

Vyhlazování šumu v jisté jednoduché variantě obvodu s rozloženými parametry

VLADIMÍR KRACÍK

V článku je řešen problém optimálního vyhlazování šumu v obvodu popsaném rovnicemi

$$\begin{aligned} y_n + a_k y_{n-k} + a_{k+1} y_{n-k-1} + \dots + a_{k+h} y_{n-k-h} &= \\ = u_n - p_1 r_{n-1} - p_2 r_{n-2} - \dots - p_l r_{n-l}, \\ r_n &= w_0 y_n + w_1 y_{n-1} + w_2 y_{n-2} + \dots, \end{aligned}$$

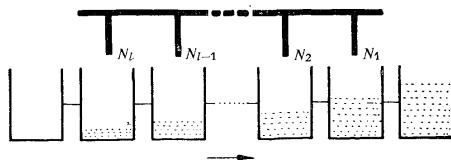
kde y_n je vyhlazovaná veličina, u_n je diskrétní šum s racionální spektrální hustotou, r_n je vyhlazovací veličina. Je uvedena rovněž spojitá alternativa. Popsané obvody mohou sloužit jako vhodné modely pro některé obvody s rozloženými parametry s jednoduchou dynamikou.

0. ÚVOD

0.1. Příklad

V praxi se vyskytují obvody podobného typu jako obvod popsaný v následujícím příkladu.

Na pohyblivém pásu (obr. 1) se pohybuje zleva doprava v pravidelných krocích



Obr. 1.

sled nádob. Při každém kroku (zastávce) se z každého z násypů $N_l, \dots, N_1$ vysype určitá dávka do nádob, které právě stojí pod násypy. Vzdálenost sousedních násypů a sousedních nádob je stejná a rovná se délce kroku. Po průchodu nádoby pod

posledním násypem (tj. N_l) bude v nádobě určitá konečná dávka (výstupní hodnota). V případě, že dílčí dávky u jednotlivých násypů jsou náhodné veličiny, bude i konečná dávka náhodnou veličinou. Úkolem bude udržovat výstupní hodnoty v blízkosti žádané hodnoty. K tomu účelu bude sloužit regulace, která bude zasahovat tímto způsobem: na každém kroku budeme snižovat (resp. zvyšovat) dávky na každém násypu o nějakou veličinu, která bude vhodně závislá na výstupních konečných dávkách.

V tomto článku jsou řešeny některé otázky regulace naznačeného druhu, jmenovitě otázky optimalizace vzhledem ke kritériu minimální střední kvadratické chyby výstupu.

0.2. Popis obvodu

Upřesňme funkci popsaného obvodu pomocí následujících předpokladů:

a) Dávky tvoří pro každý násyp N_i stacionární posloupnost $\{\xi_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots, l$. Symbolem $x_n^{(i)}$ označíme odchylku dávky i -tého násypu v n -tém kroku od její střední hodnoty $X^{(i)}$, takže $\xi_n^{(i)} = X^{(i)} + x_n^{(i)}$, $Ex_n^{(i)} = 0$.

b) Žádaná hodnota výstupu, tj. naplnění nádoby po výstupu z obvodu bude $\sum_{i=1}^l X^{(i)} = u$. Potom veličina $u_n = x_{n-1}^{(1)} + x_{n-2}^{(2)} + \dots + x_{n-l}^{(l)}$ bude odchylkou od žádané hodnoty.

c) Poruchy $x_n^{(i)}$ jsou neměřitelné (fyzikálně), výstupní veličina je měřitelná.

d) Do činnosti obvodu je možno zasahovat tím způsobem, že lze v daném kroku zvýšit nebo snížit dávky u všech násypů najednou o nějakou akční veličinu (obecně pro různé násypy různou).

e) V obecném případě budeme předpokládat, že akční (vyhlazovací) veličina je ve tvaru $p_i r_n$, kde p_i je koeficient závislý na i -tém násypu, r_n je lineární kombinací přítomné a minulých hodnot odchylek výstupní dávky od žádané hodnoty. V tomto obvodu potom označme výstupní dávku $y_n + u$, kde u je žádaná hodnota, y_n je odchylka.

f) Prakticky nemůže $u + u_n$ resp. $y_n + u$ být záporné. Budeme ale předpokládat, že u_n je malé v poměru k u , přesněji řečeno $\text{Prob}(|u_n| > u)$ je zanedbatelná. Tento předpoklad nám umožní nepřihlížet k omezení $y_n + u \geq 0$.

1. DISKRÉTNÍ VARIANTA

1.1. Asymptotická střední kvadratická chyba

Podle zavedených označení nyní můžeme napsat rovnice popsaného obvodu

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y_n + u &= (x_{n-1}^{(1)} + X^{(1)} - p_1 r_{n-1}) + (x_{n-2}^{(2)} + X^{(2)} - p_2 r_{n-2}) + \\
 &+ \dots + (x_{n-l}^{(l)} + X^{(l)} - p_l r_{n-l}), \\
 r_n &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k y_{n-k},
 \end{aligned}$$

kde w_k jsou koeficienty lineární kombinace. Posloupnost $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ můžeme také nazývat váhovou posloupností regulátoru.

