KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 4/1968

O jednom modelu hromadné obsluhy

PŘEMYSL DASTYCH

Stacionární vstupní i výstupní procesy jsou definovány pomocí pravděpodobnosti obsluhování. Přihlíží se k tomu, že obecně nelze čas stanoviště dokonale využít k obsluze. Počet stanovišť v soustavě i počet vstupů každého stanoviště může být libovolný.

1. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH A VÝSTUPNÍCH PROCESŮ. PROUD

V odborné literatuře se setkáváme s těmito způsoby matematického modelování vstupních (příchozích) a výstupních (odchozích) procesů:

1. Je dáno
   a) rozdělení pravděpodobnosti, že v daném časovém intervalu nastane jeden, dva, tři, atd. požadavky. Sem lze zahrnout nejen případ, kdy je vyjádřeno, kolik zákazníků přijde v kterém okamžiku, nýbrž i způsob vyjádření, kolik zákazníků přijde v libovolně vybraném intervalu času.
   b) rozdělení pravděpodobnosti délky doby obsluhy.
2. Je dáno
   a) rozdělení pravděpodobnosti délky mezipříchodových intervalů, tj. časových intervalů mezi příchody dvou po sobě bezprostředně následujících zákazníků.
   b) rozdělení pravděpodobnosti délky doby obsluhy. Např. [1] až [4].

Všechny tyto způsoby se vyznačují tím, že k vyjádření např. příchozího procesu je třeba dvou pravděpodobnostních rozdělení. Zde bude uveden takový způsob modelování vstupního procesu i výstupního procesu, při kterém vystačíme s jediným rozdělením. Pro jednoduchost vyjadřování budeme někdy pro vstupní proces i výstupní proces užívat společného označení „proud" dob obsluhy.

Definice 1. Budiž dán rozklad (B) daného intervalu času T o velikosti (délce) $|T|$ na systém b_B podintervalů T_c navzájem disjunktních. Pořadí každého z těchto podintervalů přiřadíme jedno a jen jedno přirozené číslo $c = 1, 2, \ldots, b_B$. Jejich spojením je

$$\bigcup_c T_c = T$$

a průnikem je

$$\bigcap_c T_c = \emptyset\,,$$

kde $\emptyset$ je prázdná množina. Potom nechť je vybrán

a) buď jen každý sudý z těch podintervalů,

b) nebo jen každý lichý z těch podintervalů,

a není-li zároveň prvním ani posledním (b_B-tým) z těch podintervalů, nechť je modelem jedné realizace doby obsluhy. Jestliže vybraný podinterval je buď prvním nebo posledním v intervalu T, nechť je modelem části jedné realizace doby obsluhy. Každý nevybraný interval, jestliže není ani prvním ani posledním z uvedených podintervalů, nechť je modelem jedné realizace mezery mezi dobami obsluhy. Je-li nevybraný podinterval buď prvním nebo posledním v intervalu T, budiž modelem části jedné realizace mezery. Uspořádanou množinu vybraným podintervalů nazveme modelem jedné realizace proudu dob obsluhy v intervalu T. Uspořádanou množinu nevybraných podintervalů nazveme modelem jedné realizace proudu mezer v intervalu T.

Definice 2. Budiž $\alpha_c^{(B)} \in T$ počátečním bodem a $\beta_c^{(B)} \in T$ koncovým bodem intervalu T_c v rozkladu B. Nechť B, D jsou dva rozklady intervalu T. Pak každé dva rozklady intervalu T nazveme navzájem různými, jestliže aspoň pro jeden z podintervalů T_c platí aspoň jeden z těchto dvou vztahů:

$$\alpha_c^{(B)} \neq \alpha_c^{(D)}\,,$$

$$\beta_c^{(B)} \neq \beta_c^{(D)}\,.$$

Definice 3. Budiž dána určitá množina R rozkladů podle definice 2, ze kterých aspoň některé jsou navzájem různé. Budiž dále $H(t)$ pravděpodobnost, že v množině R diferenciální interval času $(t, t + \mathrm{d}t\rangle \subset T$, kde $t \in T$, $|\mathrm{d}t| \ll |T_c|$, je částí některého z vybraných podintervalů T_c. Pak množinu R rozkladů nazveme modelem proudu dob obsluhy v intervalu T, a pokud to nepovede k omylu, jen stručně proudem. Pravděpodobnost $H(t)$ nazveme pravděpodobnost obsluhování v tom proudu a v tom intervalu času.

