

Některé funkční vlastnosti trajektorií geometrického místa kořenů

MIROSLAV ROSENBAUM

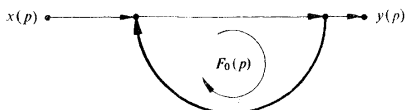
Článek pojednává o analytickém vyšetřování regulované soustavy metodou geometrického místa kořenů a o způsobu zastoupení trajektorie orientovanou tečnou v okolí vybraného bodu roviny p .

ÚVOD

Při užití geometrického místa kořenů k analýze zpětnovazebních obvodů vedly praktické důvody k částečnému odklonu od původní koncepce Evansovy [1] graficko-numerické metody hledání kořenů polynomů typu

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n a_k p^k = 0.$$

Přesnost řešení totiž klesá v případech, kdy koeficienty a_0 a a_{n-1} se řádově liší. Volba velkých zobrazovacích měřítek Gaussovy roviny je technicky nepřijatelná. Užití pro rozvětvené obvody je nepraktické.



Obr. 1. Signální graf jednosmyčkového regulačního obvodu.

Někteří autoři [2], [3] se proto přiklánějí spíše k analytické interpretaci metody, kdy grafické zobrazení má jen orientační význam a připouští vhodnou deformaci poměrných vzdáleností bodů.

Obrazový přenos rozpojeného regulačního obvodu s jedinou smyčkou je definován rovnicí (obr. 1)

$$(2) \quad F_0(p) = \pm KG(p),$$

64 kde kladné znaménko platí pro kladnou zpětnou vazbu, za předpokladu že činitel zesílení K je vždy reálné číslo větší než nula. Funkce $G(p)$ je obvykle podíl dvou normálních polynomů $M(p)$ a $N(p)$, v některém případě doplněný přenosem dopravního zpoždění $e^{-p\tau_d}$,

$$(3) \quad G(p) = \frac{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} e^{-p\tau_d},$$

$$m \leq n, \quad a_{s-1} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, h.$$

Index $s = h$ je řád pólu v počátku souřadnic Gaussovy roviny. Matematický zápis dalších rovnic je možno podstatně zjednodušit, budeme-li předpokládat aproximaci přenosu dopravního zpoždění podílem dvou polynomů s konečným počtem členů [4] a zahrnutím znaménka tohoto výrazu do typu zpětné vazby. Z neznámějších aproximací uvedme Padého rozvoj [5] (4) nebo užití Taylorova rozvoje (5) [6]

$$(4) \quad e^{-x} = \frac{1 - \frac{vx}{u+v} + \frac{v(v-1)x^2}{(u+v)(u+v-1)2!} - \frac{v(v-1)(v-2)x^3}{(u+v)(u+v-1)(u+v-2)3!} + \dots}{1 + \frac{ux}{v+u} + \frac{u(u-1)x^2}{(v+u)(v+u-1)2!} - \frac{u(u-1)(u-2)x^3}{(v+u)(v+u-1)(v+u-2)3!} + \dots},$$

$$u = v = k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(5) \quad e^{-x} = \frac{e^{-x/2}}{e^{+x/2}} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \dots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots},$$

kdy např. prvé přiblížení dopravního zpoždění je definováno v obou případech stejným výrazem

$$(6) \quad e^{-p\tau_d} = \frac{1 - \frac{p\tau_d}{2}}{1 + \frac{p\tau_d}{2}} = -\frac{p - \frac{2}{\tau_d}}{p + \frac{2}{\tau_d}}.$$

Znaménko minus rovnice (6) mění kladnou zpětnou vazbu na zápornou a naopak. Výše uvedený předpoklad umožňuje přepis rovnice (3) na výraz

$$(7) \quad G(p) = \frac{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0},$$

$$m \leq n; \quad a_{s-1} = 0; \quad s = 0, 1, \dots, h$$

kde do stupně polynomů m a n jsou zahrnuty i řády aproximačních výrazů (4) resp. (5). Analýza výrazu (3) je časově náročná a provádí se obvykle jen ve speciálních případech, kdy omezená přesnost řešení nevyhovuje.

Geometrické místo kořenů tvoří soustava křivek [6] ležících v rovině p , jejichž body splňují podmínku argumentu funkce $G(p)$,

$$(8) \quad \begin{aligned} \arg G(p) &= 2k\pi, \\ \arg G(p) &= (2k + 1)\pi, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

kde první rovnice (8) platí pro kladnou zpětinou vazbu, druhá pro zápornou [7]. V obecném případě může však být $\arg G(p)$ (7) různý od násobků π . Zavádí se proto pojem izogony – křivky, která spojuje v rovině p body stejného argumentu. Doplňme-li soustavu izogon křivkami konstantního zesilovacího činitele K , získáme podle Smitha tzv. geometrické pole přenosu rozpojené smyčky [7]. Geometrické pole je v jednoduchých případech určováno analogově [8] [9], ve složitějších případech číslíkovým počítačem [10].