Vzhledem k zavedenému označení se soustava rovnic (1) snadno upraví, takže dostaneme:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad r_n &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k y_{n-k}, \\
 y_n &= u'_n - p_1 r_{n-1} - p_2 r_{n-2} - \dots - p_l r_{n-l}.
 \end{aligned}$$

Dále budeme užívat z -transformace ($F(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$) při čemž příslušnými velkými písmeny budeme označovat obrazy posloupností jakožto funkce argumentu z^{-1} a budeme psát $z^{-1} = s$; $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n$.

Symbolem $F_H(s)$ budeme označovat přenos systému se vstupem h_n a výstupem f_n . Potom $Y_U(s)$ je přenos popsaného obvodu, $R_Y(s)$ je přenos regulátoru. Z rovnice (2) potom dostáváme

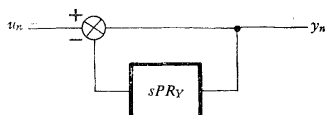
$$\begin{aligned}
 R(s) &= W(s) Y(s), \\
 Y(s) &= U(s) - s p_1 R(s) - s^2 p_2 R(s) - \dots - s^l p_l R(s) = \\
 &= U(s) - s P(s) Y(s) R_Y(s),
 \end{aligned}$$

kde

$$P(s) = p_1 + p_2 s + \dots + p_l s^{l-1}.$$

Odtud

$$(3) \quad Y_U(s) = \frac{1}{1 + s P(s) R_Y(s)}, \quad R_Y(s) = W(s).$$



Obr. 2.

Schéma systému je dáno na obr. 2. Dále ještě máme

$$(4) \quad R_U(s) = R_Y(s) Y_U(s) = \frac{R_Y(s)}{1 + s P(s) R_Y(s)}.$$

V dalším předpokládáme, že $R_Y(s)$ je racionální funkcí s a že $P(s)$ nemá nuly uvnitř jednotkového kruhu. Přenos $Y_U(s)$ bude stabilní, nebude-li mít póly na jednotkovém kruhu.

Pro stabilitu přenosů $Y_U(s)$, $R_U(s)$ budou platit následující vztahy, jejichž platnost lze snadno prověřit.

(5) $Y_U(s)$ nemá póly uvnitř jednotkového kruhu (= je stabilní nebo na hranici stability) $\Leftrightarrow R_U(s)$ nemá póly uvnitř jednotkového kruhu.

(6) $R_U(s)$ nemá póly na jednotkovém kruhu (= je stabilní) $\Rightarrow Y_U(s)$ nemá póly na jednotkovém kruhu.

Implikace (6) platí také obráceně v případě, že neexistuje číslo na jednotkové kružnici, které je zároveň pólem $R_Y(s)$ a nulou $P(s)$.

Poznamenejme, že pro stabilitu $R_U(s)$ resp. $Y_U(s)$ není nutná stabilita $R_Y(s)$. Např.: $R_Y(s) = 2/(3 - 6s)$, tento přenos je nestabilní (pól je $s = \frac{1}{2}$), odpovídající $Y_U(s) = (3 - 6s)/(3 - 4s + 2s)$ a $R_U(s) = 2/(3 - 4s + 2s^2)$ pro $P(s) = 1 + s$ jsou stabilní (póly jsou $s_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{\frac{1}{2}}$).

Označme $S_u(s)$ spektrální hustotu náhodné stacionární posloupnosti u_n a $S_y(s)$ spektrální hustotu ustálené výstupní posloupnosti y_n ; potom

$$S_y(s) = S_u(s) Y_U(s) Y_U\left(\frac{1}{s}\right)$$

a tedy střední kvadratická hodnota

$$(7) \quad \overline{y^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{S_y(s)}{s} ds = \sum \operatorname{Res} \frac{S_y(s)}{s},$$

kde k je jednotková kružnice.

1.2. Optimální regulace

V tomto odstavci se budeme zabývat otázkou optimální regulace vzhledem ke kritériu asymptotické střední kvadratické chyby výstupu.

Tuto otázku budeme řešit pro následující obecnější systém popsaný rovnicemi

$$(8) \quad \begin{aligned} y_n + a_k y_{n-k} + a_{k+1} y_{n-k-1} + \dots + a_{k+h} y_{n-k-h} &= \\ &= u_n - p_1 r_{n-1} - p_2 r_{n-2} - \dots - p_l r_{n-l}, \\ r_n &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i y_{n-i}; \end{aligned}$$

kde k, h jsou konstantní, $1 \leq k$.

$$(9) \quad Y_U(s) = \frac{1}{1 + s^k A_k(s) + s P(s) R_Y(s)},$$

kde

$$A_k^{(s)} = a_k + a_{k+1}s + \dots + a_{k+h}s^h.$$

Označme symbolem $\mathcal{R}_j$ množinu přenosů $R_Y(s)$, které zajišťují stabilitu, nebo hranici stability přenosu $Y_U(s)$ (9) a kde pro váhovou posloupnost platí $\dots w_{-2} = w_{-1} = w_0 = w_1 = \dots = w_{j-1} = 0$. Tudiž je-li $R_Y \in \mathcal{R}_j$, je možno psát $R_Y(s) = s^j Z(s)$, kde $s = 0$ není pólem $Z(s)$. Zřejmě je $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{R}_{j+1}$ pro každé celé j . $\mathcal{R}_0$ bude potom množinou přenosů všech fyzikálně realizovatelných regulátorů, které zajišťují stabilitu nebo hranici stability přenosu $Y_U(s)$. $\mathcal{R}_j$ nazveme množinou přenosů regulátorů, které pracují se zpožděním j .

