Dynamická optimalizácia riadenej mnohoparametrickej sústavy s ohraničením na riadiace aj riadené veličiny

JÁN ULIČNÝ

V praxi sa veľmi často vyskytujú prípady, kedy je nutné klásť ohraničujúce podmienky nielen na riadiace, ale aj na riadené veličiny. Autor v práci dokazuje, za akých podmienok môžu byť riadené veličiny vyvedené na hranicu dovolenej oblasti výstupných veličín riadenej sústavy, za predpokladu, že prípustné riadenia sú z dovolenej oblasti riadenia.

1. ÚVOD

V dynamickej optimalizácii riadenej mnohoparametrickej sústavy, ktorú sme vyšetrovali v práci [1] sme predpokladali, že je ohraničená len množina $L(\mathbf{u})$, t.j. dovolená oblasť riadenia. Nekládli sme žiadne ohraničenia na zastupujúci bod $\mathbf{x}$, patriaci do fázového priestoru X_n, t.zn., že fázový priestor riadenej sústavy X_n splýval s celým fázovým priestorom X. V inžinierskej praxi sú však oveľa dôležitejšie také prípady, kedy fázový priestor riadenej sústavy X_n nemôže z rôznych príčin (napríklad havarijných) splývať s celým fázovým priestorom X. Potom ak riadenie $\mathbf{u} \in L(\mathbf{u})$ má na riadenú sústavu veľký vplyv, dokonca taký, že zastupujúci bod $\mathbf{x}$ môže vyviesť z dovoleného riadeného priestoru X_n, musíme z hľadiska zvoleného kritéria optimálnosti, ktorému má riadená sústava vyhovovať, volit len také, prípustné riadenie, pre ktoré príslušná fázová trajektória zastupujúceho bodu $\mathbf{x}$ leží v priestore X_n.

Predpokladajme, že máme neriadenú sústavu, ktorá je popísaná nasledovným diferenciálnym systémom

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)], \quad x_i(t)_0 = x_i(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

kde $x_i = x_i(t)$ sú výstupné veličiny neriadenej sústavy. O funkciách φ_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ predpokladajme, že sú to spojité funkcie vzhľadom k premenným

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a sú tiež vzhľadom k týmto premenným spojite diferencovateľné v priestore X. Naviac predpokladajme, že existuje derivácia funkcie φ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ podľa času. Ďalej predpokladajme, že procesy prebiehajúce v neriadenej sústave sú v rovine (x_i, t) asymptoticky klesajúce a s rastúcim časom sa blížia k osi času. Podobné procesy s touto charakteristickou črtou sa vyskytujú obyčajne v chémii, ekonómii, ale aj v technickej praxi, kde majú aperiodický charakter.

Podobne, ako v práci [1] budeme predpokladať, že riadenú sústavu môžeme popísať diferenciálnym systémom

$$(1.2) \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] + b_{ii}\, u_i(t), \; x_i(t_0) = x_i(0) \; (i = 1, 2, \dots, n)$$

a dovolenú oblasť riadenia $L(\boldsymbol{u})$ výrazom

$$(1.3) \qquad |u_i| \leqq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

O koeficientoch b_{ii} $(i = 1, 2, \dots, n)$ predpokladajme, že sú to reálne čísla, ktoré nie sú všetky rovné nule. Z rovnice (1.2) vidíme, že neriadenú sústavu (1.1) by sme dostali, keby sme súčin $b_{ii}\, u_i(t)$ položili identicky rovný nule.

V práci [1] sme si úlohu optimálneho riadenia v riadenej sústave definovali nasledovne.

Definícia 1. Budeme hovoriť, že procesy, prebiahajúce v riadenej sústave sú optimálne, ak v každom časovom okamžiku $t \geqq 0$ výstupné veličiny riadenej sústavy $x_i = x_i(t)$ vyhovujú systému (1.2) pro počiatočných podmienkách $x_i(0)$ a kritériu optimálnosti

$$(1.4) \qquad D(t) = \min_{\mathbf{v}} \sum_{i}^{n} |x_i(t)|,$$

za predpokladu, že riadenie $\mathbf{v}$ je z dovolenej oblasti (1.3) a n- je rád riadenej sústavy.

Preveďme si diferenciálny systém (1.2) popisujúci riadenú sústavu na diferenčný systém, t.j. na tvar

$$(1.5) \qquad x_{i,N+1} = H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \dots, x_{n,N}) + \Delta b_{ii} u_{i,N}, \quad x_{i,0} = x_i(0),$$

kde

$$(1.6) \qquad H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \dots, x_{n,N}) = x_{i,N} + \Delta \varphi_i(x_{1,N}, x_{2,N}, \dots, x_{n,N})$$

a miesto každého okamžiku t, $t \geqq 0$ uvažujme len hodnoty

$$(1.7) \qquad t_N = N\Delta, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

kde Δ je malé kladné číslo, predstavujúce prírastok času pri prechode riadenej sústavy z jedného stavu $x_{i,N}$ do stavu druhého, t.j. do $x_{i,N+1}$. Potom kritérium optimálnosti

(1.4) prechádza do tvaru

$$D_{N+1} = \min_{\mathbf{v}_N} \sum_{i=1}^{n} |x_{i,N+1}| \quad (N = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.8}$$

kde

$$x_{i,N+1} = H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_{ii} v_{i,N} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

a $v_{i,N}$ je prípustné riadenie z dovolenej oblasti (1.3) na N-tom stave riadenej sústavy. Nech

$$u_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) = v^*_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) \tag{1.10}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, 1, 2, \ldots)$$

sú zložky vektora optimálneho riadenia $\boldsymbol{u}$ z oblasti (1.3), ktoré minimalizujú výraz (1.8). Potom po dosadení výrazu (1.10) do rovnice (1.9) dostávame výraz (1.5), ktorý nám predstavuje diferenčný tvar rovníc riadenej sústavy.

V práci [1] bol odvodený nasledovný algoritmus pre výpočet zložiek optimálneho riadenia (1.10)

$$u_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) = \begin{cases} +1 & \text{ak} \quad H_{i,N} \leqq -\Delta b_{ii}\,, \\ -\dfrac{H_{i,N}}{\Delta b_{ii}} & \text{ak} \quad -\Delta b_{ii} < H_{i,N} < \Delta b_{ii}\,, \\ -1 & \text{ak} \quad H_{i,N} \geqq \Delta b_{ii} \end{cases} \tag{1.11a}$$

pre $b_{ii} > 0$ a $(i = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, 1, 2, \ldots)$ a

$$u_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) = \begin{cases} +1 & \text{ak} \quad H_{i,N} \geqq -\Delta b_{ii}\,, \\ -\dfrac{H_{i,N}}{\Delta b_{ii}} & \text{ak} \quad \Delta b_{ii} < H_{i,N} \leqq -\Delta b_{ii}\,, \\ -1 & \text{ak} \quad H_{i,N} \leqq \Delta b_{ii} \end{cases} \tag{1.11b}$$

pre $b_{ii} < 0$ a $(i = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, 1, 2, \ldots)$.

Realizáciu výpočtu zložiek optimálneho riadenia podľa algoritmu (1.11) a diskrétnych zložiek optimálnej fázovej trajektorie riadenej sústavy (1.5) prevádzame nasledovne:

Predpokladajme, že stav riadenej sústavy (1.5) v časovom okamžiku $t_N = N\Delta$ sme už vypočítali, t.j. že poznáme súradnice $(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N})$ zastupujúceho bodu $\mathbf{x}_N$. Potom z výrazu (1.6) vypočítame hodnoty funkcie $H_{i,N}$ v bode $\mathbf{x}_N$ pre $(i = 1, 2, \ldots \ldots, n)$. Za pomoci hodnôt funkcií $H_{i,N}$ určíme zložky vektoru optimálneho riadenia $\boldsymbol{u}_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N})$ z algoritmov (1.11). Zo známych hodnôt zložiek optimálneho riadenia $u_{i,N}$ na N-tom stave riadenej sústavy vypočítame $(N + 1)$-vý stav sústavy z výrazu (1.5). Výpočet na $(N + 1)$-vom stave a ďalších sa opakuje ako na N-tom stave.

Výpočet ukončíme, ak pre niektoré N platí výraz

$$|x_{i,N+1} - x_{i,N}| \leqq \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.12}$$

kde ε je predom zvolená malá kladná konštanta, vyplývajúca z presnosti výpočtu.

