakončení intervalu S zánikem

$$P\{V = 0\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Při realizaci matematického modelu bylo postupováno tak, aby výsledky byly snadno srovnatelné s výsledky docílenými s fyzikálním modelem.

K sestavení programu pro počítač bylo použito tohoto algoritmu:

Pomocí podprogramu generátoru náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením bylo počítačem stanoveno náhodné číslo z intervalu $\langle 0; 0,999 \dots \rangle$ a vypočtena délka

náhodného intervalu S

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sigma}$$

pro $\lambda = \mu = 1$.

Vzhledem k tomu, že pro dané $\lambda = \mu = 1$ byla $P\{V = 1\} = P\{V = 0\} = 1/2$, počítač dále zjistil, zda je

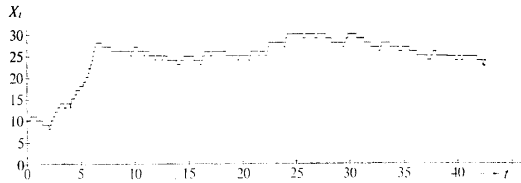
$$0,5 \leq \sigma < 0,999 \dots$$

a podle výsledku tohoto zjištění přičetl nebo odečetl jedničku od posledního početního stavu soustavy. Počáteční hodnota stavu soustavy byla 10.

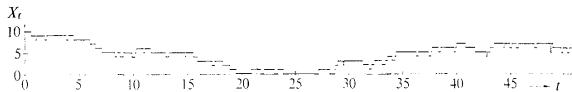
Počet jednotlivých kroků od změny stavu soustavy k následující změně při konstrukci časového průběhu jednoho procesu byl 100.

Celkem bylo počítačem provedeno 960 těchto konstrukcí.

Závěrem byl počítačem proveden výpočet průměrných hodnot stavů soustavy, středních kvadratických odchylek stavů soustavy od střední hodnoty a průměrných hodnot délek časových intervalů S .



Obr. 6. Průběh jednoduchého homogenního procesu vzniku a zániku, získaný metodou Monte Carlo. Časové měřítko v relat. čas. jednotkách; $\lambda = \mu = 1$.



Obr. 7. Průběh s nulovými stavy jednoduchého homogenního procesu vzniku a zániku, získaný metodou Monte Carlo. Časové měřítko v relat. čas. jednotkách; $\lambda = \mu = 1$.

Podrobný záznam časového průběhu procesu byl proveden u 50 prvých opakování. Dva z těchto záznamů byly vybrány na ukázkou a vyneseny do obrázků 6 a 7. Charakter těchto grafů se poněkud liší od záznamů časového vývoje procesů získaných fyzikálním modelem v obrázcích 3, 4 a 5, neboť zde je vývoj procesu sledován od jedné změny stavu k následující. Tomu odpovídá také časový záznam.

Na obrázku 7 je záznam procesu během něhož došlo k nulovému stavu.*

Pro kontrolu náhodnosti průběhu procesu, uvedeného na obr. 6, bylo 99 změn stavu soustavy rozděleno do 4 skupin podle tabulky 1. (V – vznik, Z – zánik). Test udává $\chi^2 = 3,46$ při 3 stupních volnosti, což je dostačující.

Tabulka 1.

Typ změny stavu	V Z	Z V	V V	Z Z
Předpokládaný výskyt	24,75	24,75	24,75	24,75
Skutečný výskyt	24	24	32	19

Pro kontrolu náhodnosti proměnné délky intervalu S u průběhu uvedeného na obr. 6 byly vyskytnuvší se délky intervalů rozděleny do 6 skupin. Předpokládaný výskyt pro každou skupinu byl stanoven v soulase s rov. (21); viz tab. 2.

Tabulka 2.

Interval S (rel. čas. jedn.)	Předpokládaný výskyt	Skutečný výskyt
0 — 0,15	25,9	29
0,15 — 0,30	19,2	22
0,30 — 0,45	14,2	12
0,45 — 0,60	10,6	12
0,60 — 0,90	13,6	12
0,90	16,5	13

Tabulka 3.

Typ změny stavu	V Z	Z V	V V	Z Z
Předpokládaný výskyt	23,5	23,5	23,5	23,5
Skutečný výskyt	34	35	11	14

* V příkladech uvedených v obrázcích 3, 4, 5, 6 a 7 byla doba trvání procesu omezena na časový interval $T = 0$ až $T = 50$. Počáteční hodnota stavu soustavy měla hodnotu 10 částic.

V tomto případě je $\chi^2 = 2,23$ při 5 stupních volnosti. Výskyt časových intervalů S zde tedy velmi dobře souhlasí s předpokládaným rozdělením.