Lemma 1.

$$R_Y \in \mathcal{R}_j \Leftrightarrow Y_U = 1 - s^{j+1}Q \quad \text{pro} \quad 0 \leq j < k,$$

kde $Q(s)$ nemá póly uvnitř jednotkového kruhu.

Důkaz. Nechť $R_Y \in \mathcal{R}_j$, potom $R_Y = s^j Z$, kde $s = 0$ není pólem Z . A tedy

$$Y_U = \frac{1}{1 + s^k A_k + s P s^j Z} = 1 - s^{j+1} \frac{PZ + s^{k-j-1} A_k}{1 + s^k A_k + s^{j+1} PZ}.$$

Nechť naopak

$$Y_U = 1 - s^{j+1}Q,$$

$Q(s)$ nemá póly uvnitř jednotkového kruhu, potom podle (9)

$$(10) \quad R_Y = \frac{1 - Y_U(1 + s^k A_k)}{s P Y_U} = \frac{s^{j+1}Q - s^k A_k + s^{j+k+1}Q A_k}{s P(1 - s^{j+1}Q)} = \\ = s^j \frac{Q - s^{k-j-1}A_k + s^k Q A_k}{P(1 - s^{j+1}Q)} \in \mathcal{R}_j.$$

Nechť dále $S_u(s) = S_u^1(s) S_u^1(1/s)$, kde $S_u^1(s)$ má nuly všesmě vně jednotkového kruhu nebo na jednotkové kružnici a póly vně jednotkového kruhu, $\{v_n\}_1^\infty$ je originál k $S_u^1(s)$ ($S_u^1(s)$ je přenos tvarovacího filtru procesu u_n). Potom platí:

Věta 1.

$$\min_{R_Y \in \mathcal{R}_j} \bar{y}^2 = \sum_{k=0}^j v_k^2 = [S_u^1(0)]^2 + \left[\frac{S_u^{1'}(0)}{1!} \right]^2 + \dots + \left[\frac{S_u^{1(j)}(0)}{j!} \right]^2.$$

$$S_y^1 = (1 - s^{j+1}Q) S_u^1 = Y_U S_u^1.$$

Zřejmě platí

$$S_y^1(0) = S_u^1(0), S_y^{1'}(0) = S_u^{1'}(0), \dots, S_y^{1(j)}(0) = S_u^{1(j)}(0).$$

Položme

$$(11) \quad (1 - s^{j+1}Q) = \frac{1}{S_u^1(s)} \left[S_u^1(0) + \frac{S_u^{1'}(0)}{1!} s + \dots + \frac{S_u^{1(j)}(0)}{j!} s^j \right].$$

Potom

$$S_y^1(s) = S_u^1(0) + \frac{S_u^{1'}(0)}{1!} s + \dots + \frac{S_u^{1(j)}(0)}{j!} s^j,$$

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_k S_y^1(s) S_y^1 \left(\frac{1}{s} \right) \frac{ds}{s} = [S_u^1(0)]^2 + \left[\frac{S_u^{1'}(0)}{1!} \right]^2 + \dots + \left[\frac{S_u^{1(j)}(0)}{j!} \right]^2.$$

Z druhé strany ale

$$\bar{y}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{S_y^{1(k)}(0)}{k!} \right]^2 \geq \sum_{k=0}^j \left[\frac{S_y^{1(k)}(0)}{k!} \right]^2 = \sum_{k=0}^j \left[\frac{S_u^{1(k)}(0)}{k!} \right]^2.$$

Tím je věta dokázána.

Z (11) vyjádříme ještě

$$(12) \quad Q = \frac{1}{S_u^1(s)} \left(\frac{S_u^{1(j+1)}(0)}{(j+1)!} + \frac{S_u^{1(j+2)}(0)}{(j+2)!} s + \dots \right) =$$

$$= \frac{S_u^1(s) - \left[S_u^1(0) + \frac{S_u^{1'}(0)}{1!} s + \dots + \frac{S_u^{1(j)}(0)}{j!} s^j \right]}{s^{j+1} S_u^1(s)}$$

a konečně pomocí (10) vypočteme R_Y .

Poznámka 1. Platnost věty 1 vyplývá přímo z teorie lineární predice. Pomocí lemmatu 1 přivádíme problém optimalizace vzhledem k R_Y na problém optimalizace vzhledem k přenosu Q_1 , který lze interpretovat jako prediktor. Viz např. [1].