Vysvetlíme si teraz, aké ohraničenia procesov prebiehajúcich v riadenej sústave budeme uvažovať. Předovšetkým všimnime si toho dôležitého predpokladu, že procesy, prebiahajúce v neriadenej sústave nepretínajú os času v rovine (x_i, t). V mnohých praktických prípadoch je nutné dodržať túto podmienku aj u riadených procesov, kde v žiadnom prípade nesmieme dovoliť, avy riadené procesy nadobúdali záporných hodnôt. Podľa predpokladu je neriadená sústava stabilná. Riadená sústava vzhľadom na to, že procesy v nej prebiehajúce majú vyhovovať kritériu optimálnosti (1.4), bude tiež stabilná. Avšak vôbec nie je zaručené, že procesy v riadenej sústave budú vyhovovať podmienke $x_i(t) \geqq 0$ pre každé $t \geqq 0$. Ak je nutné dodržať túto podmienku, potom algoritmus výpočtu optimálneho riadenia (1.11) ostáva nezmenený, t.j. plne rešpektuje pri realizácii výpočtu ohraničenia $x_i(t) \geqq 0$, $t \geqq 0$, musíme však vydeliť oblasť počiatočných podmienok $E(0)$ riadenej sústavy z priestoru X_n, pre ktorú platí, že ak je vektor počiatočných podmienok $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0))$ z tejto oblasti potom procesy prebiahajúce v riadenej sústave vyhovujúce kritériu optimálnosti (1.4) nepretínajú os času pre $t \geqq 0$. Sformulujme si úlohu optimálneho riadenia za týchto podmienok do nasledovnej definície:

Definícia 2. Budeme hovoriť, že procesy, prebiehajúce v riadenej sústave sú optimálne, ak v každom časovom okamžiku $t \geqq 0$ výstupné veličiny riadenej sústavy $x_i = x_i(t)$ vyhovujú systému (1.2) pri počiatočných podmienkach $\mathbf{x}(0) \in E(0)$, kritériu optimálnosti (1.4) za predpokladu, že prípustné riadenie je z dovolenej oblasti (1.3) a — sú nezáporné pre každé $t \geqq 0$.

Druhým typom ohraničenia na riadený proces $x_i(t)$ môže byť napr. oblasť $G_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqq 0$, ktorú dostaneme ako rozdiel bodov priestoru X a bodov riadeného priestoru X_n, t.j. $G_n = X - X_n$. Riadený priestor je daný potom nasledovne: $X_n = X - G_n$. Je zrejmé potom, že zastupujúci bod, pohybujúci sa po fázovej trajektórii riadenej sústavy nesmie prekročiť hranicu riadeného priestoru X_n, t.z. že pre zastupujúci bod $\mathbf{x}$ a riadenie $\mathbf{u}$ musí platiť podmienka $G_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqq 0$. Vyjadrime si oblasť $G_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ parametricky, kde parametrom je čas t. Potom platí, že pre riadený proces musí byť splnená podmienka $g_i(t) \geqq 0$, kde $g_i(t) = x_i(t) - h_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pre každé $t \geqq 0$. O funkciách $h_i = h_i(t)$ predpokladajme, že sú to funkcie dostatočne hladké, ktorých derivácia podľa času je záporná, t.j. platí: $h_i'(t) < 0$ pre každé $t \geqq 0$ a naviac nech $h_i = h_i(t) < x_i^0(t)$ pre každé $t \geqq 0$ a $(i = 1, 2, \ldots, n)$, kde $x_i^0(t)$ sú procesy, prebiehajúce v neriadenej sústave, tzn. že $x_i^0(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vyhovujú systému (1.1) pri počiatočných podmienkach $x_i(0)$. Podmienka $h_i'(0) < 0$ vyplýva z podmienky konvergencie zastupujúceho bodu $\mathbf{x}$ k počiatku súradnicového systému priestoru X_n. Podmienka $h_i(t) < x_i^0(t)$ vyplýva zo skutočnosti, že z hľadiska uvažovaného kritéria optimálnosti (1.4), ktorému majú vyhovovať procesy v riadenej sústave by nemalo zmyslu zadávať napr. opačné ohraničujúce podmienky (t.j. $h_i(t) > x_i^0(t)$). I v tomto prípade algoritmus na výpočet zložiek optimálneho riadenia (1.11) zostáva nezmenený. Je však treba dokázať, že zložky optimálneho riadenia $u_i^*(t)$, ktoré majú vyviesť riešenie systému (1.2) pri počiatočných podmienkach $x_i(0)$ na hranicu dovolenej oblasti G_n a ktoré súčasne musia vyhovovať kritériu optimálnosti (1.4), patria do dovolenej oblasti riadenia (1.3), t.j. že platí podmienka $\boldsymbol{u}^* \in L(\boldsymbol{u})$. Predpokladajme, že procesy, prebiehajúce v riadenej sústave majú vyhovovať jednému aj druhému typu ohraničení, t.zn., že na riadené procesy kladieme požiadavku nielen, aby boli nezáporné pre $t \geqq 0$, ale naviac aby zastupujúci bod fázovej trajektórie riadenej sústavy, vyhovujúci kritériu optimálnosti (1.4) nadobúdal hodnôt pre ktoré platí podmienka $G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geqq 0$ za predpokladu, že uvažujeme dovolenú oblasť riadenia (1.3). Definujme si optimálny riadený proces v týchto podmienkach nasledovne.

Definícia 3. Budeme hovoriť, že procesy, prebiehajúce v riadenej sústave sú optimálne, ak v každom časovom okamžiku $t \geqq 0$ výstupné veličiny riadenej sústavy $x_i(t)$ vyhovujú systému (1.2) s počiatočnými podmienkami $\boldsymbol{x}(0) \in E(0)$, kritériu optimálnosti (1.4) pri podmienke (1.3), sú nezáporné a platí pre ne podmienka $g_i(t) \geqq 0$.

V ďalších častiach tejto práce sa budeme zaoberať optimálnymi procesmi definovanými v definíciach 2,3 a nakoniec celú problematiku použijeme pri výpočtu optimálneho riadenia na konkrétnej sústave na ktorú budú naložené ohraničenia. ako na riadiace, tak aj na riadené veličiny.

2. VYDELENIE OBLASTI POČIATOČNÝCH PODMIENOK $E(o)$

Skôr než určíme oblasť počiatočných podmienok $E(o)$, pre ktoré má systém (1.2) nezáporné riešenie $x_i(t) \geqq 0$ vyhovujúce kritériu optimálnosti (1.4), pričom prípustné riadenie je z dovolenej oblasti (1.3), dokážeme si niekoľko viet, ktorých budeme pozdejšie používať.

Veta 1. *Nech procesy, prebiehajúce v neriadenej sústave* (1.1) *sú asymptoticky klesajúcimi procesmi pre ktoré platí*

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{2.1}$$

Potom funkcie $\varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sú rastúcimi funkciami času a klesajúcimi funkciami parametru* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dôkaz. Preložme v pravouhlom súradnicovom systéme (t, x_i) priamku $\xi_i(t) = k_i t + v_i$ tak, aby mala v okamžikoch t_1 a t_3 $(t_1 < t_3)$ s procesom $x_i = x_i(t)$ spoločné body $\xi_i(t_1) = x_i(t_1)$ a $\xi_i(t_3) = y_i(t_3)$. Je zrejmé, že ak sú splnené predpoklady vety 1, platí pre ľubovoľné t_2, $t_1 < t_2 < t_3$ vzťah

$$\xi_i(t_2) > x_i(t_2) . \tag{2.2}$$

 Priamka ξ_i idúca cez body $x_i(t_1)$, $x_i(t_3)$ v okamžikoch t_1, t_3 má rovnicu

$$\xi_i(t) = x_i(t_1) + [x_i(t_3) - x_i(t_1)] \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}. \tag{2.3}$$

Keď berieme do úvahy nerovnosť (2.2) bude pre vzťah (2.3) v okamžiku $t = t_2$ platiť

$$x_i(t_2) < x_i(t_1) + [x_i(t_3) - x_i(t_1)] \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}. \tag{2.4}$$

Po menšej úprave nerovnosti (2.4) dostávame

$$x_i(t_2)(t_3 - t_1) < x_i(t_1)(t_3 - t_1) + [x_i(t_3) - x_i(t_1)](t_2 - t_1). \tag{2.5}$$

Po prevedení naznačených operácií v nerovnosti (2.5), po odpočítaní od každej strany súčinu $x_i(t_2)\, t_2$ a po menšej úprave dostávame

$$\begin{aligned}[x_i(t_2) - x_i(t_1)]\, t_3 - [x_i(t_2) - x_i(t_1)]\, t_2 < [x_i(t_3) - x_i(t_2)]\, t_2 - \\ - [x_i(t_3) - x_i(t_2)]\, t_1,\end{aligned} \tag{2.6}$$

alebo

$$[x_i(t_2) - x_i(t_1)](t_3 - t_2) < [x_i(t_3) - x_i(t_2)](t_2 - t_1). \tag{2.7}$$