Definice 4. Nechť je dána množina R rozkladů podle definice 3 taková, že pravděpodobnost $H(t)$ nezávisí na t, tj.

$$H(t_1, \mathrm{d}t) = H(t_2, \mathrm{d}t) = H\,, \tag{1}$$

kde

$$t_1 \neq t_2\,, \quad t_1 \in T\,, \quad t_2 \in T\,.$$

Každou takovou množinu R nazveme modelem proudu dob obsluhy stacionárního v intervalu T, a pokud nebude nebezpečí omylu, jen stručně stacionárním proudem.

Poznámka 1. Je zřejmě, že proud podle definice 3 se vyznačuje ordinárností. Pravděpodobnost trvání dvou nebo více dob obsluhy téže realizace proudu dob obsluhy v libovolném témže okamžiku $t \in T$ se rovná nule.

Poznámka 2. Pravděpodobnost obsluhování ve stacionárním ordinárním proudu je možno definovat také jako poměr střední velikosti součtu všech délek dob obsluhy nebo jejich částí v libovolném intervalu času (T) k velikosti toho intervalu

$$H = \frac{\sum |T_{c_1}|}{|T|},$$

kde c_1 je buď jen sudé nebo jen liché.

Poznámka 3. Abychom vyjadřování co nejvíce zjednodušili, budeme pro pravděpodobnost obsluhování používat i jiných symbolů, např. x, y, z, ξ, N.

2. MODEL STANOVIŠTĚ. VYUŽITELNOST STANOVIŠTĚ

Obecně využití stanoviště pro doby obsluhy nemůže dosáhnout celých sto procent uvažovaného intervalu času T. S obdobou této vlastnosti se však setkáme i jinde, např. v problému parkování [5], nebo při náhodném zaplňování prostoru, např. jednorozměrného intervalu ([6], [7]) nebo i jiných problémech ekvivalentních pro některé aplikace.

Definice 5. Nechť je dána množina (M) určitých podintervalů $T_\gamma \subset T(\gamma = 1, 2, \ldots \ldots, \delta)$ o velikostech $|T_\gamma|$. (Nepředpokládáme nic o tom, zda ty velikosti jsou stejné nebo různé.) Budiž ϑ_γ okamžik náhodně vybraný z intervalu T. Každému z podintervalů T_γ, jednomu po druhém v pořadí podle γ, se pokusíme přiřadit příslušný okamžik ϑ_γ tak, že může být buď počátečním bodem (α_γ) intervalu o velikosti $|T_\gamma|$, tj. $\vartheta_\gamma \equiv \alpha_\gamma$, nebo koncovým bodem (β_γ) toho intervalu, tj. $\vartheta_\gamma \equiv \beta_\gamma$. Předpokládejme, že již $\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \delta)$ podintervalů se tímto postupem podařilo přiřadit tak, aby po tomto přiřazení byly navzájem disjunktní. Každý další podinterval lze uvedeným postupem přiřadit jen tehdy, když se ani zčásti nepřekrývá se žádným z $\varkappa$ podintervalů již přiřazených. Potom nechť g_M je největším součtem všech podintervalů, které se tímto postupem ještě podařilo přiřadit. Veličina g_M pro každou realizaci takového postupu je zřejmě náhodná. Nechť $\bar{g}_M$ je pravděpodobná střední hodnota veličiny g_M. Pak poměr

$$\frac{|\bar{g}_M|}{|T|} = {}^kN_M \tag{2}$$

nazveme kritická pravděpodobnost obsluhování stanovištěm ${}^kS$ pro množinu M, neboli využitelnost stanoviště.

Poznámka 4. Z definice 5 plyne, že stanoviště podle tohoto modelu, může v kterémkoliv okamžiku $t \in T$ obsluhovat nejvýše jednoho zájemce, tj. uskutečňovat nejvýše jednu požadovanou dobu obsluhy. Hodnota ${}^kN_M$ může být pro jednotlivé aplikace také stanovena empiricky.