Poznámka 2. V případě, že $P(s)$ má nuly na jednotkové kružnici, je užitečnost věty 1 pouze ve vymezení infima střední kvadratické odchylky regulované veličiny. Přenos $Y_U(s)$, jehož syntéza je dána větou 1, je sice stabilní za předpokladu, že $S_u^1(s)$ nemá nuly na jednotkové kružnici, ale v obecném případě totiž (podle (10)) má $R_Y(s)$ ve jmenovateli polynom $P(s)$ a to má za následek, jak bylo konstatováno v odst. 1.1, že přenos $R_U(s)$ je na hranici stability. V takovém obvodu by při $u_n = 0$, $n > n_0$ bylo sice v ustáleném stavu $y_n = 0$, ale akční veličina r_n by oscillovala. Důležitý příklad polynomu $P(s)$ s nulami na jednotkové kružnici je v případě $p_1 = p_2 =$

$= \dots = p_l = 1$, tj. $P(s) = 1 + s + \dots + s^{l-1}$. Nuly tohoto polynomu tvoří pravidelný l -úhelník vyjma vrcholu $s = 1$.

Poznámka 3. Pro $j = 0$ máme

$$\min_{R \in \mathcal{R}_0} \overline{y^2} = [S_u^1(0)]^2 = v_0^2.$$

Slovy: Minimum střední kvadratické odchylky výstupu pro množinu všech fyzikálně realizovatelných lineárních regulátorů při zachování stability, popř. hranice stability $R_U(s)$ je $[S_u^1(0)]^2 = v_0^2$.

Poznámka 4. Ze souvislosti s teorií lineární predikce vyplývá, že infimum chyby dané větou 1 bude infimem chyby i pro případ, že r_n je nelineární funkcí y_{n-j} , y_{n-j-1} , ..., za předpokladu, že u_n je gaussovská posloupnost.

Poznámka 5. Důležitou speciální třídou regulátorů budou regulátory, pro jejichž přenosy platí

$$W(s) = R_V(s) = \frac{1}{1-s} W^1(s),$$

přičemž $s = 1$ není nulou $W^1(s)$. Rovnice obvodu s přenosem $1/(1-s)$ je

$$y_n - y_{n-1} = x_n, \quad \text{tedy} \quad y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_{n-k}.$$

Je-li tedy na výstupu obvodu s přenosem W^1 veličina r_n^1 , je výsledná akční veličina r_n na výstupu regulátoru s přenosem

$$\frac{1}{1-s} W^1(s), \quad r_n = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n-k}^1.$$

Celkový obvod s takovouto regulací potom můžeme nazvat obvodem s kumulativní regulací (s integrální zpětnou vazbou). Přenos takového obvodu bude

$$Y_U(s) = \frac{1}{1 + s^k A_k(s) + s P(s)} \cdot \frac{1}{1-s} W^1 = \frac{1-s}{(1-s)(1 + s^k A_k) + s P W^1}.$$

Dosadíme-li v $Y_U(s)$ za $s = e^{-i\omega}$, je $Y_U(e^{-i\omega})$ odezvou na vstup $e^{i\omega n}$. Pro $s = 1$, tj. $\omega = 0$ je potom $Y_U(e^{-i\omega}) = 0$, to znamená, že tento systém úplně vyhlazuje složky poruchy u_n s nulovou frekvencí (dobře vyhlazuje složky s malou frekvencí). Tento způsob regulace se jeví tedy praktickým, poněvadž kompensuje eventuální změnu střední hodnoty u_n (nestacionární proces typu $u_n + \mathbf{1}(n)$).

Poznámka 6. Je-li možno v systému (jak je popsán v úvodu) regulovat pouze jeden násyp, dostáváme zvláštní případ pro $l = 1$, potom $P \equiv p_1$. Za předpokladu,

474 že $S_u^1(s)$ nemá nuly na jednotkové kružnici, je potom optimální systém popsany větou 1 stabilní (tj. Y_U a R_U jsou stabilní).

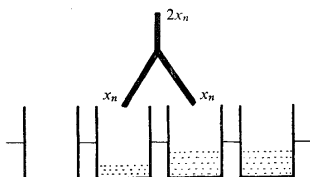
Některé problémy takových systémů jsou řešeny v [4] a [5].