Pretože platí $0 < t_1 < t_2 < t_3$ platí aj nerovnosť

$$\frac{x_i(t_2) - x_i(t_1)}{t_2 - t_1} < \frac{x_i(t_3) - x_i(t_2)}{t_3 - t_2}. \tag{2.8}$$

Ak platí nerovnosť (2.8), platí samozrejme aj nerovnosť

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_i(t_2) - x_i(t_1)}{t_2 - t_1} < \lim_{t_3 \to t_2} \frac{x_i(t_3) - x_i(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{\mathrm{d}x_i(t_2)}{\mathrm{d}t_2}, \tag{2.9}$$

t.zn., že platí

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t_1)}{\mathrm{d}t_1} < \frac{\mathrm{d}x_i(t_2)}{\mathrm{d}t_2} \tag{2.10}$$

ale z (1.1) vyplýva, že

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = \varphi_i[x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_n(t_1)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.11a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t_2)}{\mathrm{d}t_2} = \varphi_i[x_1(t_2), x_2(t_2), \ldots, x_n(t_2)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.11b}$$

Z nerovnosti (2.10) potom vyplýva nerovnosť

(2.12) $\varphi_i[x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)] < \varphi_i[x_1(t_2), x_2(t_2)), \dots, x_n(t_2)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Podľa predpokladu vety 1 pre ľubovolné t_1, t_2, pre ktoré platí nerovnosť

$$0 \leqq t_1 < t_2 \,, \tag{2.13}$$

platí, že

$$x_i(t_1) > x_i(t_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \,. \tag{2.14}$$

Z nerovnosti (2.13), (2.14) a (2.12) je zrejmé, že funkcia φ_i, $(i = 1, 2, \dots, n)$ je rastúcou funkciou času a klesajúcou funkciou paramatru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, čo sme mali dokázať.

Poznámka. Pretože pre ľubovoľné t_1, t_2, t_3, pre ktoré platí $0 \leqq t_1 < t_2 < t_3$ platí aj nerovnosť $x_i(t_1) > x_i(t_2) > x_i(t_3)$, budú platiť aj nerovnosti $t_2 - t_1 > 0$, $t_3 - t_2 > 0$ a $x_i(t_2) - x_i(t_1) < 0$, $x_i(t_3) - x_i(t_2) < 0$. Potom z nerovností (2.8)–(2.12) vyplýva, že $\varphi_i[x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)] < \varphi_i[x_1(t_2), x_2(t_2), \dots, x_n(t_2)] < 0$, alebo obecne pre $t \geqq 0$ platí, že $\varphi_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] < 0$.

Veta 2. *Nutnou a postačujúcou podmienkou k tomu, aby procesy v neriadenej sústave* (1.1) *pre ľubovoľné* t_1, t_2, t_3, *pre ktoré platí nerovnosť* $0 \leqq t_1 < t_2 < t_3$, *vyhovovali nerovnosti* (2.4) *je aby*

$$\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{dt} > 0 \,, \quad t \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \,. \tag{2.15}$$

Dôkaz. a) Nech $x_i(t)$, $t \geqq 0$ vyhovuje nerovnosti (2.4). Potom ale podľa vety 1 je φ_i rastúcou funkciou času. Pre rastúcu funkciu času, ktorá má pre každé $t \geqq 0$ deriváciu (tú sme predpokladali pri formulácii neriadenej sústavy (1.1)) nutne musí platiť $\varphi_i' > 0$. b) Podmienka $\varphi_i' > 0$ je aj postačujúcou podmienkou k tomu, aby $x_i(t)$, $t \geqq 0$ vyhovoval nerovnosti (2.4). Skutočne, predpokladajme, že $\varphi_i' > 0$. Je zrejmé, že potom funkcia φ_i je rastúcou funkciou času pre každé $t \geqq 0$. Potom pre každé t_1, t_2, pre ktoré platí nerovnosť $0 \leqq t_1 < t_2$ platí aj nerovnosť (2.12), ktorú sme dostali úpravou zo vzťahu (2.4) za predpokladu, že pre ľubovoľné t_1, t_2, t_3 platila nerovnosť $0 \leqq t_1 < t_2 < t_3$. Tým je veta dokázaná.

Dokážeme si teraz nasledujúcu vetu, ktorá nám hovorí o maximálnom spáde riadeného procesu v rovine (t, x_i).

Veta 3. *Nech pre funkciu* φ_i' *platí podmienka* (2.15). *Ďalej nech procesy* $x_i(t) > 0$ *a* $\eta_i(t) > x_i(t) > 0$, $t \geqq 0$ *sú procesy prebiehajúce v riadenej sústave* (1.2), *ktoré vyhovujú kritériu optimálnosti* (1.4) *za predpokladu, že prípustné riadenia* $u_i(t)$ *a* $\tilde{u}_i(t)$ *sú z dovolenej oblasti riadenia* (1.3). *Potom platia nasledovné vzťahy*:

a)

$$\varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + b_{ii}\, u_i(b) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.16}$$

kde

$$\begin{cases} u_i(t) = -1 \quad ak \quad b_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, & (2.17a) \\ u_i(t) = 1 \quad ak \quad b_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) & (2.17b) \end{cases}$$

pre $x_i(t) > 0,\ t \geqq 0,$

b)

$$\begin{cases} \tilde{u}_i(t) > -1 \quad ak \quad b_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \\ \tilde{u}_i(t) < 1 \quad ak \quad b_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{2.18a}$$

pre $\eta_i(t) > x_i(t) > 0,\ t \geqq 0.$

Dôkaz. a) V práci [1] bola zdôraznená tá skutočnosť, že výraz (1.8) t.j. D_{N+1} pre niektoré $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ dosiahne svojej minimálnej hodnoty vtedy a len vtedy, ak dosiahnu minimum pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$, výrazy $|x_{i,N+1}|$ za predpokladu, že prípustné riadenie $v_{i,N}$ je z dovolenej oblasti riadenia (1.3). Predpokladajme, že premenná $t \geqq 0$ sa mení nespojite po malých kladných intervaloch Δ. Potom namiesto D_{N+1} môžeme písať $D(t + \Delta)$ a namiesto $|x_{i,N+1}|$ výraz $|x_i(t + \Delta)|$. Potom pre každú hodnotu $x_i(t) > 0$ a $x_i(t + \Delta) > 0$ a pre $v_i(t)$ z dovolenej oblasti riadenia (1.3), je maximálna vzdialenosť v rovine (t, x_i) medzi polohou bodu $x_i(t)$ a polohou bodu pre ktorý platí $\min_{v_i} |x_i(t + \Delta)|$ daná výrazom

$$x_i(t) - \min_{v_i} |x_i(t + \Delta)| = \max_{v_i} |x_i(t) - x_i(t + \Delta)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2.19}$$

Upravme si výraz (2.19) takto

$$\min_{v_i} |x_i(t + \Delta)| = x_i(t) - \max_{v_i} |x_i(t) - x_i(t + \Delta)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2.20}$$

Z výrazu (2.20) je vidieť, že výraz $|x_i(t + \Delta)|$ nadobúda svoju minimálnu hodnotu v tom istom bode v_i, v ktorom výraz $|x_i(t) - x_i(t + \Delta)|$ nadobúda svoju maximálnu hodnotu. Túto skutočnosť si môžeme ľahko overiť na základe platnosti vzťahu: $\max(-\mu_i) = -\min \mu_i$. Preveďme si diferenciálny systém (1.2) na diferenčný a berme do úvahy obecné prípustné riadenie $v_i(t)$ z oblasti (1.3). Je zrejmé, že potom platí

$$x_i(t + \Delta) = x_i(t) + \Delta\varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + \Delta b_{ii}\, v_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.21}$$

Potom tiež platí

$$\max_{v_i} |x_i(t) - x_i(t + \Delta)| = \max_{v_i} |-\Delta\varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] - \Delta b_{ii}\, v_i(t)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.22}$$

Z poznámky za vetou 1 vyplýva, že $\varphi_i < 0$. Potom, ak predpokladáme, že $b_{ii} > 0$ bude výraz (2.22) maximálny vtedy a len vtedy, ak pre optimálne $v_i^*(t)$ z oblasti (1.3) platí: $v_i^*(t) = u_i(t) = -1$ a pre $b_{ii} < 0$: $u_i^*(t) = u_i(t) = 1$. Potom je zrejmé, že súčin $b_{ii}\,u_i(t)$ je vždy záporný. Suma dvoch záporných funkcií $\varphi_i + b_{ii}\mu_i$ je tiež záporná funkcia. Tým sú dokázané vzťahy (2.16) a (2.17).