3. MODEL ZÁKLADNÍHO PROCESU OBSLUHY

Pokud to nepovede k možnosti omylu, budeme při popisování procesu obsluhy vícenásobné indexy psát tak, abychom vystačili s jedinou řádkou horních indexů a jedinou řádkou dolních indexů. Např. místo dolního indexu n_k budeme psát dolní index (n, k).

Definice 6. Proces obsluhy nechť má tyto základní vlastnosti:

1. Soustava hromadné obsluhy se skládá z w $(w = 1, 2, \ldots)$ stanovišť obsluhy ${}^kS$, kde $k = 1, 2, \ldots, w$.

2. Ke k-tému stanovišti ${}^kS$ přichází n_k proudů požadavků obsluhy $(n_k = 0, 1, 2, \ldots;$ $m = 0, 1, 2, \ldots, n_k)$.

Nechť tyto proudy jsou stacionární:

Proud ${}^kX_1$	s pravděpodobností obsluhováni ${}^kx_1$,	
proud ${}^kX_2$	s pravděpodobností obsluhování ${}^kx_2$,	atd.
proud ${}^kX_m$	s pravděpodobností obsluhování ${}^kx_m$,	atd., až
proud ${}^kX_{(n,k)}$	s pravděpodobností obsluhování ${}^kx_{(n,k)}$.	

Množinu všech proudů přicházejících ke k-tému stanovišti ${}^kS$ nazveme zatížením toho stanoviště a označme symbolem ${}^kX^{(0)}$:

$$ {}^kX^{(0)} \equiv \left({}^kX_1, \ldots, {}^kX_m, \ldots, {}^kX_{(n,k)}\right). \tag{3} $$

Poznámka 5. Proud, který je výstupním proudem pro jedno stanoviště, může být vstupním proudem pro jiné stanoviště, a naopak.

3. Každý proud ${}^kX_m \equiv {}^kX_m^{(0)}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^kx_m = {}^kx_m^{(0)}$, přicházející ke stanovišti ${}^kS$ se skládá ze dvou složek:

a) ze složky ${}^kY_m^{(0)} \equiv {}^kY_m^{[0]}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^ky_m^{(0)} = {}^ky_m^{[0]}$, tvořené proudem požadovaných dob obsluhy, kterým v procesu obsluhy je tím stanovištěm vyhověno ihned po jejich příchodu;

b) ze složky ${}^kZ_m^{(0)}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^kz_m^{(0)}$, tvořené proudem požadovaných dob obsluhy, kterým hned po jejich příchodu vyhověno není:

$$ \begin{aligned} &{}^kX_m^{(0)} = {}^kY_m^{(0)} \cup {}^kZ_m^{(0)}, \\ &{}^kY_m^{(0)} \cap {}^kZ_m^{(0)} = \emptyset. \end{aligned} \tag{4} $$

(Význam pravého horního indexu bude uveden v následujícím.) Všechny proudy ${}^kY_m^{(0)}$ požadovaných dob obsluhy, kterým stanoviště ${}^kS$ vyhoví ihned po jejich příchodu, tvoří výsledný proud ${}^kY^{(0)}$ (s pravděpodobností obsluhování ${}^ky^{(0)}$) dob obsluhy ihned uskutečněných tím stanovištěm:

$$(5) \qquad {}^kY^{(0)} = \bigcup_{m=1}^{(n,k)} {}^kY_m^{(0)} .$$

Všechny proudy ${}^kZ_m^{(0)}$ těch požadovaných dob obsluhy, kterým stanoviště ${}^kS$ nevyhovělo ihned po jejich příchodu, tvoří množinu ${}^kZ^{(0)}$ neobsloužených složek:

$$(6) \qquad {}^kZ^{(0)} \equiv \left({}^kZ_1^{(0)}, \ldots, {}^kZ_{(n,k)}^{(0)}\right) .$$

4. Obecně proudy ${}^kZ_m^{(0)}$ z množiny ${}^kZ^{(0)}$ opakují své požadavky, dokud nejsou uspokojeny (pořadí opakování značíme pravým horním indexem).