FUNKČNÍ VLASTNOSTI GEOMETRICKÉHO MÍSTA KOŘENŮ (GM)

Všimněme si blíže způsobu analytického vyjádření obou soustav křivek $\arg G(p) = \text{konst}$, $K = \text{konst}$. Přepíšeme rovnici (2) s přihlédnutím k rovnici (7) do tvaru [13]

$$(9) \quad F_0(p) = \pm K \frac{\text{Re } M(p) + j \text{Im } M(p)}{\text{Re } N(p) + j \text{Im } N(p)},$$

$$p = \sigma + j\omega.$$

Protože uvažujeme $F_0(p)$ jako funkci komplexní proměnné, je možno upřesnit $\arg F_0(p)$ pomocí znaménka její reálné a imaginární části.

Rovnici (9) rozšířením upravíme na

$$(10) \quad F_0(p) = \pm K \frac{\text{Re } N(p) \cdot \text{Re } M(p) + \text{Im } M(p) \cdot \text{Im } N(p)}{\text{Re}^2 N(p) + \text{Im}^2 N(p)} \pm$$

$$\pm jK \frac{\text{Re } N(p) \cdot \text{Im } M(p) - \text{Re } M(p) \cdot \text{Im } N(p)}{\text{Re}^2 N(p) + \text{Im}^2 N(p)},$$

takže $\arg F_0(p)$ je pak

$$(11) \quad \arg F_0(p) = \arctg \frac{\text{Re } N(p) \cdot \text{Im } M(p) - \text{Re } M(p) \cdot \text{Im } N(p)}{\text{Re } N(p) \text{Re } M(p) + \text{Im } M(p) \text{Im } N(p)}.$$

66 Rovnice izogony úhlu $\varphi = \varphi_0 \pm (k\pi)$, $k = 0, 1, \dots$, může proto být definována pomocí tangenty úhlu rovnici (12) resp. (13):

$$(12) \quad \frac{\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Im} M(p) - \operatorname{Re} M(p) \operatorname{Im} N(p)}{\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Re} M(p) + \operatorname{Im} N(p) \operatorname{Im} M(p)} = A,$$

$$(13) \quad \operatorname{Re} N(p) [\operatorname{Im} M(p) - A \operatorname{Re} M(p)] - \operatorname{Im} N(p) [\operatorname{Re} M(p) + A \operatorname{Im} M(p)] = 0.$$

Speciálně pro úhel $\varphi = 0 \pm k\pi$, $k = 0, 1, \dots$, je rovnice izogony totožná s rovnicí geometrického místa kořenů se souřadnicemi σ, ω , kterou budeme označovat symbolem GM (σ, ω), ve smyslu definic (8) [$A = 0$]

$$(14) \quad \operatorname{GM}(\sigma, \omega) \equiv \operatorname{Re} N(p) \operatorname{Im} M(p) - \operatorname{Re} M(p) \operatorname{Im} N(p) = 0.$$

Ze soustavy křivek $K = \text{konst}$ [6] vybíráme obvykle jen ty, pro které současně platí (14). Funkce (10) se potom stává reálnou a její absolutní hodnota je rovna číselně prvému zlomku (15) s přiřazeným znaménkem vazby:

$$(15) \quad \pm K \frac{\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Re} M(p) + \operatorname{Im} M(p) \operatorname{Im} N(p)}{\operatorname{Re}^2 N(p) + \operatorname{Im}^2 N(p)} = 1.$$

Formální úpravou (15) získáme rovnici křivek konstantního činitele zesílení $K > 0$

$$(16) \quad \operatorname{Re} N(p) [\operatorname{Re} N(p) \mp K \operatorname{Re} M(p)] + \operatorname{Im} N(p) [\operatorname{Im} N(p) \mp K \operatorname{Im} M(p)] = 0.$$

Horní znaménko při K platí pro kladnou zpětnou vazbu.

Zakreslíme-li v Gaussově rovině množinu křivek

$$A \in (-\infty, \infty); \quad K \in \langle 0, \infty \rangle,$$

v průsečících (14) a (16) leží pak kořeny charakteristické rovnice přenosu uzavřeného obvodu. Typický příklad geometrického pole podle Smitha je na obr. 2.

Činitele zesílení K pokládáme za kladné číslo. Proto naopak rovnice (15) v úpravě (17) rozliší znaménko zpětné vazby pro libovolný bod p ležící na křivkách (14). Tato okolnost je důležitá, protože rovnice (14) splňuje obě podmínky (8):

$$(17) \quad K = \pm \frac{\operatorname{Re}^2 N(p) + \operatorname{Im}^2 N(p)}{\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Re} M(p) + \operatorname{Im} N(p) \operatorname{Im} M(p)}.$$

Vazba je určena znaménkem, které je nutno vybrat tak, aby číslo K vycházelo kladné. Je-li např. zlomek (17) pro p ležící na křivce (14) číslo větší než nula, je vazba kladná a bod p splňuje argumentovou podmínku $\arg G(p) = 2k\pi$. Respektujeme-li význam znamének (17), můžeme pomocí rovnic (9), (14) a (18)