b) Je zrejmé, že maximálny spád riadeného procesu $x_i(t) > 0$ určuje riešenie systému (1.2) za predpokladu, že $u_i(t)$ vyhovuje podmienkám (2.17). Predpokladajme teraz, že procesy prebiehajúce v riadenej sústave (1.2) nemôžu z nejakých príčin sledovať proces maximálneho spádu, ale môžu prebiehať len po krivke $\eta_i(t) = x_i(t) + \delta$ (kde δ je malé kladné číslo) za predpokladu, že $\tilde{u}_i$ je z dovolenej oblasti riadenia. Treba dokázať, že pre toto $\tilde{u}_i(t)$ platia potom vzťahy (2.18). Postupujme naledovne. Dosadíme riešenie $\eta_i(t)$ a jemu príslušnú funkciu $\tilde{u}_i(t)$ do systému (1.2). Dostaneme

$$(2.23)\qquad \frac{d\eta_i(t)}{dt} = \varphi_i[\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)] + b_{ii}\,\tilde{u}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

ale

$$(2.24)\qquad \frac{d\eta_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{x_i(t) + \delta\} = \frac{dx_i(t)}{dt} = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + b_{ii}\,u_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Z výrazov (2.23) a (2.24) potom platí

$$(2.25)\qquad \varphi_i[\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)] + b_{ii}\,\tilde{u}_i(t) = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + b_{ii}\,u_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Pretože podľa predpokladu vety 3 je $\eta_i(t) > x_i(t)$, platí podľa vety 1 nerovnosť

$$(2.26)\qquad \varphi_i[\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)] < \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alebo

$$(2.27)\qquad \varphi_i[\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)] - \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Z nerovností (2.25) a (2.27) vyplýva výraz

$$(2.28)\qquad b_{ii}(u_i(t) - \tilde{u}_i(t)) = \varphi_i[\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)] - \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alebo

$$(2.29)\qquad b_{ii}(u_i(t) - \tilde{u}_i(t)) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Potom, ak predpokladáme, že $b_{ii} > 0$ bude výraz (2.29) záporný vtedy a len vtedy, ak platí $\tilde{u}_i > u_i = -1$ a pre $b_{ii} < 0 : \tilde{u}_i < u_i = 1$, čo sme mali dokázať. Tým je veta dokázaná.

Vyslovme si teraz vetu, ktorá nám určuje oblasť počiatočných podmienok $E(o)$ pre riadené procesy určené definíciou 2.

Veta 4. *Nech oblasť* $E(0)$, *t.j. oblasť počiatočných podmienok riadenej sústavy* (1.2) *vyhovujúcej kritériu optimálnosti* (1.4) *za predpokladu, že prípustné riadenie je z dovolenej oblasti* (1.3), *je daná systémom nerovností*

$$\begin{cases} \varphi_i'[x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)] > 0 & (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \quad (2.30a) \\ \varphi_i[x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)] + \beta_{ii} \geqq 0 & (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \quad (2.30b) \end{cases}$$

kde $\beta_{ii} = |b_{ii}|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Potom procesy prebiehajúce v tejto riadenej sústave sú nezáporné pre každé* $t \geqq 0$.

Dôkaz. a) O procesoch prebiehajúcich v neriadenej sústave (1.1) sme predpokladali, že sú to asymptoticky klesajúce procesy vyhovujúce podmienke (2.1). Ako sme ukázali vo vete 1, tieto procesy vyhovujú nerovnosti (2.4). Vo vete 2 sme dokázali, že nutnou a postačujúcou podmienkou k tomu, aby procesy prebiehajúce v neriadenej sústave vyhovovali nerovnosti (2.4) je platnosť nerovnosti (2.15) pre každé $t \geqq 0$, čiže aj pre $t = 0$. Z toho už vyplýva nerovnosť (2.30a).

b) Za predpokladu, že procesy, prebiehajúce v neriadenej sústave vyhovujúce systému (1.1) a podmienke (2.30a) máme dokázať, že procesy prebiehajúce v riadenej sústave vyhovujúce systému (1.2), podmienkam (1.4) a (1.3), sú nezáporné, ak platí podmienka (2.30b). Uvažujme nasledovne: Po prevedení diferenciálneho systému (1.2) na diferenčný, dostávame výraz (2.21). Predpokladajme, že namiesto koeficienta b_{ii} sme dosadili do systému (2.21) nejaké reálne $b_{ii}^* \neq 0$. Položme si teraz takúto otázku. Aké musí byť b_{kk}^* pre konkrétne $i = k$ v systéme (2.21), aby optimálny priebeh procesu $x_k(t)$ bol nezáporný t.j. aby platilo $x_k(t) \geqq 0$. Vyšetrujme najprv prípad, pre aké b_{kk}^* bude od určitého okamžiku $t \geqq t^* > 0$ optimálny proces $x_k(t)$ v rovine (t, x_k) identický rovný nule. Zo systému (2.21) pre $i = k$ s koeficientom b_{kk}^* dostávame rovnicu

$$x_k(t + \Delta) = x_k(t) + \Delta\varphi_k[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + \Delta b_{kk}^* u_k(t)\,. \tag{2.31}$$

Ak má platiť pre určité $t \geqq t^* : x_k(t) \equiv 0$, potom samozrejme bude platiť aj $x_k(t + \Delta) \equiv 0$. Potom z výrazu (2.31) vyplýva

$$\varphi_k[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + b_{kk}^* u_k(t) = 0\,, \quad t \geqq t^*\,. \tag{2.32}$$

Upravme si výraz (2.32) nasledovne

$$b_{kk}^* u_k(t) = -\varphi_k[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]\,, \quad t \geqq t^*\,, \tag{2.33}$$

$$|b_{kk}^* u_k(t)| = |b_{kk}^*|\,|u_k(t)| = |\varphi_k[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]|\,, \quad t \geqq t^*\,, \tag{2.33a}$$

$$|u_k(t)| = \frac{|\varphi_k[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]|}{|b_{kk}^*|} \leqq 1\,, \quad t \geqq t^*\,. \tag{2.33b}$$

Potom z výrazu (2.33b) platí

$$(2.34) \qquad |\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)] \leqq ||b_{kk}^*|, \quad t \geqq t^* .$$

Z nerovnosti (2.34) vyplýva, že ak optimálny proces $x_k(t)$ má byť od určitého okamžiku $t \geqq t^*$ identický rovný nule v rovine (t, x_k), musí byť b_{kk}^* v absolútnej hodnote väčšie, alebo nanajvýš rovné funkcii $\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]$ v absolútnej hodnote pre $t \geqq t^*$. Z realizácie kritéria optimálnosti (1.4) na riadenú sústavu (1.2) a z dôkazu vety o maximálnom spáde optimálneho procesu $x_i(t) > 0$, $t \geqq 0$ platí pre každé $i \neq k$ nerovnosť: $x_i(t^*) < x_i(0)$. Pre $i = k$ platí: $0 \equiv x_k(t^*) < x_k(0)$, $t \geqq t^*$. Potom podľa vety 1 platí nerovnosť

$$(2.35) \qquad \varphi_k[x_1(0), \ldots, x_k(0), \ldots, x_n(0)] > \varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)] , \quad t \geqq t^* .$$

Pretože φ_k je záporné bude platiť aj nerovnosť

$$(2.36) \qquad |\varphi_k[x_1(0), \ldots, x_k(0), \ldots, x_n(0)]| < |\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]| , \quad t \geqq t^* .$$

Predpokladajme teraz, že pre niektoré reálne $b_{kk} \neq 0$ platí

$$(2.37) \qquad |b_{kk}| \geqq |\varphi_k[x_1(0) \ldots, x_k(0), \ldots, x_n(0)]| .$$

Potom z nerovností (2.36) a (2.37) vyplýva

$$(2.38) \qquad |\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]| < |b_{kk}| , \quad t \geqq t^* .$$

Z nerovností (2.34) a (2.38) vidíme, že na koeficiente b_{kk} je kladená prísnejšia podmienka, čo zaručuje, že ak b_{kk}^* udrží proces $x_k(t)$, $t \geqq t^*$ na nulovej hodnote v rovine (t, x_k), potom ho udrží určite aj koeficient b_{kk}. Ak dosadíme do nerovnosti (2.37) β_{kk} za $|b_{kk}|$ a zo skutočnosti, že $\varphi_k < 0$, dostaneme po úprave odtiaľto výraz (2.30b) za predpokladu, že $i = k$. Pre $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $i \neq k$ by sme výraz (2.30b) dokázali podobným spôsobom.