Příklad. Uvažujme soustavu naznačenou na obr. 3. V této soustavě je

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n; \quad u_n = x_{n-1}^{(1)} + x_{n-2}^{(2)} = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Korelační funkce procesu x_n nechť je

$$K_x(n) = \sigma^2 e^{-a|n|};$$



Obr. 3.

dále

$$S_x(s) = \sigma^2 \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-a|n|} s^n = \sigma^2 (a^2 - 1) \frac{s}{(a - s)(as - 1)},$$

kde $e^a = a$,

$$S_u(s) = (1 + s)^2 \frac{\sigma^2 (a^2 - 1) s}{(a - s)(as - 1)s} = \frac{\sigma^2 (a^2 - 1) (1 + s)^2}{(a - s)(as - 1)};$$

středně kvadratická hodnota výstupu bez regulace

$$\overline{u^2} = \sigma^2 (a^2 - 1) \sum \text{Res} \frac{(1 + s)^2}{as(a - s)(s - 1/a)} = 2 \left(1 + \frac{1}{a} \right) \sigma^2;$$

$$S_u^1(s) = \sigma \sqrt{(a^2 - 1)} \frac{1 + s}{a - s},$$

$$\min_{R \in \mathcal{R}_f} \overline{y^2} = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \left[1 + \left(1 + \frac{1}{a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{a^{j-1}} + \frac{1}{a^j} \right)^2 \right],$$

$$\min_{R \in \mathcal{R}_0} \overline{y^2} = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right).$$

V jednoduchém případě systému s kumulativní regulací, kdy akční veličina je úměrná s koeficientem k výstupní hodnotě, $P = 1 + s$, dostaneme

$$Y_U(s) = \frac{1}{1 + s(s+1) \frac{k}{1-s}} = \frac{1-s}{1 + s(k-1) + ks^2}$$

a tedy příslušná diferenční rovnice bude

$$y_n + (k-1)y_{n-1} + ky_{n-2} = u_n - u_{n-1}.$$

Požadavku stability vyhovují $0 \leq k < 1$.

Dále dostaneme podle (7)

$$\bar{y}^2 = 2\sigma^2(a^2 - 1) \frac{1}{[k - a(1-k) + a^2](1-k)}.$$

Snadno minimalizujeme vzhledem ke k a dostaneme

$$k = \frac{1 + 2a - a^2}{2(1+a)}, \quad \min_k \bar{y}^2 = 8\sigma^2(1+a) \frac{a^2 - 1}{(a^2 + 1)^2}.$$

Pro $\alpha = \lg \frac{3}{2}$, $a = \frac{3}{2}$ vychází

$$k = \frac{7}{20}, \quad \min_{R_{Y \in \mathcal{R}_0}} \bar{y}^2 = \frac{5}{9}\sigma^2, \quad \min_k \bar{y}^2 = 2,37\sigma^2;$$

střední kvadratická hodnota výstupu bez regulace $\bar{u}^2 = 3,33\sigma^2$.

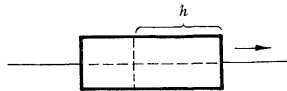
Lze si všimnout, že pro $a \rightarrow 1$ (proces silně korelovan)

$$\min_{R_{Y \in \mathcal{R}_0}} \bar{y}^2 \rightarrow 0, \quad \min_k \bar{y}^2 \rightarrow 0, \quad \bar{u}^2 \rightarrow 4\sigma^2.$$

2. ANALOGIE PRO PŘÍPAD SPOJITOSTI

2.1. Popis obvodu a asymptotická střední kvadratická chyba

Spojitý pás (drát, ...) prochází nějakým zařízením (např. pecí) délky l konstantní rychlostí v (obr. 4). Doba setrvání v peci je T , tudíž $l = vT$. Uvnitř daného zařízení



Obr. 4.

dochází v každém místě a v každém okamžiku k navrhování nějaké veličiny (vrstvy sazí v peci, úbytek vlhkosti v sušárenské peci apod.). Konkrétně uvažujeme, že přírůstek v bodě h pece v časovém intervalu $t, t + dt$ je $[x(h, t) + X(h)] dt$. Budeme

- 476 dále předpokládat, že $x(h, t)$ je pro každé $h \in \langle 0, l \rangle$ náhodný stacionární proces (porucha), kde $E[x(h, t)] = 0$ pro $0 \leq h \leq l$, $-\infty < t < \infty$; $X(h)$ je nenáhodná veličina. Žádaná hodnota výstupu nechť je

$$\int_0^t X(h) \frac{dh}{v} = \int_0^T X[v\tau] d\tau = u.$$

Skutečná hodnota na výstupu bude

$$\int_0^T x[v\tau, t - \tau] d\tau + \int_0^T X[v\tau] d\tau = u(t) + u,$$

kde

$$u(t) = \int_0^T x[v\tau, t - \tau] d\tau,$$

takže $u(t)$ je rovněž stacionární proces a představuje odchylku od žádané hladiny. Zřejmé je $E[u(t)] = 0$ pro všechna t . Předpokládá se dále, že $x(h, t)$ je neměřitelná, $u(t)$ je měřitelná veličina.

Podobně jako v diskrétním případě zavedem nyní do popsaného obvodu regulaci tím způsobem, že v každém okamžiku τ odečteme od veličiny $x(h, \tau) + X(h)$ akční (vyhlazovací) veličinu $p(h) r(\tau)$ kde $p(h)$ je nenáhodná po částech spojitá a ohraničená funkce na intervalu $\langle 0, l \rangle$ rovná nule mimo $\langle 0, l \rangle$, $r(t)$ bude obecně výsledkem lineární operace nad celou minulostí odchylky $y(t)$ výstupního procesu $y(t) + u$ od žádané hodnoty u . Tedy

$$r(\tau) = \int_0^\infty w(\tau_1) y(\tau - \tau_1) d\tau_1;$$

$w(\tau_1)$ nazveme váhovou funkcí regulátoru.