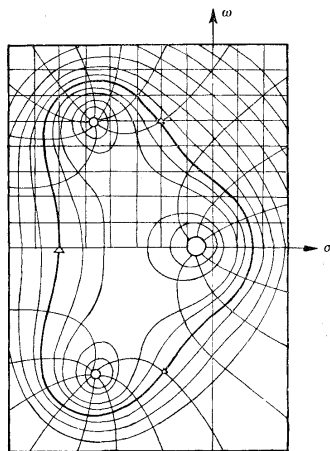
$$(18) \quad |KG(p)| = 1$$

ještě dokázat identitu (17), (19) a (20)

61

$$(19) \quad K = + \frac{|N(p)|}{|M(p)|},$$

$$(20) \quad K = \pm \frac{\operatorname{Re} N(p) \operatorname{Re} M(p) + \operatorname{Im} N(p) \operatorname{Im} M(p)}{\operatorname{Re}^2 M(p) + \operatorname{Im}^2 M(p)},$$



Obr. 2. Příklad geometrického pole přenosu otevřené smyčky.

kde polynomy $N(p)$ a $M(p)$ jsou

$$(21) \quad \begin{aligned} N(p) &= p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0, \\ M(p) &= p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0. \end{aligned}$$

Některá odvození v dalším vyžadují vyjádření (8), (19) a (21) součinem kořenových činitelů:

$$(22) \quad \begin{aligned} N(p) &= (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \\ M(p) &= (p - q_1)(p - q_2) \dots (p - q_m), \end{aligned}$$

$$(23) \quad K = + \left\{ \frac{a}{b} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$a = [(\sigma - \sigma_{1n})^2 + (\omega - \omega_{1n})^2][(\sigma - \sigma_{2n})^2 + (\omega - \omega_{2n})^2] \dots [(\sigma - \sigma_{nn})^2 + (\omega - \omega_{nn})^2]$$

$$68 \quad b = [(\sigma - \sigma_{1m})^2 + (\omega - \omega_{1m})^2][(\sigma - \sigma_{2m})^2 + (\omega - \omega_{2m})^2] \dots [(\sigma - \sigma_{mm})^2 + (\omega - \omega_{mm})^2]$$

$$(24) \quad \arctg \frac{\omega - \omega_{1m}}{\sigma - \sigma_{1m}} + \arctg \frac{\omega - \omega_{2m}}{\sigma - \sigma_{2m}} + \dots - \arctg \frac{\omega - \omega_{mm}}{\sigma - \sigma_{mm}} = \arg G(p),$$

kde jsme užili substitucí

$$p = \sigma + j\omega,$$

$$p_i = \sigma_{im} + j\omega_{im},$$

$$q_j = \sigma_{jm} + j\omega_{jm},$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Polynomy $N(p)$ a $M(p)$ (21) upravíme dosazením za p ze substitucí a rozvedením podle binomické poučky získáme

$$(25) \quad N(p) = [\sigma^n + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \dots + a_k\sigma^k + \dots + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0] + \\ + (j\omega)^1 \left[\binom{n}{1} \sigma^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_{n-1} \sigma^{n-2} + \dots + \binom{k}{1} a_k \sigma^{k-1} + \dots + \right. \\ \left. + \binom{2}{1} a_2 \sigma + \binom{1}{1} a_1 \right] + (j\omega)^2 \left[\binom{n}{2} \sigma^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_{n-1} \sigma^{n-3} + \right. \\ \left. + \dots + \binom{k}{2} a_k \sigma^{k-2} + \dots + \binom{2}{2} a_2 \right] + \dots + (j\omega)^k \left[\binom{n}{k} \sigma^{n-k} + \right. \\ \left. + \binom{n-1}{k} a_{n-1} \sigma^{n-k-1} + \dots + \binom{k}{k} a_k \right] + \dots + (j\omega)^{n-1} \left[\binom{n}{n-1} \sigma + \right. \\ \left. + \binom{n-1}{n-1} a_{n-1} \right] + (j\omega)^n \binom{n}{n}.$$

Rozvoj $M(p)$ je analogický (25). Všimneme-li si podrobněji polynomů v hranatých závorkách (25), můžeme je považovat za postupné derivace polynomů $N(\sigma)$ a $M(\sigma)$ vzniklých dosazením $p = \sigma$ do rovnic (21) podle σ a polynomy $N(p)$ a $M(p)$ definovat rovnicemi:

$$(26) \quad N(p) = \left[N(\sigma) + \frac{j\omega}{1!} N^{(1)}(\sigma) + \frac{(j\omega)^2}{2} N^{(2)}(\sigma) + \dots + \frac{(j\omega)^k}{k!} N^{(k)}(\sigma) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{(j\omega)^{n-1}}{(n-1)!} N^{(n-1)}(\sigma) + \frac{(j\omega)^n}{n!} N^{(n)}(\sigma) \right],$$

$$M(p) = \left[M(\sigma) + \frac{j\omega}{1!} M^{(1)}(\sigma) + \frac{(j\omega)^2}{2!} M^{(2)}(\sigma) + \dots + \frac{(j\omega)^k}{k!} M^{(k)}(\sigma) + \dots + \frac{(j\omega)^{n-1}}{(n-1)!} M^{(n-1)}(\sigma) + \frac{(j\omega)^n}{n!} M^{(n)}(\sigma) \right].$$