4.1 *První opakování požadavku*: Každý proud ${}^kZ_m^{(0)} \equiv {}^kX_m^{(1)}$, čekající na uvolnění stanoviště, se skládá ze dvou složek:

a) ze složky ${}^kY_m^{[1]}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^ky_m^{[1]}$, tvořené proudem těch požadovaných dob obsluhy, kterým právě po prvním čekání (prvním opakování požadavku) bylo vyhověno,

b) ze složky ${}^kZ_m^{(1)}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^kz_m^{(1)}$, tvořené proudem těch požadovaných dob obsluhy, kterým ani po tomto prvním čekání nebylo vyhověno:

$$(7) \qquad {}^kX_m^{(1)} = {}^kY_m^{[1]} \cup {}^kZ_m^{(1)} ,$$
$${}^kY_m^{[1]} \cap {}^kZ_m^{(1)} = \varnothing .$$

Všechny proudy požadovaných dob obsluhy, kterým stanoviště ${}^kS$ vyhoví buď ihned po jejich příchodu (nultém opakování) nebo ihned po prvním opakování požadavků, tvoří výsledný proud obsluhy ${}^kY^{(1)}$ s pravděpodobností obsluhování ${}^ky^{(1)}$. Z proudu ${}^kX_m$ je do prvního opakování včetně stanovištěm obsloužena část ${}^kY_m^{(1)}$ s pravděpodobností obsluhování ${}^ky_m^{(1)}$.

$$(8) \qquad {}^kY^{(1)} = \bigcup_{m=1}^{(n,k)} {}^kY_m^{(1)} ,$$

$$(9) \qquad {}^kX_m^{(0)} = {}^kY_m^{(1)} \cup {}^kZ_m^{(1)} ,$$
$${}^kY_m^{(1)} \cap {}^kZ_m^{(1)} = \emptyset ,$$

$$(10) \qquad {}^kY_m^{(1)} = {}^kY_m^{[0]} \cup {}^kY_m^{[1]} ,$$
$${}^kY_m^{[0]} \cap {}^kY_m^{[1]} = \emptyset .$$

4.2 *Opakování h-té* $(h = 0, 1, 2, \ldots)$: Každý proud

$$(11) \qquad {}^kZ_m^{(h-1)} \equiv {}^kX_m^{(h)} ,$$

$$(12) \qquad {}^kz_m^{(h-1)} = {}^kx_m^{(h)} ,$$

čekající na uvolnění stanoviště, se skládá ze dvou složek:

a) ze složky ${}^kY_m^{[h]}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^ky_m^{[h]}$, tvořené proudem těch požadovaných dob obsluhy, kterým právě po h-tém čekání (h-tém opakování požadavků) bylo vyhověno,

b) ze složky ${}^kZ_m^{(h)}$, s pravděpodobností obsluhování ${}^kz_m^{(h)}$, tvořené proudem těch požadovaných dob obsluhy, kterým ani po tomto h-tém čekání nebylo vyhověno:

$$(13) \qquad {}^kX_m^{(h)} = {}^kY_m^{[h]} \cup {}^kZ_m^{(h)} ,$$

$${}^kY_m^{[h]} \cap {}^kZ_m^{(h)} = \emptyset .$$

Všechny proudy požadovaných dob obsluhy, kterým stanoviště ${}^kS$ vyhoví nejpozději ihned po h-tém opakování požadavků, tvoří výsledný proud obsluhy ${}^kY^{(h)}$ s pravděpodobností obsluhování ${}^ky^{(h)}$, bez ohledu na to, z kterého z příchozích proudů je požadavek obsluhován.