Celkový obvod bude tedy popsán rovnicemi

$$y(t) + u = \int_0^T \{x[v\tau, t - \tau] + X[v\tau] - p(v\tau) r(t - \tau)\} d\tau,$$

$$r(\tau) = \int_0^\infty w(\tau_1) y(\tau - \tau_1) d\tau_1$$

a použijeme-li zavedeného označení, dostaneme

$$(13) \quad y(t) = u(t) - \int_0^T p(v\tau) r(t - \tau) d\tau,$$

$$r(\tau) = \int_0^\infty w(\tau_1) y(\tau - \tau_1) d\tau_1.$$

V dalším budeme odpovídajícími velkými písmeny označovat obrazy v Laplaceově transformaci, přičemž symbolem $F_H(s)$ označíme přenos systému se vstupem $h(t)$ s výstupem $f(t)$.

Potom z rovnic (13) dostaneme

$$Y(s) = U(s) - P(s) R(s),$$

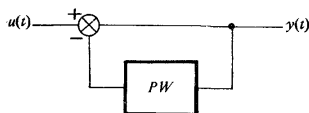
$$R(s) = W(s) Y(s),$$

kde

$$P(s) = \frac{1}{v} P_1\left(\frac{s}{v}\right), \quad P_1(s) = \mathcal{L}(p(h)).$$

Dosazením z druhé rovnice do první za $R(s)$ dostaneme

$$Y_U(s) = \frac{1}{1 + P(s) W(s)}; \quad R_U(s) = \frac{W(s)}{1 + P(s) W(s)}; \quad W(s) = R_Y(s).$$



Obr. 5.

Schéma systému je na obr. 5.

Je-li $S_u(\omega)$ daná spektrální hustota procesu $u(t)$, lze psát

$$\overline{y^2} = \int_0^\infty |Y_U(i\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega.$$

Uvažujme dva speciální příklady:

$$a) \quad r(\tau) = k y(\tau), \quad p(h) = 1 \quad \text{pro} \quad 0 \leq h \leq l,$$

$$p(h) = 0 \quad \text{pro} \quad \text{ostatní } h:$$

$$W(s) = k, \quad Y_U(s) = \frac{1}{1 + k \frac{1 - e^{-sT}}{s}}.$$

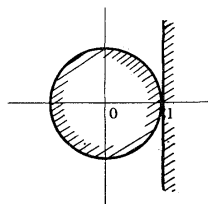
Přenos $Y_U(s)$ bude stabilní pro $k \neq -1/T$. Plyne to bezprostředně z jednoduchého geometrického znázornění (Satchův diagram). Všimněme si nejdříve, že $\lim_{s \rightarrow 0} Y_U(s) = 1/(1 + kT)$, tedy $s = 0$ není pro $k \neq -1/T$ pólem přenosu. Rozšíříme-li výraz pro $Y_U(s)$ výrazem $s \neq 0$, dostaneme $s/[s + k(1 - e^{-sT})]$. Položíme-li jmenovatel roven nule, dostaneme $s/k + 1 = e^{-sT}$.

Pro $\operatorname{Re} s \geq 0$, $s \neq 0$ je levá strana posledního vztahu ve vyznačené polorovině a pravá strana na vyznačeném jednotkovém kruhu (obr. 6). Tudiž přenos má póly pouze v levé polorovině. Snadno lze také prověřit, že pro $k \rightarrow \infty$ se blíží systém k hranici stability.

b) $r(\tau)$ je úměrné integrálu minulosti výstupu délky t_1 , $p(h)$ jako v příkladě a):

$$r(\tau) = k \int_0^{\tau_1} y(\tau - \tau_1) d\tau_1; \quad w(\tau_1) = k \quad \text{pro} \quad 0 \leq \tau_1 < t_1$$

$$w(\tau_1) = 0 \quad \text{pro} \quad \tau_1 \geq t_1:$$



Obr. 6.

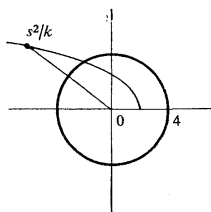
$$W(s) = \frac{k}{s} (1 - e^{-st_1}),$$

$$Y_U(s) = \frac{1}{1 + k \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1 - e^{-st_1}}{s}};$$

$s = 0$ není pólem pro $k \neq -1/Tt_1$.

Položíme jmenovatel roven nule a dostaneme $s^2/k = (e^{-sT} - 1)(1 - e^{-st_1})$ (obr. 7).