Úpravou (26) vyčíslením reálné a imaginární části polynomů (26):

$$(27) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} N(p) &= N(p) - \frac{\omega^2}{2!} N^{(2)}(\sigma) + \frac{\omega^4}{4!} N^{(4)}(\sigma) - \dots, \\ \operatorname{Im} N(p) &= \frac{\omega}{1!} N^{(1)}(\sigma) - \frac{\omega^3}{3!} N^{(3)}(\sigma) + \frac{\omega^5}{5!} N^{(5)}(\sigma) - \dots, \\ \operatorname{Re} M(p) &= M(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} M^{(2)}(\sigma) + \frac{\omega^4}{4!} M^{(4)}(\sigma) - \dots, \\ \operatorname{Im} M(p) &= \frac{\omega}{1!} M^{(1)}(\sigma) - \frac{\omega^3}{3!} M^{(3)}(\sigma) + \frac{\omega^5}{5!} M^{(5)}(\sigma) - \dots \end{aligned}$$

Funkce $N(p)$ a $M(p)$ jsou regulární, splňují Cauchyho-Riemannovy podmínky

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} N(p)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \operatorname{Im} N(p)}{\partial \omega}; & \frac{\partial \operatorname{Re} N(p)}{\partial \omega} &= -\frac{\partial \operatorname{Im} N(p)}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial \operatorname{Re} M(p)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \operatorname{Im} M(p)}{\partial \omega}; & \frac{\partial \operatorname{Re} M(p)}{\partial \omega} &= -\frac{\partial \operatorname{Im} M(p)}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

a proto pomocí (28) je možno dokázat, že i funkce $G(p)$ (7), jako podíl dvou regulárních funkcí, je regulární.

Porovnáme-li rovnice (2), (17), (20) a (27), vidíme, že zesilovací činitel K můžeme chápat buď jako komplexní funkci proměnné p (29), nebo jeho funkci dvou proměnných σ a ω :

$$(29) \quad K(p) = \pm \frac{N(p)}{M(p)} = \pm \frac{1}{G(p)},$$

$$(30) \quad K = K(\sigma, \omega).$$

Funkce $K(p)$ je vzhledem k (28) regulární, $K(\sigma, \omega)$ je spojitou funkcí dvou proměnných. To znamená, že funkce K je derivovatelná podle libovolné proměnné. Např. derivace (29) podle p lze využít ke stanovení všech bodů rozvětvení GM v rovině p [11].

Velmi užitečné závěry je možno vyvodit ze třírozměrného vyjádření funkce (30), kde prostor má souřadnice σ , ω , K (obr. 3). Víme, že funkce K roste od nulové hodnoty v pólu do nekonečna v nule, nebo v nekonečně vzdáleném bodu [1]. Funkci K budeme proto vynášet pouze v bodech roviny p , které nás zajímají, to je nad křivkami GM. Prostorové čáry takto vzniklé protínají roviny $K = \text{konst}$ v bodech, jejichž

- 70 průměty do roviny p určují kořeny uzavřené smyčky, definované příslušným činitelem zesílení K .

Průběh křivky $K(\sigma, \omega)$ nad $\text{GM}(\sigma, \omega)$ popíšeme diferenciálem, resp. derivací:

$$(31) \quad dK(\sigma, \omega) = \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega} d\omega,$$

$$(32) \quad \frac{dK(\sigma, \omega)}{ds} = \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{ds},$$

kde ds pomocí (obr. 4) je definováno

$$(33) \quad ds = (d\sigma^2 + d\omega^2)^{\frac{1}{2}} = d\sigma(1 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Rovnice (32) přechází na

$$(34) \quad \frac{dK(\sigma, \omega)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \omega'^2)}} \left[\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} + \omega' \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega} \right].$$

Hledáme-li např. bod, ve kterém je křivka K rovnoběžná s rovinou p , potom

$$(35) \quad \frac{dK(\sigma, \omega)}{ds} \stackrel{!}{=} 0$$

je splněno podle (34) v bodě, kde derivace $\text{GM}(\sigma, \omega)$ je rovna zápornému podílu parciálních derivací

