KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 4/1968

Статистическая оценка функции сохранности при экспоненциальном и неизвестном законе надежности кибернетических систем

Ж. Б. Линковский

Вначале рассматривается построение оценки функции сохранности систем при экспоненциальном законе надежности на основании параметрических методов статистики и использовании одной теоремы Крамера, в случае большего обьема наблюдений за отказами систем. Затем строится статистическая оценка функции сохранности при неизвестном законе надежности. Используется предельный статистический непараметрический критерий Смирнова и теорема Гливенко.

1. ВВЕДЕНИЕ

Функция $\mu(t)$ сохранности однотипных кибернетических систем (элементов, блоков, машин и т. д.) была введена в теории надежности Ф. Московицем [1]. Она определяет количество отказывающих элементов в единичном интервале времени в долях от уже отказавших элементов.

Если $f(t)$ – плотность вероятности отказов (частота отказов), $Q(t)$ – вероятность отказа [2], то

(1)
$$\mu(t) = \frac{f(t)}{Q(t)}\,; \quad t \geqq 0\,.$$

Если через ξ обозначить случайное время первого отказа, то $f(t)$ – плотность вероятности случайной величины ξ, а

$$Q(t) = \mathsf{P}\{\xi < t\}$$

– функция $F_\xi(t)$ распределения вероятностей той же случайной величины, и поэтому:

(2)
$$\mu(t) = \frac{f(t)}{\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t} \equiv \left(\ln \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)'; \quad t \geqq 0\,.$$

При статистическом исследовании функций надежности систем известны выборочные значения случайной величины ξ: $t_1, t_2, \ldots, t_n$, т. е. дана выборка обьемом n. На основании этого при большой выборке ($n > 100$) необходимо, в частности, произвести статистическую оценку функции сохранности $\mu(t)$ с указанием доверительных интервалов. Вначале рассмотрим случай экспоненциального закона надежности системы, который обыкновенно наступает после периода начальной эксплуатации, а затем, случай неизвестного закона надежности.

2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} Q(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad , \quad t \geqq 0 , \tag{3}$$

где $0 < \lambda = \text{const}$ (постоянная интенсивность отказов). Тогда получим:

$$\mu(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} = \frac{\lambda}{e^{\lambda t} - 1} , \quad t \geqq 0 . \tag{4}$$

Если $T_{\text{ср}}$ — среднее время безотказной работы (математическое ожидание случайной величины ξ), то как известно:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} , \tag{5}$$

т. е.

$$\lambda = \frac{1}{T_{\text{ср}}} . \tag{6}$$

Статистическую оценку параметра λ распределения (3) легко получить по оптимальному методу максимума правдоподобия [3]:

$$\lambda^* = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i} , \tag{7}$$

где λ^* — выборочное значение параметра λ, причем выборочное (эмпирическое) значение $T^*_{\text{ср}}$ среднего времени безотказной работы $T_{\text{ср}}$ соответственно равно:

$$T^*_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i . \tag{8}$$

Таким образом имеем:

$$\lambda^* = \frac{1}{T^*_{\text{ср}}} . \tag{9}$$

Оценка (8), являющаяся случайной величиной, имеет дисперсию:

(10) $$\mathsf{D}T^*_{\text{ср}} = \frac{T^2_{\text{ср}}}{n} \approx \frac{T^{*2}_{\text{ср}}}{n},$$

где знак приближенного равенства соответствует учету больших n. Случайная величина $T^*_{\text{ср}}$ распределена асимптотически нормально (с ростом n) со средним:

(11) $$\mathsf{M}T^*_{\text{ср}} = T_{\text{ср}} \approx T^*_{\text{ср}},$$

и с дисперсией (10). В свою очередь, случайная величина λ^* согласно (9) является функцией от асимптотически нормально распределенной случайной величины $T^*_{\text{ср}}$, и по теореме Крамера [4] также распределена асимптотически нормально со средним и дисперсией, равными соответственно:

(12) $$\mathsf{M}\lambda^* = \lambda + O(n^{-1}) \approx \lambda^* + O(n^{-1}) \approx \lambda^*;$$

$$\mathsf{D}\lambda^* = \frac{1}{T^4_{\text{ср}}}\,\mathsf{D}T_{\text{ср}} + O(n^{-3/2}) = \frac{1}{nT^2_{\text{ср}}} + O(n^{-3/2}) \approx$$

(13) $$\approx \frac{1}{nT^{*2}_{\text{ср}}} + O(n^{-3/2}) \approx \frac{1}{nT^{*2}_{\text{ср}}},$$

где знаки приближенных равенств соответствуют учету больших n.