Z celkového počtu 50 podrobně sledovaných procesů byl vybrán proces uvedený na obr. 7 jako příklad případu, který se testem χ^2 zamítá.

Změny stavů soustavy, jichž zde bylo 94, byly také v tomto případě rozděleny do stejných skupin jako prve; viz tab. 3. Pro tento případ dostáváme $\chi^2 = 20,8$.

Tabulka 4.

Interval S (rel. čas. jedn.)	Předpokládaný výskyt	Skutečný výskyt
0 — 0,15	24,6	22
0,15 — 0,30	18,2	17
0,30 — 0,45	13,5	11
0,45 — 0,60	10,1	14
0,60 — 1,050	17	16
1,050	11,6	15

Z hlediska rozdělení pravděpodobnosti výskytu náhodných délek časových intervalů mezi změnami stavů zjišťujeme pro tento případ hodnotu $\chi^2 = 2,235$ při 5 stupních volnosti. Výskyt intervalů je v tabulce 4. Výsledek testu opět ukazuje na velmi dobrou shodu s pravděpodobným rozdělením intervalových délek.

Tabulka 5.

T rel. čas. jedn.	Průměrné hodnoty počtu prvků soustavy		Střední kvadratická odchylka		Relativní diference průměrných hodnot %	Relativní diference středních kvadrat. odchylek %
	fyzikální model	matemat. model	fyzikální model	matemat. model		
0	10	10	—	—		
1	9,918	9,999	1,657	1,514	-0,81	8,64
5	9,754	10,178	3,488	3,356	-4,39	3,78
10	9,831	10,284	4,849	4,666	-4,61	3,77
15	9,728	10,464	5,770	5,500	-7,56	4,69
20	9,877	10,450	6,503	6,140	-5,81	5,58
25	9,999	10,585	6,960	6,565	-5,86	5,67
30	10,198	10,736	7,487	6,905	-5,32	7,8
35	10,127	11,001	8,023	7,257	-8,62	9,55
40	10,318	11,225	8,279	7,404	-8,87	10,55
45	10,500	11,514	8,628	7,639	-9,67	11,45
50	10,752	11,804	9,658	7,905	-9,77	18,15

Průměrné hodnoty a střední kvadratické odchylky, které byly počítačem vyčísleny z dat získaných o průběhu všech 960 jednotlivých procesů, byly použity v tabulce 5 ke zjištění, jak se matematický model chová ve srovnání s fyzikálním modelem. Vyčíslené relativní diference v procentech byly vztaheny k výsledkům, získaným fyzikálním modelem. Pro uvažovanou dobu trvání procesu (50 relativních časových jednotek) je shoda ve výsledcích, získaných oběma druhy modelů, dostačující.

Závěrem autor vyslovuje svůj dík docentu dr. ing. J. Benešovi, DrSc za četné podnětné připomínky a členu korespondentu prof. dr. V. Petržílkovi za laskavé zapůjčení reverzního čítače s plutoniovými zdroji, konstruovaného na katedře jaderné fyziky, Fakulty technické a jaderné fyziky ČVUT v Praze.

(Došlo dne 11. srpna 1967.)

LITERATURA

- [1] J. Beneš: Statistická dynamika regulačních obvodů. SNTL, Praha 1961.
- [2] A. T. Bharucha-Reid: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. McGraw-Hill Book Co., London 1960.
- [3] H. Lahres: Einführung in die diskreten Markoff-Prozesse und ihre Anwendungen. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1964.
- [4] D. G. Kendall: An Artificial Realization of a Simple „Birth-and-Death“ Process. Journal of the Royal Statistical Society, ser. B. *XII* (1950), 1, 116–119.
- [5] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I. New York 1950.

SUMMARY

A Model of Homogeneous Immigration — Emigration Process Using a Binary Revers Counter

FRANTIŠEK ZRCEK

A reverse binary counter of random pulses, connected in a special manner with a digital computer, creates a physical system, which can be a suitable model of a number of stochastic processes.

It has been shown that the system of a binary reverse counter, connected with two Poisson random pulses generators, presents a model of a simple Markov homogeneous immigration — emigration process.

The development of the above mentioned process has been followed and indicated by a computer. The results of several experiments have been plotted. The results of

the whole number of 960 realized experiments have been used to derive a basic statistical information. **163**

Besides, there have been realized 960 mathematical models of the process of the same type as well as parameters by means of Monte Carlo method, and the statistical results thus obtained have been compared with the preceding ones. Two of the processes derived by means of mathematical model have been shown in a graph.

Ing. František Zrcek, Ústav výpočtové techniky ČSAV a ČVUT, Horská 3, Praha 2.