Teraz si dokážme, že výraz (2.30b) je splnený aj pre $x_k(t) > 0$, $t \geqq 0$. Podľa vety o maximálnom spáde pre $x_i(t) > 0$, $t \geqq 0$ platí

$$(2.39) \qquad \varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)] + b_{kk}\, u_k(t) < 0 , \quad t \geqq 0 .$$

Upravujme si nerovnosť (2.39) nasledovne

$$(2.40) \qquad b_{kk}\, u_k(t) < -\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)] , \quad t \geqq 0 ,$$

$$(2.40a) \qquad |b_{kk}\, u_k(t)| = |b_{kk}|\, |u_k(t)| < |\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]| , \quad t \geqq 0 ,$$

$$(2.40b) \qquad |u_k(t)| = \frac{|\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]|}{|b_{kk}|} \leqq 1 , \quad t \geqq 0 .$$

Potom z výrazu (2.40b) platí

$$(2.41) \qquad |\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)]| \leqq |b_{kk}| , \quad t \geqq 0 .$$

Ak dosadíme do nerovnosti (2.41) β_{kk} za $|b_{kk}|$ a bereme do úvahy, že φ_k je záporná, potom dostávame nerovnosť

$$\varphi_k[x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)] + \beta_{kk} \geqq 0 \,, \quad t \geqq 0 \,. \tag{2.42}$$

Podobne by sme previedli dôkaz pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $i \neq k$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Z dôkazu vety 4 vyplýva, že ak pre β_{ii}, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platí podmienka (2.30b) za predpokladu, že platí aj (2.30a) budú optimálne procesy vyhovovať definícii 2.

3. VYVEDENIE RIADENEHO PROCESU NA HRANICU OBLASTI $g_i(t) \geqq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Budeme sa zaoberať riadenými procesmi, ktoré sú definované definíciou 3. V úvode sme si oblasť $G_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqq 0$ určili parametricky takto: $g_i(t) \geqq 0$, kde $g_i(t) = x_i^*(t) - h_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, kde $x_i^*(t)$ je optimálny riadený proces vyhovujúci definícii 3. Aby pri ďalších úvahách nedochádzalo k omylom, alebo zámene procesov vyhovujúcich rôznym podmienkam, vysvetlíme si ich označenia, ktoré budeme používať. Predovšetkým budeme predpokladať, že tak neriadená ako aj riadená sústava má počiatočné podmienky z oblasti $E(o)$. Potom pre $t \geqq 0$

$x_i^0(t)$ – je proces prebiehajúci v neriadenej sústave vyhovujúcej systému (1.1),
$x_i(t)$ – je proces vyhovujúci súčasne def. 2 a vete o maximálnom spáde,
$u_i(t)$ – riadenie príslušné k procesu $x_i(t)$,
$x_i^*(t)$ – je proces vyhovujúci definícii 3,
$u_i^*(t)$ – riadenie príslušné k procesu $x_i^*(t)$,
$\hat{x}_i(t)$ – $x_i(o)$,
$\hat{u}_i(t)$ – riadenie príslušné k procesu $\hat{x}_i(t)$.

Dokážme si teraz vetu, ktorá nám rieši vzájomný vzťah ohraničení $g_i(t) \geqq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a $L(\mathbf{u})$ vzhľadom k optimálnemu procesu $x_i^*(t)$.

Veta 5. *Nech funkcia $h_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $t \geqq 0$ vyhovuje nasledovným podmienkam*

$$h_i(t) < x_i^0(t) \,, \quad t \geqq 0 \tag{3.1a}$$

$$h_i'(t) < 0 \quad , \quad t \geqq 0 \,. \tag{3.1b}$$

Aspoň pre niektoré t, $t > t_i$ nech platí

$$h_i(t) > x_i(t) \,. \tag{3.1c}$$

Nech má v bode $t = t_i$ hodnotu

$$h_i(t_i) = x_i(t_i) \tag{3.1d}$$

a konečne nech platí

$$h_i'(t) > x_i'(t) \quad \text{pre} \quad t_i \leqq t < \vartheta_i \tag{3.1e}$$

a

$$h_i'(t) \leqq x_i'(t) \quad \text{pre} \quad t \geqq \vartheta_i \tag{3.1f}$$

Ďalej nech optimálne procesy $x_i^*(t)$ vyhovujú systému (1.2) pri počiatočných podmienkach z oblasti $E(0)$ a kritériu optimálnosti (1.4). Potom na to, aby optimálny riadený proces $x_i^*(t)$ bol vyvedený na hranicu oblasti $g_i(t) \geqq 0$ stačí, ak príslušné riadenie $u_i^*(t)$ je z dovolenej oblasti riadenia $L(\mathbf{u})$, t.j. z oblasti (1.3).

Dôkaz. Dôkaz budeme prevádzať po nasledovných časových úsekoch a) $0 \leqq t \leqq t_i$, b) $t_i \leqq t < \vartheta_i$, c) $t \geqq \vartheta_i$.

a) Pre $0 \leqq t \leqq t_i$ vyplýva z výrazov (3.1b) a (3.1d), že $x_i(t) \geqq h_i(t)$. Proces $x_i(t)$ prebiehajúci v rovine (t, x_i) maximálnym spádom nemá s funkciou $h_i(t)$ spoločné body až na okamžik $t = t_i$. Potom proces $x_i^*(t)$, $t \leqq t_i$ je totožný s procesom $x_i(t)$, t.j. platí $x_i^*(t) \equiv x_i(t)$ pre $t \leqq t_i$. T.zn., že aj $u_i^*(t) \equiv u_i(t)$, $t \leqq t_i$, čiže $u_i^*(t)$ je z $L(\mathbf{u})$.

b) Pre $t_i \leqq t < \vartheta_i$ platia nasledovné úvahy: Je zrejmé, že $x_i(t)$ vyhovuje systému (1.2). Napíšme si toto riešenie pre $t \geqq t_i$ [3]

$$x_i(t) = x_i(t_i) + \int_{t_i}^{t} \{\varphi_i[x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau)] + b_{ii}\, u_i(\tau)\}\, \mathrm{d}\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.2}$$

Výraz (3.2) určuje priebeh procesu maximálneho spádu. Ďalej uvažujme nasledovne. Ak má optimálny proces riadenej sústavy prebiehať po určitej krivke, musí táto krivka tiež vyhovovať systému (1.2). Potom dostaneme pre $t \geqq t_i$, $t < \vartheta_i$

$$h_i(t) = h_i(t_i) + \int_{t_i}^{t} \{\varphi_i[h_1(\tau), h_2(\tau), \ldots, h_n(\tau)] + b_{ii}\, u_i^*(\tau)\}\, \mathrm{d}\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.3}$$

Pretože na tomto časovom úseku platí podmienka (3.1e) platí tu určite i podmienka (3.1c). Z hľadiska definície 3 bude proces $x_i^*(t)$ najoptimálnejší, ak bude totožný s krivkou $h_i(t)$, t.j. ak platí $x_i^*(t) \equiv h_i(t)$. Z nerovností (3.1c), (3.2) a (3.3) vyplýva pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nerovnosť

$$h_i(t_i) + \int_{t_i}^{t} \{\varphi_i[h_1(\tau), h_2(\tau), \ldots, h_n(\tau)] + b_{ii}\, u_i^*(\tau)\}\, \mathrm{d}\tau > \tag{3.4}$$
$$> x_i(t_i) + \int_{t_i}^{t} \{\varphi_i[x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)] + b_{ii}\, u_i(\tau)\}\, \mathrm{d}\tau\,.$$

 Ak bereme do úvahy (3.1d) môžeme si výraz (3.4) upraviť nasledovne

$$\int_{t_i}^{t} \{\varphi_i[h_1(\tau), \ldots, h_n(\tau)] - \varphi_i[x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)] + b_{ii}\, u_i^*(\tau) - b_{ii}\, u_i(\tau)\}\, d\tau > 0 \tag{3.5}$$

a ďalej

$$\varphi_i[h_1(t), \ldots, h_n(t)] - \varphi_i[x_1(t), \ldots, x_n(t)] + b_{ii}\, u_i^*(t) - b_{ii}\, u_i(t) > 0 \tag{3.6}$$

alebo

$$\varphi_i[h_1(t), \ldots, h_n(t)] - \varphi_i[x_1(t), \ldots, x_n(t)] > b_{ii}\, u_i(t) - b_{ii}\, u_i^*(t)\,. \tag{3.7}$$

Pretože ďalej podľa vety 1 platí pre $h_i > x_i$ nerovnosť $\varphi_i[h_1, \ldots, h_n] < \varphi_i[x_1, \ldots, x_n]$, alebo $\varphi_i[h_1, \ldots, h_n] - \varphi_i[x_1, \ldots, x_n] < 0$, platí potom

$$0 > \varphi_i[h_1(t), \ldots, h_n(t)] - \varphi_i[x_1(t), \ldots, x_n(t)] > b_{ii}\, u_i(t) - b_{ii}\, u_i^*(t)\,. \tag{3.8}$$

Z nerovnosti (3.8) vyplýva

$$0 > b_{ii}\, u_i(t) - b_{ii}\, u_i^*(t)\,, \tag{3.9}$$

alebo

$$b_{ii}\, u_i^*(t) > b_{ii}\, u_i(t)\,. \tag{3.10}$$

Potom pre

$$b_{ii} > 0 \Rightarrow u_i^*(t) > u_i(t) = -1\,, \tag{3.11a}$$

$$b_{ii} < 0 \Rightarrow u_i^*(t) < u_i(t) = \quad 1\,. \tag{3.11b}$$

Poznámka. $u_i(t) = -1$ pre $b_{ii} > 0$ a $u_i(t) = 1$ pre $b_{ii} < 0$ vyplýva z vety o maximálnom spáde.