Заметим, что вследствие асимптотической нормальности случайной величины λ^*, формула доверительного интервала для истинного значения λ строится обычно (при больших n):

(14) $$P = \mathsf{P}\{\lambda^* - u\sqrt{(\mathsf{D}\lambda^*)} < \lambda < \lambda^* + u\sqrt{(\mathsf{D}\lambda^*)}\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u}^{u} e^{-z^2/2}\,dz,$$

где $u > 0$ — произвольное действительное число (обычно выбирают $u = 3$, что соответствует доверительной вероятности $P = 0{,}9973$), а в правой части содержится табулированная функция [5].

Далее, выборочное значение $\mu^*(t)$ функции сохранности будет:

(15) $$\mu^*(t) = \frac{\lambda^*}{e^{\lambda^* t} - 1},$$

и является функцией случайной величины λ^*. По той же теореме Крамера случайная величина $\mu^*(t)$ также распределена асимптотически нормально со средним и дисперсией, равными (при больших n):

(16) $$\mathsf{M}\mu^*(t) \approx \mu(t) \approx \mu^*(t);$$

$$\mathsf{D}\mu^*(t) \approx \frac{(e^{\lambda^* t} - 1 - \lambda^* t e^{\lambda^* t})^2}{(e^{\lambda^* t} - 1)^4} \mathsf{D}\lambda^* . \tag{17}$$

Доверительный интервал для истинного значения функции сохранности $\mu(t)$ строится вполне аналогично (при больших n):

$$P = \mathsf{P}\{\mu^*(t) - u\sqrt{[\mathsf{D}\mu^*(t)]} < \mu(t) < \mu^*(t) + u\sqrt{\mathsf{D}\mu^*(t)}\} = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{u} e^{-z^2/2}\, dz .$$

3. НЕИЗВЕСТНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ

В этом случае при неизвестности плотности вероятности $f(t)$ отказов приемлемая статистическая оценка функции сохранности $\mu(t)$ может быть произведена на основании привлечения предельного непараметрического критерия Н. В. Смирнова [6], разработанного для непараметрических задач математической статистики с целью оценивания неизвестной плотности вероятности $f(t)$ одномерной случайной величины ξ. В самом деле, предположим, что $f(t)$ нигде не обращается в нуль и имеет ограниченную вторую производную $f''(t)$. В задачах надежности обычно выполняется это условие для плотности вероятности $f(t)$ отказов.

Тогда при больших n доверительная область для $f(t)$ строится по формуле:

$$P = \mathsf{P}\{y_1(t) < f(t) < y_2(t)\} \underset{n\to\infty}{\to} C(\Theta_\beta) , \tag{19}$$

где

$$y_1(t) = \varphi_n^*(t) + \frac{u_\beta^2}{2} - u_\beta \sqrt{\left(\varphi_n^*(t) + \frac{u_\beta^2}{4}\right)} ; \tag{20}$$

$$y_2(t) = \varphi_n^*(t) + \frac{u_\beta^2}{2} + u_\beta \sqrt{\left(\varphi_n^*(t) + \frac{u_\beta^2}{4}\right)} , \tag{21}$$

$0 < \beta < 1$ коэффициент доверия (доверительная вероятность), $C(\Theta_\beta)$ — функция Смирнова, равная:

$$C(\Theta_\beta) = \beta = \exp\left[-2e^{-\Theta_\beta}\right] . \tag{22}$$

Функции $\varphi_n^*(t)$ определяются следующим путем. Данные выборки заключены на интервале $[a, b]$. Разобъем $[a, b]$ на ряд частичных отрезков

$$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}] , \quad k = 1, 2, \ldots, s$$

равной длины

$$h = \frac{b - a}{s} .$$

Обозначим через m_k число наблюдений, попавших на отрезок Δ_k и через a_k — правый конец отрезка Δ_k. В каждом Δ_k имеем:

(23) $$\varphi_n^*(t) = \frac{m_k + m_{k+1}}{2nh} + (t - a_k)\left(\frac{m_{k+1} - m_k}{nh^2}\right).$$