Nechť $s = \varepsilon + i\omega$, $\varepsilon \geq 0$, ε konst. Uvažujme $k \geq 0$. Výraz na pravé straně rovnice bude na kruhu se středem v počátku s poloměrem 4. Uvažujme dále $0 < t_1 \leq T$;



Obr. 7.

pravá strana bude ležet v dolní polorovině pro $0 < \omega < \pi/T$; levá strana bude pro
tamtéž ω v horní polorovině. Tedy postačující podmínka stability je 479

$$\left| \frac{s^2}{k} \right|_{\omega=\pi/T} > 4 \Rightarrow \varepsilon^2 + \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 > 4k \quad \text{pro každé } \varepsilon \geq 0$$

a tedy $k < \frac{1}{4}(\pi/T)^2$. Postačující podmínka stability pro $0 < t_1 \leq T$ je tedy

$$0 \leq k < \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{T} \right)^2.$$

2.2. Optimální regulace

Dokažme ještě analogické tvrzení s větou 1 pro spojitý případ.

Předpokládejme, že $W(s)$ je racionální a že $P(s)$ nemá póly napravo od imaginární osy, potom budou platit tvrzení (5) a (6), kde místo jednotkového kruhu bude pravá polorovina včetně imaginární osy.

Označme symbolem $\mathcal{R}_{t_1}$ množinu regulátorů, které zajišťují stabilitu nebo hranici stability pro $Y_U(s)$ a tedy i pro $R_U(s)$ a jejichž přenosy budou ve tvaru

$$(14) \quad R_U(s) = W(s) = e^{-t_1 s} Z(s),$$

kde $Z(s)$ nemá póly vpravo od nějaké rovnoběžky s imaginární osou. Pro odpovídající váhové funkce bude potom platit

$$w(\tau) = 0 \quad \text{pro } \tau < t_1.$$

Místo systému (14) uvažujme dále obecnější systém:

$$y(t) + L[y(t - t_2)] = u(t) - \int_0^T p(\tau) r(t - \tau) d\tau,$$

$$r(\tau) = \int_0^\infty w(\tau_1) y(\tau - \tau_1) d\tau_1,$$

kde $L[y(t - t_2)]$ značí lineární operaci nad hodnotami $y(\tau)$ pro $\tau < t - t_2$ takovou, že $\mathcal{L}\{L[y(t - t_2)]\} = e^{-t_2 s} A(s) Y(s)$, kde $A(s)$ nemá póly vpravo od nějaké rovnoběžky s imaginární osou. Potom (15) bude v přenosech

$$Y_U(s) = \frac{1}{1 + e^{-t_2 s} A(s) + P(s) W(s)}, \quad R_U(s) = W(s).$$

Lemma 2.

$$R_U \in \mathcal{R}_{t_1} \Leftrightarrow Y_U(s) = 1 - e^{-t_1 s} Q(s) \quad \text{pro } t_1 \leq t_2,$$

kde $Q(s)$ nemá póly vpravo od imaginární osy.

Důkaz. Nechť $R_Y \in \mathcal{R}_{t_1}$, potom podle (14) $R_Y(s) = W(s) = e^{-t_1 s} Z(s)$ a tedy

$$Y_U(s) = \frac{1}{1 + e^{-t_2 s} A(s) + P(s) W(s)} = 1 - \frac{e^{-t_1 s} (e^{-(t_2 - t_1)s} A(s) + P(s) Z(s))}{1 + e^{-t_2 s} A(s) + P(s) W(s)}.$$

Nechť naopak platí pravá strana implikace, potom ze vztahu

$$Y_U(s) = 1 - e^{-t_1 s} Q(s) = \frac{1}{1 + e^{-t_2 s} A(s) + A(s) W(s)}$$

dostaneme

$$(16) \quad W(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{e^{-t_1 s} Q(s) - e^{-t_2 s} A(s) + e^{-(t_1 + t_2)s} A(s) Q(s)}{1 - e^{-t_1 s} Q(s)} = \\ = e^{-t_1 s} \frac{1}{P(s)} \frac{Q(s) - e^{-(t_2 - t_1)s} A(s) + e^{-t_2 s} A(s) Q(s)}{1 - e^{-t_1 s} Q(s)}.$$

Z lemmatu 2 vyplývá analogicky jako v diskretním případě

Věta 2.
$$\min_{R_Y \in \mathcal{R}_{t_1}} \bar{y}^2 = \int_0^{t_1} v_u^2(\tau) d\tau \quad \text{pro } t_1 \leq t_2,$$

kde $y(t)$ je popsáno rovnicemi (15), $v_u(\tau)$ je váhová funkce tvarovacího filtru procesu $u(t)$.

Důkaz.

$$Y_N(s) = Y_U(s) U_N(s) = (1 - e^{-st_1} Q(s)) S_u^1(s);$$

$Y_N(s)$, $U_N(s)$ jsou přenosy tvarovacích filtrů procesů $y(t)$ resp $u(t)$; originál výrazu na pravé straně nechť je $v_u(\tau)$. Jelikož $\mathcal{L}^{-1}(e^{-st_1} Q(s))$ je rovno nule pro $0 \leq \tau < t_1$, je $v_y(\tau) = v_u(\tau)$ pro $0 \leq \tau < t_1$. Položme dále

$$v_u^0(\tau) = v_u(\tau) \quad \text{pro } 0 \leq \tau < t_1, \\ v_u^0(\tau) = 0 \quad \text{pro } \tau > t_1$$