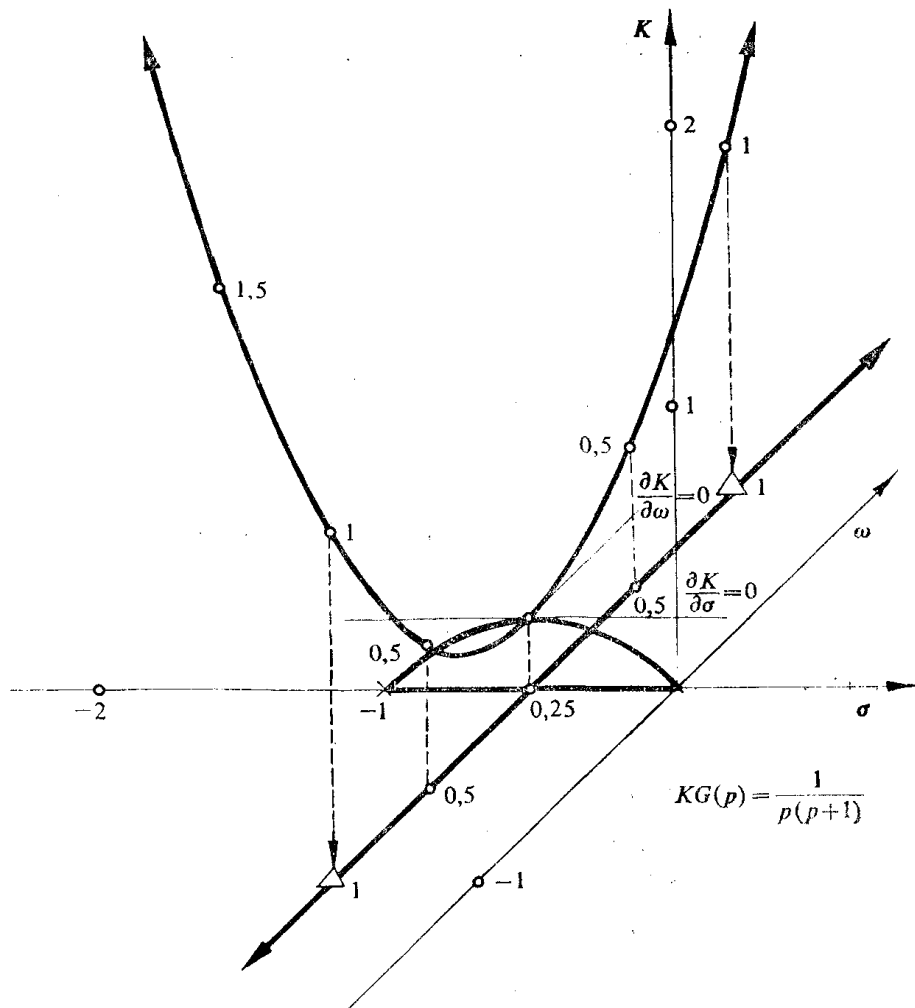
$$(36) \quad \omega' = - \frac{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}}{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega}}.$$

V dalším uvidíme, že to může být jen v bodě, kde obě parciální derivace jsou rovny nule, tj. v bodě rozvětvení (viz obr. 3).

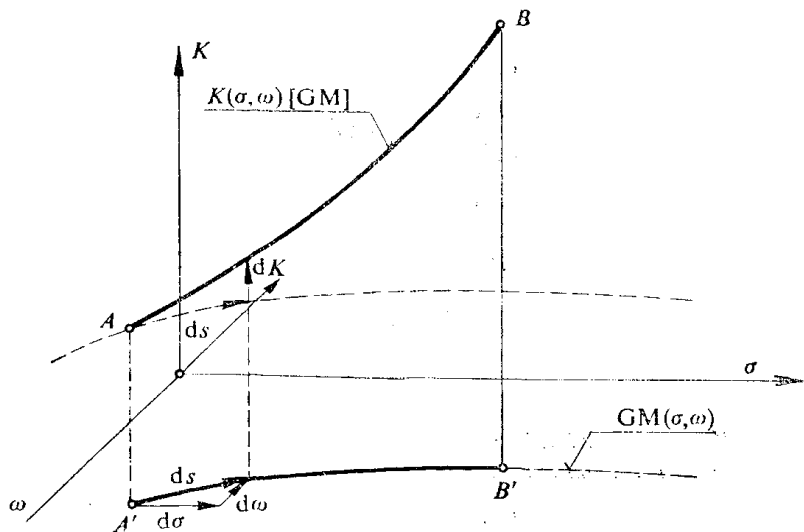
Chceme-li zjistit směr průchodu GM vybraným bodem roviny p , určíme orientaci větve pomocí přírůstku $dK(\sigma, \omega)$. Dohodneme se, že větev GM je orientována ve směru rostoucího činitele zesílení K . Upravme rovnici (31) na tvar

$$(37) \quad dK(\sigma, \omega) = \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} d\sigma \left[1 + \frac{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}} \cdot \omega' \right].$$

Aby určování $dK(\sigma, \omega)$ nebylo příliš pracné, upravme si hranatou závorku (37) pomocí (19) resp. (23), (24).



Obr. 3. Prostorové vyjádření geometrického místa kořenů přenosu $KG(p) = [p(p+1)]^{-1}$



Obr. 4. Průběh funkce $K(\sigma, \omega)$ nad trajektorií $GM(\sigma, \omega)$.