Величина u_β в (20) и (21) при заданной доверительной вероятности β (обычно $\beta = 0{,}9$ и $0{,}95$) будет равна:

(24) $$u_\beta = \frac{l_s + \Theta_\beta / l_s}{\sqrt{(nh)}},$$

$$\Theta_\beta = -\ln\frac{|\ln\beta|}{2};$$

l_s находится как корень следующего уравнения:

(25) $$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{l_s} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{s},$$

где $s = n^\alpha$ $(\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{3})$; интеграл в (25) табулирован [5]. Из (19) получаем:

(26) $$P = \mathsf{P}\left\{\frac{y_1(t)}{Q(t)} < \mu(t) < \frac{y_2(t)}{Q(t)}\right\} \approx \beta.$$

Согласно теореме В. И. Гливенко [7] имеет место

$$Q_n^*(t) \to Q(t)$$

в смысле сходимости по вероятности, где $Q_n^*(t)$ — эмпирическая (выборочная) функция распределения вероятностей случайной величины ξ:

(27) $$Q_n^*(t) = \frac{n_t}{n},$$

n_t — число выборочных значений, расположенных левее t на оси t. Поэтому в практических расчетах (при больших n: $n \geqq 200-300$) формула доверительной области для функции сохранности $\mu(t)$ будет иметь вид:

(28) $$P = \mathsf{P}\left\{\frac{y_1(t)}{Q_n^*(t)} < \mu(t) < \frac{y_2(t)}{Q_n^*(t)}\right\} \approx \beta.$$

Таким путем производится статистическая оценка функции сохранности при неизвестном законе надежности кибернетической системы.

(Поступило 2. мая 1967 г.)

[1] F. Moskowitz: The statistical analysis of redundant systems. IRE Internat. Convention Rec *8* (1960), 78.
[2] Р. А. Сапожников, А. А. Бессонов, А. Г. Шоломицкий: Надежность автоматических управляющих систем. Высшая школа, Москва 1964.
[3] Ж. Б. Линковский: Доверительные интервалы для среднего времени работы системы элементов с экспоненциальным законом надежности. Электросвязь (1961), 9, 69.
[4] Г. Крамер: Математические методы статистики. ГИИЛ, Москва 1948, § 28.4.
[5] И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов: Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). ГИТТЛ, Москва 1955.
[6] Н. В. Смирнов: О построении доверительной области для плотности распределения случайной величины. Доклады Академии Наук СССР (общая серия) *74* (1950), 2.
[7] V. Glivenko: Sulla determinazione empirica di una leggi di probabilita. Giornali dell'Istituto Italiano degli Attuari *IV* (1933), 973—993.

VÝTAH

Statistické odhady funkce bezpečnosti pro exponenciální a neznámý zákon výskytu poruch kybernetických systémů

Ž. B. LINKOVSKIJ

Nechť ξ je náhodná proměnná označující dobu provozu sledovaného zařízení do první poruchy. Potom distribuční funkce $F_\xi(t)$ náhodné proměnné ξ je pravděpodobností výskytu poruchy za dobu t

$$Q(t) = F_\xi(t) = \mathsf{P}\{\xi < t\} ;$$

hustota pravděpodobnosti je

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} .$$

V článku se odvozují odhady funkce bezpečnosti $\mu(t)$ (функция сохранности, safety function [1]) udávající podíl počtu porouchaných prvků za jednotkový časový interval k celkovému počtu již porouchaných prvků,

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{Q(t)}, \quad t \geqq 0 \tag{1}$$

z n známých realizací náhodné proměnné ξ: $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (pro velká n).

Pro exponenciální zákon výskytu poruch (3) byl za použití Cramerovy věty odvozen konfidenční interval (18) a to prostřednictvím odhadu intenzity poruch λ^* respektive střední doby života T^*_{cp}.

Pro neznámý zákon výskytu poruch se odhaduje podle limitního neparametrického Smirnovova kritéria hustota pravděpodobnosti $f(t)$ (19) a pomocí Glivenkovy věty se dochází k odhadu funkce $\mu(t)$ (28).

Ж. Б. Линковский, Ново-Песчаная ул. д. 23/7, кв. 356, корпус 35, Москва А-252. СССР.