Z proudu ${}^kX_m$ je do h-tého opakování včetně stanovištěm obsloužena část ${}^kY_m^{(h)}$ s pravděpodobností obsluhování ${}^ky_m^{(h)}$:

$${}^kY^{(h)} = \bigcup_{m=1}^{(n,k)} {}^kY_m^{(h)} ,$$

$$(14) \qquad {}^kX_m^{(0)} = {}^kY_m^{(h)} \cup {}^kZ_m^{(h)} ,$$

$$(15) \qquad {}^kY_m^{(h)} \cap {}^kZ_m^{(h)} = \emptyset ,$$

$$(16) \qquad {}^kY_m^{(h)} = \bigcup_{v=0}^{h} {}^kY_m^{[v]} ; \quad v = 0, 1, \ldots, h ;$$

$${}^kY_m^{[v+1]} \cap {}^kY_m^{[v]} = \emptyset .$$

Všechny proudy ${}^kZ_m^{(h)}$ těch požadovaných dob obsluhy, kterým stanoviště ${}^kS$ nevyhovělo ani ihned po h-tém opakování, tvoří množinu ${}^kZ^{(h)}$:

$$(17) \qquad {}^kZ^{(h)} \equiv \left({}^kZ_1^{(h)}, \ldots, {}^kZ_m^{(h)}, \ldots, {}^kZ_{(n,k)}^{(h)}\right) .$$

Poznámka 6. Z definice 6 je zřejmé, že v základním procesu obsluhy nejsou uvažovány takové přednosti v témže proudu ani taková přebíhání z jednoho proudu do druhého atd., kterými se v průběhu procesu obsluhy mění pravděpodobnosti obsluhování v uvažovaných proudech. Proto základním procesem obsluhy je každý takový proces obsluhy, při kterém pravděpodobnosti obsluhování v proudech podle definice zůstávají konstantními v intervalu T.

Věta 1. *Nechť je dán proces obsluhy podle definice 6. Potom*

$$ {}^k x_m = {}^k y_m^{(h)} + {}^k z_m^{(h)} , \tag{18} $$

$$ {}^k y^{(h)} = \sum_{m=1}^{(n,k)} {}^k y_m^{(h)} . \tag{19} $$

Důkaz je nasnadě, protože na pravé straně každé z uvedených rovností jde o pravděpodobnosti jevů navzájem se vylučujících.

Věta 2. *Budiž ${}^kX$ množina všech proudů přicházejících ke stanovišti ${}^kS$ ať při prvním nebo při opakovaném požádání, uspořádaná takto:*

$$ {}^kX \equiv ({}^kX_1^{(0)}, \ldots, {}^kX_{(n,k)}^{(0)}; {}^kX_1^{(1)}, \ldots, {}^kX_{(n,k)}^{(1)}; \ldots; {}^kX_1^{(h)}, \ldots, {}^kX_{(n,k)}^{(h)}; \ldots) \tag{20} $$

pro $h = 0, 1, 2, \ldots$ Nechť ${}^k\xi_\varphi$ je pravděpodobnost obsluhování v libovolném proudu ${}^k\Xi_\varphi$-té množiny:

$$ {}^k\Xi_\varphi \in {}^kX , \tag{21} $$

kde

$$ \varphi = 1, 2, \ldots, (h + 1)\, n_k . $$

Budiž ${}^ky_{[\varphi]}$ pravděpodobnost obsluhování v proudu ${}^kY_{[\varphi]}$ požadavků obsloužených stanovištěm ${}^kS$ a vytvořeného jen prvými φ z proudů té množiny ${}^kX$, tj. jen proudy $\Xi_1, \ldots, \Xi_\varphi$. Potom pro libovolnou permutaci přicházejících proudů, tj. pro libovolnou permutaci dolních indexů veličin ${}^k\xi_1, \ldots, {}^k\xi_{\varphi+1}$, shodně platí

$$ {}^ky_{[\varphi+1]} = {}^ky_{[\varphi]} + ({}^kN_M - {}^ky_{[\varphi]})\, {}^k\xi_{\varphi+1} , \tag{22} $$

kde

$$ {}^ky_{[0]} = 0 , \quad {}^ky_{[(h+1)(n,k)]} = {}^ky^{(h)} . \tag{23} $$

Důkaz lze provést úplnou indukcí. Výsledkem je symetrická funkce typu

$$ {}^ky_{[\varphi+1]} = {}^kN_M\Big[\sum_{(i,1)} {}^k\xi_{(i,1)} - \sum_{(i,1),(i,2)} {}^k\xi_{(i,1)}\, {}^k\xi_{(i,2)} + $$
$$ + \sum_{(i,1),(i,2),(i,3)} {}^k\xi_{(i,1)}\, {}^k\xi_{(i,2)}\, {}^k\xi_{(i,3)} - \ldots + (-1)^\varphi\, {}^k\xi_1\, {}^k\xi_2 \ldots {}^k\xi_{\varphi+1} \Big] , $$

kde indexy $(i, 1)$, $(i, 2)$, atd. se vztahují ke všem kombinacím z prvků $1, 2, \ldots, \varphi + 1$.