volme

$$1 - e^{-st_1} Q(s) = [S_u^1(s)]^{-1} \mathcal{L}(v_u^0(\tau));$$

odtud

$$(17) \quad Q(s) = - \frac{\int_0^{t_1} v_u(\tau) e^{-s\tau} d\tau - \int_0^\infty v_u(\tau) e^{-s\tau} d\tau}{\int_0^\infty v_u(\tau) e^{-s\tau} d\tau} e^{st_1} = \\ = + \frac{\int_{t_1}^\infty v_u(\tau) e^{-s(\tau - t_1)} d\tau}{\int_0^\infty v_u(\tau) e^{-s\tau} d\tau} = [S_u^1(s)]^{-1} \int_0^\infty v_u(\tau + t_1) e^{-s\tau} d\tau.$$

Tato volba je přípustná, poněvadž poslední výraz nemá póly v pravé polorovině. Potom $Y_N(s) = \mathcal{L}[v_u^0(\tau)]$; odtud plyne

$$\overline{y^2} = \int_0^\infty [v_u^0(\tau)]^2 d\tau = \int_0^{t_1} v_u^2(\tau) d\tau.$$

Ale z druhé strany

$$\overline{y^2} = \int_0^\infty v_y^2(\tau) d\tau \geq \int_0^{t_1} y_y^2(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} v_u^2(\tau) d\tau.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Přenos optimálního regulátoru dostaneme podle (17) a (16).

Poznámka. Je-li $v_u(\tau)$ v nule spojitá zprava (prakticky tento případ jistě nastane, neboť $u(t)$ zpravidla nebude mít povahu bílého šumu), bude $\lim \min \overline{y^2} = 0$, tudíž se lze libovolně přiblížit k úplnému vyhlazení poruchy; v případě, že $P(s)$ má póly na imaginární ose (jako v příkladech 1, 2) bude to ovšem na úkor přiblížení k hranici stability.

Po příslušné modifikaci pro spojitý případ lze uvést poznámky 1–5 z odst. 1.2.

3. ZÁVĚR

Při syntéze popsaných modelů jsme vycházeli z předpokladu speciální jednoduché dynamiky soustavy. Tento předpoklad umožnil redukcí problému soustavy s rozloženými parametry na problém speciální obyčejné soustavy (se soustředěnými parametry). Tyto modely nejsou tudíž vhodné např. pro pece, v kterých dochází k zahřívání materiálu. Praktický přínos článku spočívá hlavně v popisu syntézy regulátorů, zajišťujících optimální režim ve smyslu minimalizace střední kvadratické chyby výstupu v obvodech, které lze aproximovat popsaným modelem.

(Došlo dne 4. ledna 1967.)

LITERATURA

- [1] A. M. Яглом: Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи физ. наук 7, № 5 (51), 3–16.
- [2] Я. З. Цыпкин: Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, Москва 1963.
- [3] V. Strejc: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, Praha 1965.
- [4] Z. Režný: Vyhlazování v diskretním náhodném procesu autoregresního typu. Problémy kybernetiky, NČSAV, Praha 1965, 96–106.
- [5] L. Prouza: On the Smoothing of a Discrete Random Autoregressive Process. Kybernetika 2 (1966), 5, 423–434.
- [6] A. E. Бутковский: Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Наука, Москва 1965.

The Smoothing of Noise in One Simple Variant of Distributed-Parameters-System

VLADIMÍR KRACÍK

Let us consider a system described by the following equations

$$\begin{aligned} y_n + a_k y_{n-k} + a_{k+1} + \dots + a_{k+h} y_{n-k-h} = \\ u_n - p_1 r_{n-1} - p_2 r_{n-2} - \dots - p_l r_{n-l}, \\ r_n = \sum_{i=0}^{\infty} w_i y_{n-i}, \end{aligned}$$

where y_n or r_n is a smoothed or smoothing quantity respectively and where u_n is a discrete noise with rational spectral density. In this paper the problem of optimal smoothing of noise with respect to the mean square error is solved. If $a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+h} = 0$, then the system can be illustrated by the following example of system with distributed parameters (cf. Fig. 1). Containers are assumed to shift under batching points $N_l, N_{l-1}, \dots, N_1$. When any of the container pass by any batching point a random ration is batched. The summary ration contained in n -th container after leaving the last batching point is a random variable. The deviation between this quantity and a desired quantity is supposed to be given will be denoted by u_n . In a closed system the output deviation will be denoted by y_n , the smmoothing quantity by r_n , and the ration corresponding to N_j and to the n -th step is assumed to be decreased by the quantity $p_j r_n$.

The continuous alternative is also considered.

It is shown that under some assumptions concerning a_j and p_j the problem of optimalization can be reduced to the problem of optimal prediction and the synthesis of optimal system is given. Under this assumptions the least mean square error of the output is given by $\sum_{i=1}^j v_i^2$ where v_k is a weight sequence of forming filter of the noise u_n and j is the regulator delay.

Ing. Vladimír Kracík, Vysoká škola strojní a textilní, Hálkova 6, Liberec.