72 Z rovnice GM vyjádřené součtem argumentů (24) po zderivování vychází ω' ve tvaru

$$(38) \quad \omega' = \frac{\frac{(\omega - \omega_{1n})}{(\sigma - \sigma_{1n})^2 + (\omega - \omega_{1n})^2} + \dots - \frac{(\omega - \omega_{mn})}{(\sigma - \sigma_{mn})^2 + (\omega - \omega_{mn})^2}}{\frac{(\sigma - \sigma_{1n})}{(\sigma - \sigma_{1n})^2 + (\omega - \omega_{1n})^2} + \dots - \frac{(\sigma - \sigma_{mn})}{(\sigma - \sigma_{mn})^2 + (\omega - \omega_{mn})^2}}.$$

Parciální derivaci (19) podle σ a ω získáme

$$(39) \quad \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = \frac{\frac{\partial |N(p)|}{\partial \sigma} |M(p)| - \frac{\partial |M(p)|}{\partial \sigma} |N(p)|}{|M(p)|^2},$$

$$\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega} = \frac{\frac{\partial |N(p)|}{\partial \omega} |M(p)| - \frac{\partial |M(p)|}{\partial \omega} |N(p)|}{|M(p)|^2}.$$

Poměr obou rovnic (39) dělíme součinem $|M(p)| \cdot |N(p)|$

$$(40) \quad \frac{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}} = \frac{\frac{\frac{\partial |N(p)|}{\partial \omega}}{\frac{\partial |N(p)|}{\partial \sigma}} - \frac{\frac{\partial |M(p)|}{\partial \omega}}{\frac{\partial |M(p)|}{\partial \sigma}}}{\frac{\frac{\partial |N(p)|}{\partial \sigma}}{|N(p)|} - \frac{\frac{\partial |M(p)|}{\partial \sigma}}{|M(p)|}}.$$

Užitím vztahů (19), (23), zderivováním a úpravou (40) odvodíme porovnáním s (38) vztah

$$(41) \quad \frac{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}} = \omega'.$$

Vzorec (37) upravíme konečně na tvar

$$(42) \quad dK(\sigma, \omega) = \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} d\sigma [1 + \omega'^2].$$

O znaménku $dK(\sigma, \omega)$ rozhoduje pouze výraz před hranatou závorkou (42). Orientace geometrického místa je stejná s orientací přírůstku $d\sigma$, který je třeba dosadit do (42), aby diferenciál $dK(\sigma, \omega)$ byl kladný. Znaménko $\frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}$ a $d\sigma$ musí být stejné. Je-li např. potřebný přírůstek $d\sigma > 0$, aby $dK(\sigma, \omega)$ bylo kladné,

protíná GM bod $P_0(\sigma_0, \omega_0)$ zleva a naopak. K jednoznačnému určení orientace GM stačí pro libovolný bod stanovit pouze parciální derivaci podle σ .

V případě, že ω' roste v okolí bodu $P_0(\sigma_0, \omega_0)$ nade všechny meze, potom upravíme (31) vytknutím parciální derivace podle ω

$$(43) \quad dK(\sigma, \omega) = \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \omega} d\omega \left[\frac{1}{\omega'^2} + 1 \right]$$

a úvahy o orientaci GM jsou obdobné. Porovnáním rovnic (36) a (41) je zřejmé, že jejich současná splatnost je sporná (derivace odpovídají kolmým směrům). Funkce $K(\sigma, \omega)$ nad křivkami GM(σ, ω) musí být proto monotonní ve všech bodech, kde podíl parciálních derivací má smysl, to je vyjma bodů kde obě parciální derivace jsou rovny nule. Chápeme-li rovnici (31) jako diferenciál geometrického místa konstantního činitele zesílení K , potom rovnice (36) udává směrnici křivky konstantního zesílení. V tomto případě z porovnání rovnic (36) a (41) vyplývá, že křivky (14) a (16) se protínají pod pravým úhlem.

ZÁVĚR

V předešlé kapitole jsou popsány základní funkční vlastnosti geometrického místa konstantního argumentu a konstantního zesilovacího činitele K . Ukazuje se, že křivky $A = \text{konst}$, $K = \text{konst}$ jsou soustavy implicitních funkcí dvou proměnných σ a ω , které se protínají a vytvářejí tak geometrické pole kořenů. Je výhodné, že pro určení geometrického pole v okolí bodu $P_0(\sigma_0, \omega_0)$ není třeba znát polohu pólů a nul v přenosu otevřené smyčky; polynomy $N(p)$ a $M(p)$ stačí uvažovat v normálním tvaru (21). Způsob analýzy geometrického pole kořenů ukážeme na několika jednoduchých příkladech.