Vidíme, že pre $t_i \leqq t < \vartheta_i$ je v prípade (3.11a) riadenie $u_i^*(t)$ ohraničené zdola a v prípade (3.11b) ohraničené zhora. Kvôli úplnosti musíme dokázať, že riadenie $u_i^*(t)$ je v prípade (3.11a) ohraničené aj zhora a v prípade (3.11b) aj zdola. Postupujme nasledovne. Ak má byť $\hat{x}_i(t) = x_i(0)$ riešením systému (1.2) musí pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platiť

$$\frac{d\hat{x}_i(t)}{dt} = \frac{dx_i(0)}{dt} = \varphi_i[x_1(0), \ldots, x_n(0)] + b_{ii}\, \hat{u}_i(t) = 0\,. \tag{3.12}$$

Odtiaľ platí

$$b_{ii}\, \hat{u}_i(t) = -\varphi_i[x_1(0), \ldots, x_n(0)]\,. \tag{3.13}$$

Z vety 4 vieme, že platí nerovnosť

$$|b_{ii}| \geqq |\varphi_i[x_1(0), \ldots, x_n(0)]|\,, \tag{3.14}$$

alebo pre

(3.15a) $$b_{ii} > 0 \Rightarrow \quad b_{ii} \geqq -\varphi_i[x_1(0), \dots, x_n(0)]\,,$$

(3.15b) $$b_{ii} < 0 \Rightarrow -b_{ii} \geqq -\varphi_i[x_1(0), \dots, x_n(0)]$$

($\varphi_i < 0$). Potom z nerovnosti (3.15a) a z výrazu (3.13) platí

$$b_{ii} > 0 \Rightarrow b_{ii}\,\hat{u}_i(t) = -\varphi_i[x_1(0), \dots, x_n(0)] \leqq b_{ii}$$

alebo

(3.16a) $$b_{ii}\,\hat{u}_i(t) \leqq b_{ii}\,,$$
$$\hat{u}_i(t) \leqq 1\,.$$

Z nerovnosti (3.15b) a z výrazu (3.13) platí

$$b_{ii} < 0 \Rightarrow b_{ii}\,\hat{u}_i(t) = -\varphi_i[x_1(0), \dots, x_n(0)] \leqq -b_{ii}$$

alebo

(3.16b) $$b_{ii}\,\hat{u}_i(t) \leqq -b_{ii}\,,$$
$$\hat{u}_i(t) \geqq -1\,.$$

Z druhej strany po dosadení $h_i(t)$ a $u_i^*(t)$ do systému (1.2) a z nerovnosti (3.1b) a výrazu (3.12) pre každé ($i = 1, 2, \dots, n$) dostávame

(3.17) $$\varphi_i[h_1(t), \dots, h_n(t)] + b_{ii}\,u_i^*(t) < \varphi_i[x_1(0), \dots, x_n(0)] + b_{ii}\,u_i(t)\,.$$

Pretože (3.1a) platí aj pre $t = 0$, potom vzhľadom na vetu 1 upravme si nerovnosť (3.17) takto

(3.18) $$0 < \varphi_i[h_1(t), \dots, h_n(t)] - \varphi_i[x_1(0), \dots, x_n(0)] < b_{ii}\,\hat{u}_i(t) - b_{ii}\,u_i^*(t)\,.$$

Potom platí

(3.19) $$b_{ii}\,u_i^*(t) < b_{ii}\,\hat{u}_i(t)\,.$$

Odtiaľ pre

(3.20a) $$b_{ii} > 0 \Rightarrow u_i^*(t) < \hat{u}_i(t)\,,$$

(3.20b) $$b_{ii} < 0 \Rightarrow u_i^*(t) > \hat{u}_i(t)\,.$$

Keď bereme teraz do úvahy nerovnosti (3.16a) a (3.20a) dostávame

(3.21a) $$b_{ii} > 0: \quad u_i^*(t) < \hat{u}_i(t) \leqq 1\,,$$

alebo nerovnosti (3.16b) a (3.20b)

(3.21b) $$b_{ii} < 0: \quad u_i^*(t) > \hat{u}_i(t) \geqq -1\,.$$

Z nerovnosti (3.21a) vidíme, že $u_i^*(t)$ je aj zhora ohraničené pre $b_{ii} > 0$. Podobne z nerovnosti (2.21b) vyplýva, že $u_i^*(t)$ je ohraničené zdola pre $b_{ii} < 0$. Tým sme dokázali, že $u_i^*(t)$, $t_i \leqq t < \vartheta_i$ je z dovolenej oblasti riadenia $L(\boldsymbol{u})$.

c) Nech pre každé t, $t \geqq \vartheta_i$ platí podmienka (3.1f). Potom ak v okamžiku $t = \vartheta_i$ nadobudol proces vyhovujíci def. 3 v rovine (t, x_i) polohy $x_i^*(t) = h_i(t)$, môže sa ďalej od tohoto okamžiku pohybovať nanajvýš podľa vety o maximálnom spáde pretože pre $t > \vartheta_i$ krivka $h_i(t)$ nevyhovuje diferenciálnemu systému (1.2) pre žiadne prípustné riadenie z dovolenej oblasti $L(\boldsymbol{u})$. T.zn., že pre $t \geqq \vartheta_i$ platí $x_i^*(t) = x_i(t) \geqq$ $\geqq h_i(t)$, čo vyhovuje podmienka $g_i(t) \geqq 0$. Pre $u_i^*(t)$ platia vzťahy (2.17), čiže i pre $t \geqq \vartheta_i$ je u_i^* z dovolenej oblasti riadenia $L(\boldsymbol{u})$.

Tým je veta dokázaná.

V nasledujúcej stati si popíšeme algoritmus výpočtu optimálneho riadenia za predpokladu, že uvažujeme ohraničenie $g_i(t) \geqq 0$ na optimálny proces, prebiehajúci v riadenej sústave.

4. ALGORITMUS VÝPOČTU OPTIMÁLNEHO RIADENIA

Ako sme spomenuli v úvode, algoritmus výpočtu zložiek optimálneho riadenia (1.11) sa nemení ani pri ohraničení $g_i(t) \geqq 0$ na výstupné veličiny riadenej sústavy. Je nutné však brať zreteľ na to, aby v každom časovom okamžiku, napr. $t = t_i$, $t \geqq 0$ platil vzťah $x_i^*(t) \geqq h_i(t)$. V prípade, že by pre niektoré $t > t_i$ malo dôjsť k porušeniu tejto podmienky, potom optimálny proces $x_i^*(t)$ vzhľadom na kritérium optimálnosti (1.4) a podmienku $g_i(t) \geqq 0$ musí vyhovovať rovnici (3.3) až po určité $t = \vartheta_i$. T.zn., že bude platiť $x_i^*(t) \equiv h_i(t)$, $t_i \leqq t < \vartheta_i$. Potom z rovnice (3.3) pri známom $h_i(t)$ je možné vypočítať optimálne riadenie $u_i^*(t)$ príslušné k procesu $x_i^*(t)$ na intervale $t_i \leqq t < \vartheta_i$. Pretože $h_i(t)$ je hladká krivka pre ktorú platí podmienka (3.1b) budú v okamžiku $t = \vartheta_i$ platiť vzťahy $dx_i^*(t)/dt = h_i'(t)$, $x_i^*(t) = h_i(t)$ a riadenie $u_i^*(\vartheta_i)$ je možné tiež vypočítať z rovnice (3.3). Ďalej ak pre $t < \vartheta_i$ optimálny proces $x_i^*(t)$, vyhovujúci systému (1.2) (pri počiatočných podmienkách z $E(0)$) a podmienkam (1.4), (1.3), má smernicu dotyčnice väčšiu ako krivka $h_i(t)$ v tom istom okamžiku, pôjde $x_i^*(t)$ po krivke maximálneho spádu, t.j. $x_i^*(t) \equiv x_i(t)$ a $u_i^*(t) \equiv u_i(t)$. Teraz sa pokúsime objasniť postupne výpočet zložiek optimálneho riadenia a diskrétnych zložiek optimálnej fázovej trajektórie riadenej sústavy (1.5) na číslicovom počítači, za predpokladu, že neuvažujeme aj ohraničenia $g_i(t) \geqq 0$. Predovšetkým nahraďme si krivku $h_i(t)$ jej diskrétnym modelom $h_{i,N}$, t.zn., že nebudeme uvažovať každý časový okamžik $t \geqq 0$, ale len hodnoty $t_N = N\Delta$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$. Upustíme teraz od označovania procesu $(x_i^*, x_i, x_i^0, \hat{x}_i)$, pretože výpočty nebudeme prevádzať analyticky. Pri výpočte diskrétnych hodnôt zložiek optimálnej fázovej trajektórie riadenej sústavy a k nim príslušných zložiek optimálneho riadenia sústreďme pozornosť na výrazy dané rovnicami (1.5), (1.6), (1.11), na výraz

$$x_{i,N+1} \geqq h_{i,N+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{4.1}$$