Poznámka 7. Hodnotu veličiny ${}^ky^{(h)}$ při výpočtu můžeme kontrolovat tím, že na dolní indexy pravděpodobností ${}^k\xi_\varphi$ provedeme permutaci, takto uspořádané pravděpodobnosti odlišíme např. čárkami (${}^kx_1'$, ${}^kx_2'$, atd.) a výpočet opakujeme.

Poznámka 8. Při opakování požadavků je výhodné pro výpočet ${}^ky^{(h)}$ využívat výsledku opakování právě předchozího.

Lemma 1. *Budiž*

$$P({}^kX_m/({}^kX_1, \ldots, {}^kX_m, \ldots, {}^kX_{(n,k)}))$$

pravděpodobnost, že z dob obsluhy požadovaných proudy ${}^kX_1, \ldots, {}^kX_{(n,k)}$ *je požadovaná obsluha právě z proudu* ${}^kX_m$. *Potom*

$$P({}^kX_m/({}^kX_1, \ldots, {}^kX_{(n,k)})) = \frac{|{}^kx_m|}{\sum_{m=1}^{(n,k)} |{}^kx_m|}. \tag{24}$$

Důkaz plyne jednak z definice pravděpodobnosti obsluhování ${}^kx_m$, jednak z definice geometrické pravděpodobnosti (případy ve jmenovateli se navzájem vylučují).

Věta 3. *Nechť* ${}^ky_m^{(h)}$ *je pravděpodobnost, že stanoviště* ${}^kS$ *uskutečňuje některou z požadovaných dob obsluhy do h-tého opakování, a že zároveň z dob obsluhy požadovaných proudy* ${}^kX_1, \ldots, {}^kX_{(n,k)}$ *je požadovaná obsluha právě z proudu* ${}^kX_m$. *Pak*

$${}^ky_m^{(h)} = \frac{{}^ky^{(h)}}{\sum_{m=1}^{(n,k)} |{}^kx_m|} |{}^kx_m| . \tag{25}$$

Důkaz plyne z definice ${}^ky^{(h)}$ a z (24).

Věta 4. *Nechť* ${}^ky^{(\infty)}$ *je pravděpodobnost obsluhování ve výsledném proudu* ${}^kY^{(\infty)}$ *uskutečněném stanovištěm při neomezeném opakování požadavků:*

$${}^ky^{(\infty)} = \lim_{h\to\infty} {}^ky^{(h)} . \tag{26}$$

Budiž

$$P(\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{(n,k)} {}^kY_m^{(h)})$$

pravděpodobnost, že stanoviště obslouží požadavky, které čekaly na obsloužení. Pak

$$P(\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{(n,k)} {}^kY_m^{(h)}) = {}^ky^{(\infty)} - {}^ky^{(0)} . \tag{27}$$

Důkaz je nasnadě.

Poznámka 9. Pro numerický výpočet při velkém n_k nebo h je výhodné uspořádat ${}^kx_m$ podle velikostí sestupně. Pak snadno zjistíme, od kterého indexu φ nebo od kterého h se výpočet veličiny ${}^ky^{(h)}$ prakticky již nemění.

$$({}^ky_{[\varphi+1]}^{(h)} - {}^ky_{[\varphi]}^{(h)} < \varepsilon) \to \text{END} , \tag{28}$$

$$(\text{29}) \qquad ({}^k y^{(h+1)} - {}^k y^{(h)} < \varepsilon) \to \text{END}\,,$$

kde ε je přípustná chyba výpočtu. Přesnost výpočtu ovšem záleží také na přesnosti veličin ${}^k N_M$ a ${}^k \xi_\varphi$.