Příklad 1. Přenos otevřené smyčky se zápornou zpětnou vazbou je definován rovnicí

$$(44) \quad F_0(p) = -K \frac{1}{p(p+1)} ;$$

proto polynomy $N(\sigma)$ a $M(\sigma)$ včetně derivací jsou

$$(45) \quad \begin{aligned} M(\sigma) &= 1, & N(\sigma) &= \sigma^2 + \sigma, \\ M'(\sigma) &= 0, & N'(\sigma) &= 2\sigma + 1, \\ & & N''(\sigma) &= 2. \end{aligned}$$

Dosazením do (14) a (20) získáme rovnice

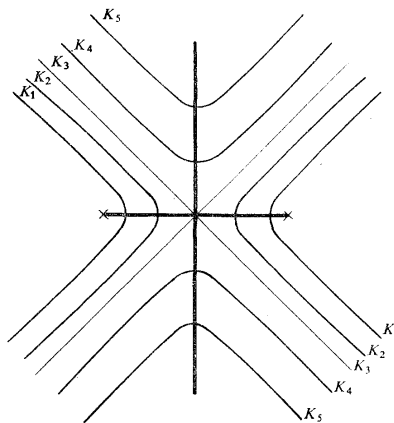
$$(46) \quad \text{GM}(\sigma, \omega) = \omega(2\sigma + 1),$$

$$(47) \quad K(\sigma, \omega) = \omega^2 - (\sigma^2 + \sigma).$$

74 Víme-li, že funkce $GM(\sigma, \omega)$ je rovna nule, potom přímým výpočtem dokážeme, že derivace (46) splňuje rovnici (41) ve všech bodech, kromě bodu $P_0(\frac{1}{2}, 0)$. Dosazujeme-li za $K(\sigma, \omega)$ kladné konstanty, získáme soustavu rovnoosých hyperbol typu

$$(48) \quad (\sigma + 0,5)^2 - \omega^2 = \frac{1}{4} - K$$

které mají hlavní osu v přímce $\sigma = -\frac{1}{2}$, nebo $\omega = 0$ podle toho, zda $K \geq \frac{1}{4}$ (obr. 5).



Obr. 5. Geometrické pole přenosu

$$KG(p) = K[p(p+1)]^{-1}.$$

Příklad 2. Přenos otevřené smyčky je definován rovnicí

$$(49) \quad F_0(p) = K \frac{p+2}{p^2+2p+2},$$

takže zpětná vazba je kladná. Polynomy $M(\sigma)$ a $N(\sigma)$ s derivacemi jsou

$$(50) \quad \begin{aligned} M(\sigma) &= \sigma + 2, & N(\sigma) &= \sigma^2 + 2\sigma + 2, \\ M'(\sigma) &= 1, & N'(\sigma) &= 2\sigma + 2, \\ & & N''(\sigma) &= 2. \end{aligned}$$

Dosazením (50) do (27), (14) a (20) získáme rovnice

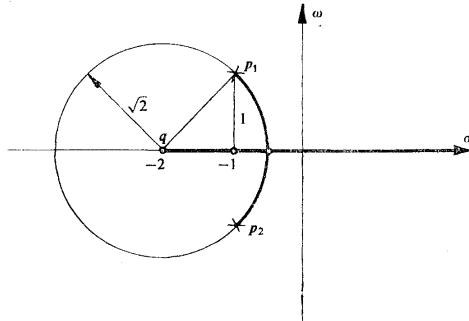
$$[51] \quad GM(\sigma, \omega) = \omega[\sigma^2 + 4\sigma + 2 + \omega^2],$$

$$(52) \quad K(\sigma, \omega) = \frac{[\sigma^2 + 2\sigma + 2 - \omega^2][\sigma + 2] + \omega^2[2\sigma + 2]}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2}.$$

Podíl parciálních derivací (52) je roven derivaci (51) podle (41), kromě bodu $P(-2 + \sqrt{2}, 0)$. Rovnici (51) je možno upravit na tvar

$$(53) \quad \text{GM}(\sigma, \omega) = \omega[(\sigma + 2)^2 + \omega^2 - 2].$$

Rovnici (52) v tomto speciálním případě můžeme dále upravit. Geometrické místo kořenů je kružnice se středem $S(-2, 0)$, poloměrem $\sqrt{2}$ a vhodný úsek na ose σ



Obr. 6. Geometrické místo kořenů přenosu

$$KG(p) = K(p+2)(p^2 + 2p+2)^{-1}.$$

(obr. 6). Zaujímáme se pouze o hodnoty $K(\sigma, \omega)$ v bodech $\text{GM}(\sigma, \omega)$. Dosazením této vazební podmínky do (52) získáme pro určování zesilovacího činitele K vztahy

$$(54) \quad \begin{aligned} K(\sigma, \omega) &= 2\sigma + 2, \\ K(\sigma, 0) &= \frac{(\sigma + 1)^2 + 1}{\sigma + 2}. \end{aligned}$$

Prvý vztah platí pro body na kružnici, druhý vztah pro body na ose σ .