(Pre $x_{i,0}$ platí podmienka (3.1a), t.j. $x_i(0) = x_{i,0} > h_{i,0}$), a na výraz

$$(4.2) \qquad u_{i,N}(x_{1,N}, \ldots, x_{n,N}) = \frac{h_{i,N+1} - H_{i,N}(x_{1,N}, \ldots, x_{n,N})}{\Delta b_{ii}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, 1, 2, \ldots).$$

Výraz (4.2) sme dostali po dosadení $h_{i,N+1}$ za $x_{i,N+1}$ do rovnice (1.5) (optimálny diskrétny proces bude sledovať diskrétny model krivky $h_i(t)$). Realizáciu výpočtu hodnôt $x_{i,N+1}$ a $u_{i,N}$ prevádzame nasledovne: Predpokladajme, že stav riadenej sústavy (1.5) na N-tom kroku poznáme, t.zn. že poznáme $x_{i,N}$ pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ďalej predpokladajme, že na predchádzajúcom kroku bola splnená podmienka (4.1), to znamená, že platilo $x_{i,N} \geqq h_{i,N}$ pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Potom z výrazu (1.6) vypočítame hodnoty funkcie $H_{i,N}$ v bodoch $x_{i,N}$. Za pomoci funkcií $H_{i,N}$ určíme zložky vektora riadenia podľa algoritmu (1.11). Ak poznáme $u_{i,N}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ na N-tom stave riadenej sústavy, môžeme vypočítať $(N + 1)$-vý stav sústavy z výrazu (1.5). Ak potom pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platí podmienka (4.1) výpočet na $(N + 1)$-vom stave a ďalších sa opakuje ako na N-tom stave.

Ak pre niektoré $i = j$ podmienka (4.1) neplatí, tak do buňky pamäte, v ktorej bola uložená hodnota $u_{i,N}$ vypočítaná za pomoci (1.11) dosadíme hodnotu $u_{i,N}$ z výrazu (4.2). Potom z výrazu (1.5) je zrejmé, že pre hodnotu $x_{j,N+1}$ bude platiť $x_{j,N+1} = h_{j,N+1}$. V podmienke (4.1) bude platiť znamienko rovnosti, čo nás oprávňuje prejsť na $(N + 1)$-vý stav riadenej sústavy na ktorom sa výpočet opakuje ako na N-tom stave. Výpočet ukončíme, ak pre niektoré N a pre každé $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platí podmienka (1.12).

V nasledujúcej časti si algoritmus výpočtu overíme na konkrétnom príklade.

5. REALIZÁCIA ALGORITMU VÝPOČTU

Predpokladajme, že máme neriadenú sústavu, v ktorej prebiehajúce procesy majú vlastnosti, o ktorých sme sa zmienili v úvodnej časti. Nech táto neriadená sústava je popísaná napr. v nasledovným diferenciálnym systémom

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 0{,}5x_1(t) - x_2(t)\,, & x_1(t_0) = x_1(0)\,, \\[2ex] \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3{,}75x_1(t) - 3{,}5x_2(t)\,, & x_2(t_0) = x_2(0)\,. \end{cases}$$

Ďalej nech riadená sústava je popísaná diferenciálnym systémom tvaru

$$(5.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 0{,}5x_1(t) - x_2(t) + b_{11}\, u_1(t) & x_1(t_0) = x_1(0)\,, \\[2ex] \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3{,}75x_1(t) - 3{,}5x_2(t) + b_{22}\, u_2(t) & x_2(t_0) = x_2(0)\,, \end{cases}$$

kde $b_{11} = 1{,}4$, $b_{22} = -2{,}5$ a pre $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ nech platí

(5.3) $$|u_i(t)| \leqq 1 \quad (t \geqq 0;\ i = 1, 2)\,.$$

Vidíme, že systém (5.1) dostaneme zo systému (5.2) ak položíme $b_{ii}\,u_i(t)$, $(t \geqq 0;$ $i = 1, 2)$ identicky rovné nule. Funkcie $\varphi_i[x_1(t), x_2(t)]$, $(i = 1, 2)$ sú:

(5.4a) $$\varphi_1[x_1(t), x_2(t)] = 0{,}5x_1(t) \;\; - x_2(t)\,,$$

(5.4b) $$\varphi_2[x_1(t), x_2(t)] = 3{,}75x_1(t) - 3{,}5x_2(t)\,.$$

Nájdime si predovšetkým oblasť počiatočných podmienok $E(0)$, ktorú dostávame riešením systému (2.30). V prípade systémov (5.1) a (5.2) môžeme oblasť $E(0)$ zakresliť grafický v rovine (x_1, x_2). Z výrazu (2.30a) vyplýva:

(5.5a) $$0{,}5x_1'(t) \;\; - x_2'(t) > 0\,, \qquad t = t_0\,,$$

(5.5b) $$3{,}75x_1'(t) - 3{,}5x_2'(t) > 0\,, \quad t = t_0\,.$$

Dosaďme do výrazu (5.5a) a (5.5b) pravé strany systému (5.1) t.j. výrazy $x_i'(t) =$ $= dx_i(t)/dt$. Po úprave dostávame

(5.6a) $$x_2(0) > 1{,}16x_1(0)\,,$$

(5.6b) $$x_2(0) > 1{,}32x_1(0)\,.$$

Vidíme, že dvojice $(x_1(0), x_2(0))$, vyhovujúce súčasne obom nerovnostiam (5.6) sú určené nerovnosťou (5.6b). Nerovnosť (5.6b) je na obr. 1 znázornená orientovanou priamkou, označenou **1**. Z výrazu (2.30b) vyplýva:

(5.7a) $$0{,}5x_1(0) \;\; - x_2(0) \;\;\; + 1{,}4 \geqq 0\,,$$

(5.7b) $$3{,}75x_1(0) - 3{,}5x_2(0) + 2{,}5 \geqq 0\,.$$

Po úprave dostávame

(5.8a) $$x_2(0) \leqq 0{,}5x_1(0) \;\; + 1{,}4\,,$$

(5.8b) $$x_2(0) \leqq 1{,}07x_1(0) + 0{,}71\,.$$

Nerovnosť (5.8a) je na obr. 1 znázornená orientovanou priamkou označenou **2** a nerovnosť (5.8b) **3**. Potom oblasť $E(0)$ je v rovine $(x_1(0), x_2(0))$ určená nerovnosťami (5.6b), (5.8a), (5.8b) a priamkou $x_1(0) = 0$. Nech napr. počiatočné podmienky systémov (5.1) a (5.2) sú: $x_1(0) = 1, 2$, $x_2(0) = 2$. Z obr. 1 vidíme, že bod (1,2; 2) patrí do oblasti $E(0)$. Napíšme si výrazy (1.6) pre systém (5.2) za predpokladu, že $\Delta = 0{,}1$:

(5.9a) $$H_{1,N}(x_{1,N}, x_{2,N}) = 1{,}05x_{1,N} \;\; - 0{,}1x_{2,N}\,,$$

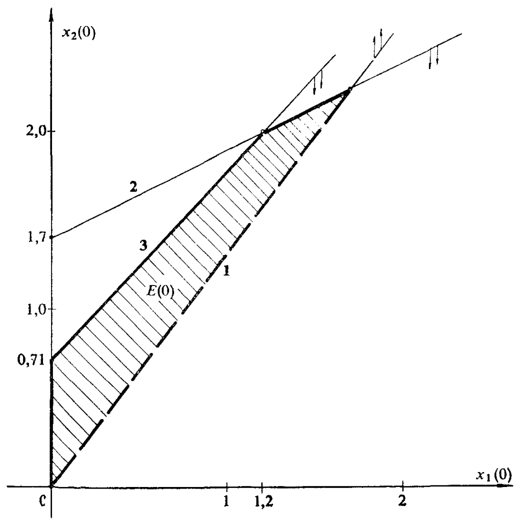
(5.9b) $$H_{2,N}(x_{1,N}, x_{2,N}) = 0{,}375x_{1,N} - 0{,}65x_{2,N}\,.$$

Predpokladajme ďalej, že krivky $h_i = h_i(t)$ sú dané nasledovnými rovnicami

(5.10) $$h_i(t) = a_i - (\alpha_i - t)^2 , \quad (t \geqq 0; i = 1, 2) ,$$

kde

$$a_1 = 1 , \quad a_2 = 2{,}15 ; \quad \alpha_1 = -0{,}44 , \quad \alpha_2 = -0{,}87 .$$



Obr. 1.