Poznámka 10. Je zřejmé, že

$$(30) \qquad {}^k y^{(\infty)} = \sum_{m=1}^{(n,k)} {}^k x_m$$

pro

$$\sum_{m=1}^{(n,k)} {}^k x_m \leqq {}^k N_M\,,$$

$$(31) \qquad {}^k y^{(\infty)} = {}^k N_M$$

pro

$$\sum_{m=1}^{(n,k)} {}^k x_m > {}^k N_M\,.$$

Poznámka 11. Jestliže známe střední dobu Δt, která uplyne mezi jednotlivými opakováními, můžeme vypočíst střední čekací dobu.

ZÁVĚR

Byl uveden model stacionárních procesů obsluhy bez čekání i s čekáním. Poměrně matematicky nenáročný tvar rovnic uvedeného modelu umožňuje používat jej prakticky k numerickému řešení všude, kde lze jeho vlastnosti považovat za splněné v přijatelné míře. Formulace problému i jeho řešení jsou vhodné i pro použití samočinných počítačů. Např. výpočet veličiny ${}^k y^{(h)}$ podle věty 2 lze provést pomocí cyklu.

Nakonec budiž mi dovoleno poděkovat Dr. F. Zítkovi z Matematického ústavu ČSAV za kritické připomínky, které přispěly k přesnosti textu.

(Došlo dne 26. června 1967.)

LITERATURA

[1] A. Я. Хинчин: Работы по математической теории массового обслуживания. ГИФМЛ, Москва, 1963.
[2] Г. П. Климов: Стохастические системы обслуживания. Наука, Москва 1966.
[3] J. Riordan: Stochastic Service Systems. Wiley, New York 1962.
[4] T. L. Saaty: Elements of Queueing Theory with Applications, McGraw-Hill, New York 1961.
[5] A. Dvoretzky, H. Robbins: On the „Parking" Problem. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences *IX* (1964), Series A, Fasc. 1—2, 209—225.
[6] G. Bánkövi: On Gaps Generated by a Random Space Filling Procedure. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. *VII* (1962), Series A, Fasc. 3, 395—407.
[7] D. Mannion: Random space-filling in one dimension. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences *IX* (1964), Series A, Fasc. 1—2, 143—153.

A Model of Service System

PŘEMYSL DASTYCH

The probability that the differential time interval $(t, t + dt\rangle$ is a part of any service time interval in a flow of disjoint service times is called the probability of serving in this flow. Let ${}^k y_{[\varphi]}$ be the probability of serving in the flow ${}^k Y_{[\varphi]}$ of demands served by the server ${}^k S$ and made only from the first φ of the flows which are elements of the ordered set of input flows

$$ {}^k X \equiv \left({}^k \Xi_1, \ldots, {}^k \Xi_\varphi, \ldots, {}^k \Xi_{(h+1)(n,k)}\right), $$

whose probabilities of serving are ${}^k\xi_1, \ldots, {}^k\xi_\varphi, \ldots, {}^k\xi_{(h+1)(n,k)}$. Then for any arbitrary permutation of lower indices of the probabilities ${}^k\xi_1, \ldots, {}^k\xi_{\varphi+1}$ follows that

$$ {}^k y_{[\varphi+1]} = {}^k y_{[\varphi]} + \left({}^k N_M - {}^k y_{[\varphi]}\right) {}^k\xi_{\varphi+1}, $$

where ${}^k N_M$ – is the critical probability of serving by the server ${}^k S$ – the impossibility of making full use of the server's time being considered in general –,

(n, k) – the number of input flows to the server ${}^k S$,

h – the number indicating how many times there had been repeated the demands which have not yet been served $(h = 0, 1, 2, \ldots)$,

${}^k y^{(h)}$ – the probability of serving by the server ${}^k S$ when the number of repeating is h,

$$ {}^k y_{[0]} = 0, $$
$$ {}^k y_{[(h+1)(n,k)]} = {}^k y^{(h)}. $$

Ing. Přemysl Dastych, Ústav výpočtové techniky ČSAV-ČVUT, Horská 3, Praha 2.