Příklad 3. Vyšetříme průběh $\text{GM}(\sigma, \omega)$ soustavy dané přenosem otevřené smyčky

$$(55) \quad F_0(p) = -K \frac{1}{p(p+1)^2}$$

v okolí bodu $P_0(-0,2; \omega_0)$. Geometrické místo nahradíme v tomto bodě orientovanou tečnou. Pomocí vztahů uvedených v předěšlých případech a vztahu (37) určíme zderivováním $\text{GM}(\sigma, \omega)$ směrnicí tečny v bodě s pořadnicí ω_0 vyhovující rovnici (14), to jest $\omega_0 = \pm 0,56$. Derivace větví $\text{GM}(\sigma, \omega)$ je dána rovnicí

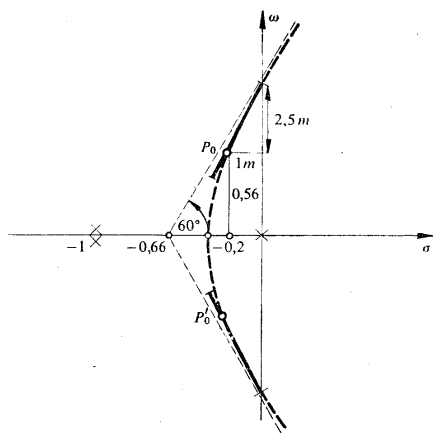
$$(56) \quad \omega' = \frac{3\sigma + 2}{\omega}.$$

76 Dosazením souřadnic bodu $P_0(-0,2; 0,56)$ vychází směrnice 2,5. Číselník zesílení $K(\sigma, \omega)$ je definován pomocí (20) rovnicí

$$(57) \quad K(\sigma, \omega) = 2\omega^2 + 3\sigma\omega^2 - \sigma^3 - 2\sigma^2 - \sigma.$$

Parciální derivace podle σ

$$(58) \quad \frac{\partial K(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = 3\omega^2 - 3\sigma^2 - 4\sigma - 1$$



Obr. 7. Náhrada trajektorie GM tečnou v okolí vybraného bodu P_0 .

po dosazení souřadnic bodu P_0 je rovna $+0,54$. Vidíme, že pomocí (42) vychází orientace větve ve směru kladného $d\sigma$ (obr. 7). Náhrada větve GM tečnou je výhodná proto, že přesnost určování kořenů je srovnatelná s přesností koeficientů obrazového přenosu identifikované soustavy.

Výpočty geometrického pole soustav vyšších řádů tabelované např. v [12] jsou zřejmě složitější, přesto však pracnost metody je úměrná analytickým závěrům, které je možno získat výpočtem.

(Došlo dne 14. dubna 1967.)

LITERATURA

- [1] W. R. Evans: Control System Dynamics, McGraw-Hill, N. Y. 1956, 96–121.
- [2] S. H. Lehnigk: Das Wurzel-Ortskurven-Verfahren. Regelungstechnik 10 (1962), 3, 120–121.
- [3] V. Föllinger: Über die Bestimmung der Wurzelortkurve. Regelungstechnik 6 (1958), 12, 442–446.
- [4] G. Schwarz, A. Sydow, H. Dittmann: Zur Güte von Totzeitapproximationen in Regelkreisen. Zeitschrift Messen Steuern Regeln 6 (1963), 8, 319–322.

- [5] W. Ammor: Zur Nachbildung von Totzeiten mit Elementen des Analogrechners. *Elektr. Rechenanlagen* 3 (1961), 5, 217—224.
- [6] O. J. M. Smith: *Feedback Control Systems*. McGraw-Hill, N. Y. 1958, 16—78.
- [7] Э. Г. Удерман: Метод корневого годографа в теории автоматического управления; ГОСЭНЕРГИЗДАТ, Москва 1953.
- [8] E. M. Deeley: Polynomial Root Solver and Root Locus Plotter. *PIEE* 110 (1963), 10, 1882—1886.
- [9] B. Senf: Gerät zur analogen Berechnung von Wurzelorten. *Messen-Steuern-Regeln* 6 (1963), 11, 456—460.
- [10] D. J. Doda: The Digital Computer Makes Root Locus Easy. *Contr. Engineering* 5 (1958), 5, 102—106.
- [11] B. B. Kuo: *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall, N. Y. 1962, str. 263.
- [12] W. Spelt: Příručka regulační techniky. SNTL 1958, 250—255.
- [13] Г. А. Бендриков, К. Ф. Теодорчик: Траектории корней линейных автоматических систем. Издательство „Наука“, Москва 1964.

SUMMARY

Some Function Properties of the Root Locus Diagram

MIROSLAV ROSENBAUM

The use of the numerico-graphical root locus method is usually confined to cases with single loop feedback circuits or to cases where, the order of the absolute values of poles and zeros of the open-loop transfer function differ at most by one. In the present paper the known method of the analytic expression of the root locus diagram is indicated and their technical justification is shown. Special attention is paid to the possibilities of approximate solution of the characteristic equation based on the replacement of a diagram segment by the tangent. This procedure is justified both by the limited accuracy of the mathematical model of the plant and by a series of methods for finding real roots of polynomials which can be easily programmed on computers. The advantages of these methods excel especially in cases when the plant is nonlinear and the mathematical models depend on variable state space coordinates.

Dr. Miroslav Rosenbaum, CSc., Katedra automatizace chemických výroby, Vysoká škola chemickotechnologická, Technická 9105, Praha 6.