Potom $h_{i,N+1}$ bude

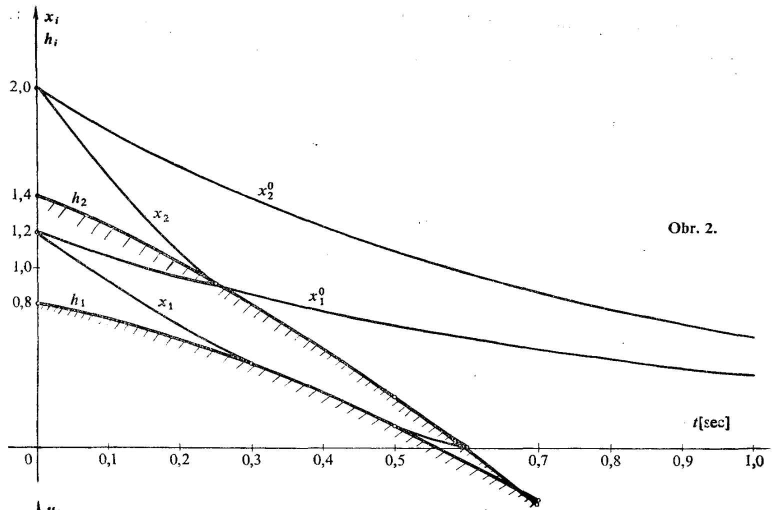
(5.11) $$h_{i,N+1} = a_i - [\alpha_i - (N + 1)\,\Delta] \quad (N = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, 2)$$

Systém rovníc (1.5) je

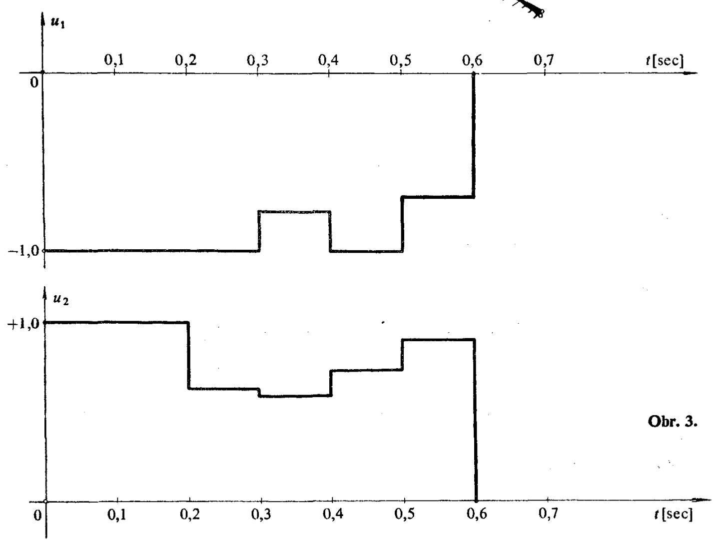
(5.12a) $$x_{1,N+1} = H_{1,N}(x_{1,N}, x_{2,N}) + 0{,}14u_{1,N}(x_{1,N}, x_{2,N}) , \quad x_{1,0} = 1, 2$$

(5.12b) $$x_{2,N+1} = H_{2,N}(x_{1,N}, x_{2,N}) - 0{,}25u_{2,N}(x_{1,N}, x_{2,N}) , \quad x_{2,0} = 2, 0$$

Na obr. 2 sú vynesené procesy $x_i^0(t)$ prebiehajúce v neriadenej sústave (5.1), funkcie $h_i(t)$ a procesy $x_i(t)$ prebiehajúce v riadenej sústave (5.2). Zložky optimálnej funkcie riadenia $u_i(t)$ sú vynesené na obr. 3. Podľa výkladu tvoria krivky $h_i(t)$ hranice oblasti $g_i(t) \geqq 0$. Kvôli názornosti sú oblasti v okolí svojich hraníc zaštrichované. Riadené procesy končia pri $t = 0{,}6$ sec. Vzhľadom na podmienku (1.12) je nutné previesť ešte jeden krok, t.j. výpočet je ukončený v $t = 0{,}7$ sec.


x_i
h_i
2,0
1,4
1,2
1,0
0,8
h_2
x_2
x_2^0
x_1^0
h_1
x_1
t[sec]
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,7
0,8
0,9
1,0

Obr. 2.


u_1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
t[sec]
0
−1,0
u_2
+1,0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
t[sec]

Obr. 3.

6. ZÁVER

V dynamickej optimalizácii riadených sústav poznáme rôzne metódy na výpočet optimálneho riadenia [2]. V podstate ide vždy o variačný problém spočívajúci v nájdení extrému určitého funkcionála, ktorý reprezentuje kritérium optimálnosti riadenej sústavy, pričom sa predpokladá, že prípustné riadenie $\boldsymbol{u}(t)$ patrí do nejakej predom určenej uzatvorenej oblasti. Práve tá skutočnosť, že dovolená oblasť riadenia je uzatvorenou oblasťou, si vynucuje pri výpočtoch používanie rôznych neklasických metód variačního počtu. V praxi sa však veľmi často vyskytujú i také prípady, kedy je nutné klásť ohraničujúce podmienky nielen na prípustné riadenie, ale aj na samotné riadené veličiny. V takom prípade treba nájsť také optimálne riadenie, ktoré dáva extrém zvolenému funkcionálu, ktoré však nedovolí, aby riadené veličiny prekročili hranicu dovolenej oblasti výstupných veličín riadenej sústavy. V predkladanej práci sa autor zaoberá podobnou problematikou. Dokazuje, za akých podmienok môžu byť riadené veličiny vyvedené na hranicu dovolenej oblasti výstupných veličín riadenej sústavy za predpokladu, že prípustné riadenie sú z dovolenej oblasti riadenia. Je uvedený algoritmus výpočtu optimálneho riadenia a spôsob výpočtu optimálnych výstupných veličín riadených sústav vyhovujúcich určitým podmienkám. Teoretický výklad bol overený na konkrétnej riadenej sústave. Výsledky výpočtov sú na obr. 2 a 3. Ako sme spomenuli v závere práce [1] môže byť optimálne riadenie minimalizujúce výraz (1.4) kvázioptimálne aj vzhľadom na všeobecnejšie funkcionály. Výhoda navrhovaného spôsobu výpočtu optimálneho riadenia je predovšetkym v jednoduchosti algoritmu, v podstatnom skrátení dĺžky doby realizácie výpočtu optimálneho riadenia na číslicovom počítači (oproti princípu maxima o 20 a oproti metóde dynamického programovania až o 360krát [1], [2]) a nakoniec, že môžeme uvažovať aj o ohraničení na výstupné veličiny riadenej sústavy.

(Došlo dňa 5. júna 1967.)

LITERATÚRA

[1] Uličný J.: O jednom type kritéria optimálnosti v dynamickej optimalizácii riadených sústav. Automatizace *X* (1967), 2, 29—33.

[2] Uličný J.: Dynamická optimalizácia sústav s minimálnou dobou riadenia. Strojnícky časopis *XVIII* (1967), 1, 61—74.

[3] Понтрягин Л. С.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва 1965.

Dynamic Optimization of Controlled Multi-Parameter System with Constraints Imposed on Both the Controlled and the Controlling Quantities

JÁN ULIČNÝ

There are frequent cases in practice where it is necessary to impose constraints not only on the controlling but also on controlled quantities. The problem of dynamic optimization then consists in the task to find an optimal solution which allots the extremum to the chosen optimaility criterion but hinders the controlled quantities to exceed the boundaries of the permitted domain of the output quantities of the controlled system. The author refers in the paper to the conditions to which the controlled quantities are subject when carried to the boundaries of the permitted domain of controlled system's output quantities provided that the admitted controls stem from the permitted domain of control.

Ing. Ján Uličný, CSc., Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava.