KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 3/1967

Jedna úloha optimální obsluhy několika výrobních procesů s náhodnými parametry

KAREL SLADKÝ

Práce se zabývá stanovením optimální strategie obsluhy několika výrobních procesů, které jsou diskrétní v čase. Zadanou úlohu lze řešit jako jistou úlohu o optimalizaci semimarkovského procesu. Howardův-Schweitzerův iterační postup je rozšířen pro případ, kdy hledaná optimální strategie musí vyhovovat zadané vedlejší podmínce.

0. ÚVOD

V práci se řeší optimalizace dvouetapových výrobních procesů, skládajících se z obsluhovací a pracovní etapy. Doby trvání obsluhovací (resp. pracovní) etapy jsou náhodné proměnné ξ (resp. η) se zadanými distribučními funkcemi.

U téhož výrobního procesu může probíhat buď obsluhovací nebo pracovní etapa nebo může docházet k prostoji. K provedení obsluhovací etapy každého výrobního procesu je nutno použít obsluhovacího elementu, který je obsazen po celou dobu obsluhy. Obsluhovací element je jediný.

Každý z výrobních procesů přináší dané zisky během jednotkové doby obsluhovací i pracovní etapy. Při prostoji každého výrobního procesu vznikají specifické ztráty přímo úměrné době prostoje. Probíhající obsluhovací ani pracovní etapu nelze přerušit. Pro případ, že náhodné proměnné ξ, η nabývají konečného počtu hodnot, je vypracována metoda pro nejvhodnější obsluhování. Je ukázáno, že tato úloha je ekvivalentní při hledání optimální obsluhovací strategii ve značně dlouhém čase s jistou úlohou o optimalizaci semimarkovského procesu s konečným počtem stavů, který v našem případě bude charakterizován maticí přechodu $[p_{ij}]$ markovského řetězce, deterministickou dobou přechodu τ_{ij} z i-tého do j-tého stavu a ziskem r_{ij} při přechodu z i-tého do j-tého stavu.

Z literatury jsou známy iterační metody pro nalezení optimální strategie semimarkovského procesu s konečným počtem stavů. V práci je dále navržen iterační postup pro případ, kdy hledaná optimální strategie musí splňovat nějakou zadanou vedlejší podmínku. Tato vedlejší podmínka v řešeném modelu může být interpretována jako minimální, plánem zadaný, průměrný počet výrobků jistého výrobního procesu, což — jak lze lehce ukázat — je ekvivalentní jistému průměrnému zisku tohoto výrobního procesu.

Uvedeme některé možné aplikace výše formulovaného obecného modelu. U všech aplikací předpokládáme, že známe distribuční funkce vyskytujících se náhodných veličin a zisky i ztráty vznikající v jednotlivých stavech výrobních procesů.

1. Obsluha poloautomatických strojů, které pro provedení pracovní etapy, jejíž trvání je náhodné, vyžadují po náhodnou dobu zásah člověka.

2. Optimalizace rozvrhu rozvážky materiálu, kdy po nakládání každého automobilu následuje přeprava nákladu, vykládka a návrat automobilu. Nakládacím zařízením je možno současně nakládat jen jeden automobil, jehož nakládání není možno přerušit.

3. Optimalizace dvouetapových výrobních procesů, kdy první etapu každého výrobního procesu provádí stejný nástroj a kdy druhá etapa musí bezprostředně následovat po prvé etapě téhož výrobního procesu. Současně lze zpracovávat pouze jeden výrobek určitého typu.

4. Určení optimálního rozvrhu práce vsázecího stroje, který obsluhuje větší počet siemens-martinských prací. Předpokládáme, že trvání vsázky do pece i tavby jsou náhodné a že známe zisky z taveb a lineární ztráty vznikající při překročení potřebné doby tavby.

1. FORMULACE PROBLÉMU

Uvažujme n výrobních procesů. j-tý výrobní proces může být pouze v jednom ze 3 stavů, a to ve stavu:

2 – jestliže probíhá *obsluhovací etapa*;
1 – jestliže probíhá *pracovní etapa*;
0 – jestliže dochází k *prostoji* u j-tého výrobního procesu.

Po provedené obsluhovací etapě j-tého výrobního procesu, musí bezprostředně následovat pracovní etapa j-tého výrobního procesu, čímž vznikne *operace* j-tého výrobního procesu. U každého výrobního procesu pracovní etapa může začít pouze bezprostředně po ukončení obsluhovací etapy téhož výrobního procesu.

Obsluhovací etapa j-tého výrobního procesu je náhodná proměnná ξ_j s danou distribuční funkcí $F_j(x)$. Pracovní etapa j-tého výrobního procesu je rovněž náhodná proměnná η_j s danou distribuční funkcí $G_j(x)$. Náhodné proměnné ξ_j, η_j nabývají konečného počtu hodnot $\xi_j > 0$, $\eta_j > 0$. Jednotlivé obsluhovací a pracovní etapy jsou nezávislé. Probíhající obsluhovací ani pracovní etapu nelze přerušit.

K provedení obsluhovací etapy každého výrobního procesu je třeba použít obsluhovacího elementu, který v této době nemůže provádět obsluhu jiného výrobního procesu. Předpokládá se pouze jeden obsluhovací element.

Jestliže j-tý výrobní proces je ve stavu:

2 – vytváří se hodnota c_j za jednotku času;
1 – vytváří se hodnota a_j za jednotku času;
0 – vznikají ztráty b_j za jednotku času.

Strategií obsluhy výrobních procesů rozumíme návod, podle kterého v případě, že není obsluhovací element obsazen, máme se rozhodnout, který z těch výrobních procesů, jež jsou ve stavu 0, budeme obsluhovat.

Úloha 1. Nalezněte takovou strategii obsluhy výrobních procesů, která dává nejvyšší průměrný zisk v době $T \to \infty$ (průměrným ziskem rozumíme rozdíl hodnot, vytvořených během jednotlivých operací, a ztrát, vznikajících při prostojích, vztažený na jednotku času).

Úloha 2. Nalezněte takovou strategii obsluhy výrobních procesů, která dává nejvyšší průměrný zisk v době $T \to \infty$ za předpokladu, že průměrný zisk vytvořený v určitém výrobních procesu (popř. součet průměrných zisků vytvořených ve třídě vybraných výrobních procesů) nebude menší než předem zadaná hodnota.

Podmínku, že průměrný zisk vytvořený v j-tém výrobním procesu není menší než zadaná hodnota H_j lze vyjádřit také tak, že průměrný počet operací za jednotku času v j-tém výrobním procesu není menší než jisté Q_j (viz vzorec (2)).

Poznámka. Podobným způsobem lze řešit i obecnější úlohu, kdy předpokládáme existenci většího počtu obsluhovacích elementů. Řešení takové úlohy obvykle vede na analýzu semimarkovského procesu s vysokým počtem stavů, kdy dále uvedené algoritmické postupu narážejí na značné výpočetní obtíže.

2. VYJÁDŘENÍ ŘEŠENÉHO PROBLÉMU JAKO ÚLOHY O ŘÍZENÍ SEMIMARKOVSKÉHO PROCESU

Jestliže hodnoty a_j, c_j vytvářené za jednotku času ve stavech 1, 2 j-tého výrobního procesu zvětšíme o b_j, lze předpokládat, že ztráty o velikosti b_j se vytvářejí ve všech stavech j-tého výrobního procesu. Obsluhovací (resp. pracovní) etapy j-tého výrobního procesu jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozložením. Proto (bez ohledu na počet hodnot, které mohou nabýt ξ_j, η_j — stačí předpokládat pouze existenci $\mathsf{E}[\xi_j]$, $\mathsf{E}[\eta_j]$) j-tý výrobní proces místo parametrů a_j, b_j, c_j můžeme charakterizovat *středním příjmem* Z_j, vytvářeným během operace j-tého výrobního procesu, kde

$$Z_j = \mathsf{E}[\eta_j] a_j + (\mathsf{E}[\xi_j] + \mathsf{E}[\eta_j]) b_j + \mathsf{E}[\xi_j] c_j , \tag{1}$$

a ztrátami b_j, jež vznikají během jednotkové doby ve všech stavech j-tého výrobního procesu. Ze stejných důvodů se lehce přesvědčíme o platnosti následující věty.

Věta 1. *Jestliže j-tý výrobní proces místo parametrů a_j, b_j, c_j charakterizujeme parametry $\bar{a}_j$, $\bar{b}_j$. $\bar{c}_j$, pro které:*

$$\bar{a}_j = 0 ; \quad \bar{b}_j = b_j ; \quad \bar{c}_j = c_j + b_j + (a_j + b_j) \frac{\mathsf{E}[\eta_j]}{\mathsf{E}[\xi_j]} , \tag{1*}$$

a jestliže ztráty o velikosti $b_j = \bar{b}_j$ vznikají ve všech stavech j-tého výrobního procesu, dostaneme pro $T \to \infty$ při jakékoliv obsluhovací strategii s jednotkovou pravděpodobností stejný průměrný zisk jako v případě, když j-tý výrobní proces je charakterizován parametry a_j, b_j, c_j.

Poznámka. Analogické tvrzení lze vyslovit i pro případ, že náhodné zisky vytvořené během obsluhovací (resp. pracovní) etapy jsou nezávislé na době trvání obsluhovací (resp. pracovní) etapy.

Pomocí vzorce (1) zjistíme snadno vztah mezi hodnotami H_j a Q_j. Platí:

(2) $$Z_j Q_j - b_j = H_j .$$

Jestliže v určitém výrobním procesu je vytváření ztrát nezávislé na stavu tohoto procesu, nemusíme zřejmě při hledání optimální obsluhovací strategie takto vytvářené ztráty uvažovat. Vzhledem k tomu, že o náhodných proměnných ξ_j, η_j předpokládáme, že mohou nabýt pouze konečného počtu hodnot, můžeme všechny hodnoty, které náhodné proměnné ξ_j, η_j nabývají, aproximovat celočíselným násobkem jistého $\Delta > 0$ (tedy všechna rozhodnutí o obsluze budeme provádět pouze v časových okamžicích rovných celočíselnému násobku Δ). Budeme definovat *funkci stavu výrobních procesů* jako vektorovou funkci času typu

$$\{A_1(t), A_2(t), \ldots, A_n(t)\} .$$

Pro složky $A_j(t)$ platí:

$$A_j(t) = 0 ,$$

jestliže v čase t j-tý výrobní proces je ve stavu 0;

$$A_j(t) = \left[\frac{t_j}{\Delta} + 1\right],$$

jestliže v čase t j-tý výrobní proces je ve stavu 1 po dobu t_j;

$$A_j(t) = -\left[\frac{t_j}{\Delta} + 1\right],$$

jestliže v čase t j-tý výrobní proces je ve stavu 2 po dobu t_j;

Pro hledání optimální obsluhovací strategie mají význam pouze ty časové okamžiky, ve kterých:

a) je dokončena obsluhovací etapa některého výrobního procesu;

b) je dokončena pracovní etapa některého výrobního procesu za předpokladu, že v tomto okamžiku obsluhovací element neprovádí obsluhu žádného výrobního procesu.

Funkce stavu výrobních procesů definovaná v těchto časových okamžicích se jmenuje *stavový vektor*.

Je patrné, že j-tá složka stavového vektoru může nabýt pouze hodnoty $0, 1, \ldots$ $\ldots, \xi_{j\max}/\Delta = A_{j\max}$ a že žádné 2 nenulové složky stavového vektoru nemohou být stejné. Označme $M_j = A_{j\max} + 1$. Jednotlivé výrobní procesy lze vždy očíslovat tak, aby $M_j \leqq M_{j+1}$.

Počet různých stavových vektorů (když neuvažujeme ty stavové vektory, které mají aspoň 2 stejné nenulové složky) je menší než $\prod_{i=1}^{n} M_i$. Podrobnějším rozborem v případě 3 výrobních procesů pro počet různých stavových vektorů N dostaneme (analogický vztah lze napsat pro libovolné n):

$$N = (M_1 - 1)(M_2 - 1)(M_3 - 1) + (M_2 - 1)(M_3 - 2) + \\ + (M_1 - 1)(M_3 - 2) + (M_1 - 1)(M_2 - 2) + (M_1 - 1) + \\ + (M_2 - 1) + (M_3 - 1) + 1\,.$$

Všechny posloupnosti stavových vektorů, které se mohou vyskytnout při hledání optimální obsluhovací strategie a pravděpodobnosti, se kterými při obsluze jistého výrobního procesu přejdeme z jednoho stavu do druhého, nalezneme pomocí následujícího algoritmu:

Algoritmus 1. 1. Vyjdeme ze stavu charakterizovaného stavovým vektorem $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

2. Množinu hodnot j, pro které $A_j = 0$ označíme $\mathscr{J}$ (stavový vektor $\{A_1, A_2, \ldots \ldots, A_n\}$ uvažujeme v čase t_0). Určíme

$$z = \min_{j \in \mathscr{J}} \xi_{j\max}$$

a zjistíme, zda existuje i-tý výrobní proces, u kterého je možno pro nějaké $\eta_i > A\Delta$ splnit vztah $\eta_i - A\Delta_i < z$ (množinu těchto výrobních procesů označíme $\mathscr{I}$). Určíme dále pravděpodobnosti, s jakými dostaneme jednotlivé stavové vektory při obsluze j-tého výrobního procesu ($j \in \mathscr{J}$) a v případě, že $\mathscr{I} \neq \emptyset$ nebo $\mathscr{J} = \emptyset$ se zajímáme též, s jakými pravděpodobnostmi dostaneme v okamžiku $t_0 + \Delta$ jednotlivé stavové vektory, jestliže v okamžiku t_0 neprovádíme obsluhu žádného výrobního procesu.

3. Úvahu bodu 2 opakujeme tak dlouho, dokud nevyčerpáme všechny stavové vektory, které se v uvedeném postupu někdy vyskytly.

Jak bylo ukázáno, lze při zvoleném kritériu optimality charakterizovat j-tý výrobní proces pouze středním příjmem Z_j podle vztahu (1). Protože všechny pracovní etapy jsou omezené, lze též při zvoleném kritériu optimality ohodnotit doby přechodu mezi jednotlivými stavovými vektory následovně:

a) Jestliže je provedena obsluhovací etapa j-tého výrobního procesu, doba přechodu je rovna $\mathsf{E}[\xi_j]$ (lehce se přesvědčíme, že při $T \to \infty$ z hlediska průměrného zisku je lhostejné, zda uvažujeme $\mathsf{E}[\xi_j]$ místo realizace ξ_j).

b) Jestliže neprovádíme obsluhu žádného výrobního procesu, doba přechodu mezi odpovídajícími stavovými vektory je rovna Δ.

Ukážeme dále, že na základě hodnot $\bar{c}_j$ podle vztahu (1*) a průměrného zisku, který dává nějaká přípustná obsluhovací strategie, lze v některých stavech zjednodušit volbu alternativ, nutných pro hledání optimální obsluhovací strategie. Platí:

Věta 2. *Jestliže každý výrobní proces charakterizujeme parametry podle věty 1 a neuvažujme přitom ztráty o velikosti b, které se vytvářejí neustále, a jestliže nějaká strategie obsluhy (P) dává průměrný zisk $\Theta^{(P)} \geqq \bar{c}_j$, potom pro úlohu 1 existuje optimální obsluhovací strategie, u které, jestliže nastal stav $\{0, 0, 0, \ldots, 0\}$, není v tomto stavu obsluhován j-tý výrobní proces.*

Důkaz. Jednotlivé výrobní procesy budeme charakterizovat podle věty 1 hodnotami danými vzorcem (1*). Předpokládejme, že při optimální strategii (0) je ve stavu $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$ obsluhován j-tý výrobní proces; ze stavu $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$ přejdeme do stavu $\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0\}$. Při strategii (0) označíme při přechodu ze stavu $\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0\}$ do stavu $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$ střední zisk $z^{(0)}$ a střední dobu přechodu $\tau^{(O)}$. Pro průměrný zisk $\Theta^{(O)}$ platí:

$$\Theta^{(O)} = \frac{z^{(O)} + \bar{c}_j \, \mathsf{E}[\xi_j]}{\tau^{(O)} + \mathsf{E}[\xi_j]} \geqq \Theta^{(P)} \geqq \bar{c}_j \,. \tag{3}$$

Úpravou (3) dostaneme:

$$\Theta^{(O)}\tau^{(O)} + \Theta^{(O)} \, . \, \mathsf{E}[\xi_j] = z^{(O)} + \bar{c}_j \, . \, \mathsf{E}[\xi_j]$$

a proto

$$\Theta^{(O)} + \left(\Theta^{(O)} - \bar{c}_j\right) . \, \mathsf{E}[\xi_j] \, \frac{1}{\tau^{(O)}} = \frac{z^{(O)}}{\tau^{(O)}} \, ; \quad \text{a tedy} \quad \Theta^{(O)} \leqq \frac{z^{(O)}}{\tau^{(O)}} \, .$$

Dále sestrojíme strategii obsluhy (S), u které ve stavu $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$ nebude prováděna obsluha j-tého výrobního procesu a pro kterou bude platit

$$\Theta^{(S)} = \frac{z^{(O)}}{\tau^{(O)}} \geqq \Theta^{(O)} \, .$$

Předpokládejme, že ve stavu $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$ začíná být prováděna fiktivní pracovní etapa j-tého výrobního procesu (po náhodnou dobu η_j nebude možno provádět obsluhu j-tého výrobního procesu). Jestliže po této změně v každém stavu systému výrobních procesů použijeme strategii (O), dostaneme pro takto vzniklou strategii (S) průměrný zisk

$$\Theta^{(S)} = \frac{z^{(O)}}{\tau^{(O)}} \geqq \Theta^{(O)},$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Pro $n = 2$, kdy existuje $\Theta^{(P)} \geqq \bar{c}_2$, lze se lehce přesvědčit, že ve stavu $\{0, A_2\}$ při optimální obsluhovací strategii pro úlohu 1 stačí obsluhovat 1. výrobní proces.

Podle hodnot $\bar{c}_j$ lze sestrojit přibližně optimální obsluhovací strategii tak, že při současně možné obsluze většího počtu výrobních procesů, obsluhujeme výrobní proces s větším $\bar{c}_j$. Na příkladě 1 ukážeme, že tento způsob nemusí však vést k optimální strategii.

Příklad 1. Uvažujme 2 výrobní procesy určené deterministicky hodnotami:

$$\xi_1 = 1{,}5\,; \quad \xi_2 = 1{,}0\,; \quad \eta_1 = 1{,}0\,; \quad \eta_2 = 5{,}0\,; \quad \bar{c}_1 = 2{,}0\,; \quad \bar{c}_2 = 3{,}0\,.$$

Opakování obsluhy výrobních procesů v pořadí 1, 2, 1, 1; 1, 2, 1; 1; ... dává průměrný zisk $\Theta_1 = 1{,}6$; opakování obsluhy výrobních procesů v pořadí 2, 1, 1; 2, 1, 1; ... dává průměrný zisk $\Theta_2 = 1{,}5$.

Pomocí algoritmu 1 lze vyšetřované úlohy formulovat jako úlohy o řízení semimarkovského procesu s konečným počtem stavů. Protože tyto úlohy mají i jiné interpretace (na příklad v teorii obnovy – viz [3]), uvedeme poněkud obecnější formulaci než vyžadují úlohy 1 a 2.

Algoritmus 1 převádí úlohu 1 na úlohu 1* a úlohu 2 na úlohu 2*.

Úloha 1*. Mějme semimarkovský proces s N stavy. V i-tém stavu je možná volba jedné z $s_i \leqq n$ strategií. k-tá strategie v i-tém stavu je charakterizována vektorem přechodu $[p_{i1}^{(k)}, p_{i2}^{(k)}, \ldots, p_{iN}^{(k)}]$. Přechodu z i-tého do j-tého stavu jsou přiřazeny hodnoty r_{ij}, τ_{ij}, kde $\tau_{ij} > 0$. Kritériem optimality je průměrný zisk

$$\Theta = \frac{\sum_{(i,j)} r_{ji}}{\sum_{(i,j)} \tau_{ij}},$$

kde (i, j) je dvojice po sobě následujících stavů, ve kterých se uvažovaný semimarkovský proces nacházel. V každém stavu máme nalézti takovou přípustnou strategii, aby pro $\sum_{(i,j)} \tau_{ij} \to \infty$ hodnota Θ byla co největší.

Úloha 2. Nalezněte optimální strategii semimarkovského procesu z úlohy 1*, která navíc splňuje tuto podmínku:
Průměrný zisk

$$\Lambda = \frac{\sum_{(i,j)} r_{ij}\chi(i, k_i)}{\sum_{(i,j)} \tau_{ij}} \geqq H\,,$$

kde

$$\chi_i^{(A)} = \chi(i, k_i) = 1 \quad (\text{resp. } 0)\,,$$

jestliže strategie (k_i) použitá v i-tém stavu při strategii* (A) patří (resp. nepatří) do

* Při označování strategií používáme stejné symboliky jako v [1]. Malými písmeny značíme strategie v jednotlivých stavech; soubor použitých strategií ve všech stavech je značen velkým písmenem.

třídy $\mathscr{S}$. (Třída $\mathscr{S}$ je třída předem vytknutých strategií; o každé strategii víme, zda patří či nepatří do třídy $\mathscr{S}$.) H je zadaná hodnota, symbol (i, j) má stejný význam jako v úloze 1*.

Poznámka. Jestliže hodnoty r_{ij}, τ_{ij}, jsou nezávislé náhodné proměnné, stačí přechod z i-tého do j-tého stavu ohodnotit $\mathsf{E}[r_{ij}]$, $\mathsf{E}[\tau_{ij}]$. Podrobnější rozbor viz [2].

Při řešení úlohy 1* a 2* se omezíme na *stacionární strategie* (jsou to strategie, které nezávisí na čase nebo na počtu přechodů).

3. ŘEŠENÍ ÚLOHY 1*

K řešení úlohy 1* Jewell a Schweitzer (viz [2], [3]) zobecnili Howardův iterační postup (viz [1]). Uvedeme podrobněji pouze Schweitzerův postup (viz [3], Appendix D).

Protože může nastat případ, že uvažovaný semimarkovský proces má více ergodických tříd, uvedeme obecné schéma iteračního postupu (pojem ergodické třídy je chápán stejně jako v práci [1]). Označme

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot r_{ij} ;$$

$$\hat{q}_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot \tau_{ij} .$$

(Při řešení naší úlohy $q_i = 0, Z_k$; $\hat{q}_i = \Delta$, $\mathsf{E}[\xi_k]$; lehce se přesvědčíme, že pro jisté i, j v naší úloze může $p_{ij}^{(k)} \neq 0$ nanejvýše pro jedinou strategii (k_i).)

Úlohu 1* řeší

Algoritmus 2 (Schweitzer). 1. *Ohodnocení řešení.* Z hodnot p_{ij}, q_i, $\hat{q}_i$ náležejících jisté strategii nalezneme průměrné zisky Θ_i a váhy jednotlivých stavů w_i řešením systému rovnic

$$\Theta_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \Theta_j ,$$

$$w_i = q_i - \Theta_i \hat{q}_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} w_j , \tag{4}$$

při čemž klademe v každé ergodické třídě jedno $w_i = 0$.

2. *Zlepšení řešení.* Z hodnot Θ_i určených v bodě 1, v i-tém stavu určíme strategii (k) maximalizující

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)} \Theta_j .$$

Jestliže taková strategie (k) je jediná, použijeme ji v i-tém stavu, jinak využijeme hodnoty w_i zjištěné v bodě 1 a použijeme v i-tém stavu strategii (k), která maximalizuje

$$q_i - \Theta_i \hat{q}_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)} w_j .$$

V případě, že strategie použitá v předchozím iteračním kroku bude nezměněna při zlepšování řešení, je tato strategie optimální strategií, jinak se vrátíme k bodu 1 a s nově vypočtenými hodnotami p_{ij}, q_i, $\hat{q}_i$ postup opakujeme.

Důkaz konvergence tohoto iteračního postupu k optimální strategii lze provést analogicky k důkazu Howardova iteračního postupu podrobně uvedeného v [1].

Uvedeme pouze vzorec pro změnu průměrného zisku v případě 1 ergodické třídy při změně použité strategie. Níže uvedené vztahy budeme potřebovat při řešení úlohy 2*. Platí toto tvrzení:

Jestliže pro strategii (A) dává uvažovaný semimarkovský proces průměrný zisk $\Theta^{(A)}$ a pro strategii (B) průměrný zisk $\Theta^{(B)}$, pak

$$\Theta^{(B)} - \Theta^{(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(B)} \gamma_i^{(B,A)}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(B)} \hat{q}_i^{(B)}} \tag{5}$$

(srv. vzorec (D.3) v práci [3] a vzorec (4.12) v [1]), *kde (při strategii (B) v i-tém stavu použijeme strategii (k_i))*

$$\gamma_i^{(B,A)} = \gamma_i(k_i, A) = q_i^{(B)} - \Theta^{(A)} \hat{q}_i^{(B)} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(B)} w_j^{(A)} - q_i^{(A)} + \Theta^{(A)} \hat{q}_i^{(A)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(A)} w_j^{(A)} = q_i^{(B)} - \Theta^{(A)} \hat{q}_i^{(B)} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(B)} w_j^{(A)} - w_i^{(A)} ,$$

kde $\pi_i^{(B)}$ je pravděpodobnost, že markovský proces s maticí přechodů stejnou jako ***při strategii (B) je v i-tém stavu po velkém počtu přechodů.***

Stav i, kdy $\pi_i^{(B)} \neq 0$ nazveme *podstatným* pro strategii (B), jestliže $\pi_i^{(B)} = 0$ stav i je pro strategii (B) *nepodstatný.*

Zavedeme ještě symboly

$$q_i^{(B)} = q_i(k_j) ,$$

$$p_{im}^{(B)} = p_{im}(k_j) ;$$

když při strategii (B) je v i-tém stavu použita strategie (k_j).

Při řešení úlohy 2*, kdy se omezíme na případ, že pro jakoukoliv přípustnou strategii existuje pouze 1 ergodická třída, je třeba vypočíst průměrný zisk Λ a váhové koeficienty v_i, které obdržíme při použití strategií z dané třídy $\mathscr{S}$.

Hodnoty v_i, Λ vypočteme řešením soustavy rovnic (srv. vztah (4))

$$(4)^* \qquad v_i = q_i\chi_i - \Lambda\hat{q}_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j ,$$

kde jedno $v_i = 0$.

Poznámka. V případě, kdy vedlejší podmínku pro úlohu 1 je četnost jistých stavů patřících do třídy $\mathscr{S}'$, v rovnicích (4*) místo členu $q_i\chi_i$ zavedeme $\sum_{j=i}^{N} p_{ij}\varphi_j$ kde obdobně $\varphi_j = 1, 0$; podle toho, zda j-tý stav patří či nepatří do třídy $\mathscr{S}'$.

V případě, že vedlejší podmínkou je průměrný zisk semimarkovského procesu, u kterého na rozdíl od úlohy 1 jsou změněny pouze hodnoty r_{ij} na r'_{ij}, zavedeme v rovnicích (4*) místo $q_i\chi_i$, $q'_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}r'_{ij}$.

Dále zavedeme (srv. vztah (6)):

$$(6^*) \qquad \delta_i^{(B,A)} = \delta_i(k_i, A) = q_i^{(B)}\chi_i^{(B)} - \Lambda^{(A)}\hat{q}_i^{(B)} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(B)}v_j^{(A)} -$$

$$- q_i^{(A)}\chi_i^{(A)} + \Lambda^{(A)}\hat{q}_i^{(A)} - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(A)}v_i^{(A)} = q_i^{(B)}\chi_i^{(B)} - \Lambda^{(A)}\hat{q}_i^{(B)} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(B)}v_j^{(A)} - v_i^{(A)} .$$

Analogicky ke vztahu (5) platí

$$(5^*) \qquad \Lambda^{(B)} - \Lambda^{(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(B)}\delta_i^{(B,A)}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(B)}\hat{q}_i^{(B)}} .$$

Úlohu 2* řeší pro případ 1 ergodické třídy

Algoritmus 3. Nechť (A_0) je optimální strategie pro úlohu 1* (tedy lze najít strategii (A_0) tak, že všechna $\gamma_i(k_j, A_0) \leqq 0$ viz [3]). V případě, že $\Lambda^{(A_0)} < H$, o existenci řešení úlohy 2* a jeho nalezení rozhodneme postupnou změnou strategie (A_0) tímto způsobem:

I. Určíme stav g a strategii (k_h) ve stavu g, pro kterou platí (pro $l = 1, 2, \ldots$):

$$(7) \qquad \frac{\gamma_g(k_h, A_{l-1})}{\delta_g(k_h, A_{l-1})} = \max_{\substack{i,j \\ \delta_i(k_j, A_{l-1}) > 0}} \frac{\gamma_i(k_j, A_{l-1})}{\delta_i(k_j, A_{l-1})} = M_{l-1} .$$

 Rozeznávejme 2 případy:

α) existuje jediná dvojice (g, h) splňující vztah (7);

β) existuje více dvojic (g, h) splňujících vztah (7).

V případě, když neexistuje $\delta_i(k_j, A_{l-1}) > 0$, nelze zvýšit průměrný zisk Λ a úloha 2* nemá řešení.

Pro strategii (A_l), která se liší od strategie (A_{l-1}) pouze použitím strategie (k_h) ve stavu g, vypočteme váhové koeficienty w_i (resp. v_i) a průměrné zisky Θ (resp. Λ) řešením systému rovnic (4) (resp. (4*)). (V případě β) je možno změnit strategii (A_{l-1}) v libovolném počtu stavů vyhovujících vztahu (7).)

II. Porovnáme Λ s H:

a) Pro $\Lambda^{(A_l)} = H$ je strategie (A_l) hledanou optimální strategií.

b) Pro $\Lambda^{(A_l)} > H$ je hledanou optimální strategií smíšená strategie, kde v g-tém stavu s pravděpodobností p_g použijeme strategii (A_l) a s pravděpodobností $(1 - p_g)$ použijeme strategii (A_{l-1}). Hodnoty p_g určíme řešením systému rovnic (4*) pro $\Lambda = H$; $p_{ij}^{(A_l)} = p_{ij}^{(A_{l-1})}$ pro $i \neq g$, když g-tá rovnice tohoto systému má tvar:

$$v_g = q_g^{(A_{l-1})} \chi_g^{(A_{l-1})} - H \hat{q}_g^{(A_{l-1})} + \sum_{j=1}^{N} p_{gj}^{(A_{l-1})} v_j +$$
$$+ p_g \Big[q_g^{(A_l)} \chi_g^{(A_l)} - q_g^{(A_{l-1})} \chi_g^{(A_{l-1})} - H \big(\hat{q}_g^{(A_l)} - \hat{q}_g^{(A_{l-1})} \big) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \big(p_{gj}^{(A_l)} - p_{gj}^{(A_{l-1})} \big) v_j \Big] .$$

Pro takto zjištěnou strategii vypočteme ze systému (4) hodnotu Θ.

c) Pro $\Lambda^{(A_l)} < H$, jestliže pro strategii (A_{l-1}) nastal případ α), vrátíme se k bodu I.

Jestliže pro strategii (A_{l-1}) nastal případ β), určíme dvojice (i, j) splňující aspoň jeden ze vztahů (8), (8*), (8**) pro $(A_l) \equiv (B)$:

$$\gamma_i(k_j, B) > 0 \quad \text{pro} \quad \delta_i(k_j, B) = 0 , \tag{8}$$

$$\max_j \frac{\gamma_i(k_j, B)}{\delta_i(k_j, B)} > M_{l-1} \quad \text{pro} \quad \delta_i(k_j, B) > 0 , \tag{8*}$$

$$\min_j \frac{\gamma_i(k_j, B)}{\delta_i(k_j, B)} < M_{l-1} \quad \text{pro} \quad \delta_i(k_j, B) < 0 . \tag{8**}$$

Jestliže strategii (A_l) změníme tak, že ve stavu i použijeme strategii (k_j) splňující některý ze vztahů (8), (8*), (8**), obdržíme strategii (A_{l+1}). Položíme opět $(A_{l+1}) \equiv \equiv (B)$ a strategii (A_{l+1}) změníme stejným postupem. Jestliže pro strategii (A_{l+k}) (a takovou strategii obdržíme po konečném počtu kroků) neexistuje žádná dvojice (i, j) splňující aspoň jeden ze vztahů (8), (8*), (8**), vrátíme se k bodu I.

Algoritmus 3 dokážeme ve větách 3 až 7. Věty 3, 4, 7 dokazují správnost algoritmu 3 v případě, že všechny stavy jsou podstatné, věty 5, 6 rozšiřují důkaz na obecný případ ergodického semimarkovského procesu.

Lemma 1. *Nechť v i-tém stavu* $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *semimarkovského procesu z úlohy* 2* *s pravděpodobností* $p_i(k_j)$ *použijeme strategii* (k_j). *Tím obdržíme strategii* (S), *pro kterou platí*:

$$q_i^{(S)} = \sum_{j=1}^{s_i} p_i(k_j) \cdot q_i(k_j)\,, \quad \hat{q}_i^{(S)} = \sum_{j=1}^{s_i} p_i(k_j) \cdot \hat{q}_i(k_j)\,,$$

$$\gamma_i^{(S,A)} = \sum_{j=1}^{s_i} p_i(k_j) \cdot \gamma_i(k_j, A)\,, \quad \delta_i^{(S,A)} = \sum_{j=1}^{s_i} p_i(k_j) \cdot \delta_i(k_j, A)\,.$$

Důkaz. Stačí dosadit

$$p_{il}^{(S)} = \sum_{j=1}^{s_i} p_i(k_j) \cdot p_{il}(k_j)$$

do definičních vztahů pro q_i, $\hat{q}_i$, $\gamma_i^{(S,A)}$, $\delta_i^{(S,A)}$ a po snadných úpravách obdržíme dokazované vztahy.

Věta 3. *Nechť*

$$\gamma_i(k_j, A_{l-1}) \leqq 0 \quad \textit{pro} \quad \delta_i(k_j, A_{l-1}) = 0\,,$$

$$m_{l-1} = \min_{i,j} \frac{\gamma_i(k_j, A_{l-1})}{\delta_i(k_j, A_{l-1})} \qquad \textit{pro} \quad \delta_i(k_j, A_{l-1}) < 0\,,$$

$$M_{l-1} = \frac{\gamma_g(k_h, A_{l-1})}{\delta_g(k_h, A_{l-1})} = \max_{i,j} \frac{\gamma_i(k_j, A_{l-1})}{\delta_i(k_j, A_{l-1})} \quad \textit{pro} \quad \delta_i(k_j, A_{l-1}) > 0\,,$$

kde $m_{l-1} \geqq M_{l-1}$.

Strategie (A_l) *se liší od strategie* (A_{l-1}) *pouze použitím strategie* (k_h) *ve stavu* g. *Předpokládejme, že* $\Lambda^{(A_l)} > \Lambda^{(A_{l-1})}$ *(ze vztahu* (5*) *je patrno, že* $\Lambda^{(A_l)} \geqq \Lambda^{(A_{l-1})}$). *Pro strategii* (B) *předpokládáme pouze, že* $\Lambda^{(B)} > \Lambda^{(A_l)}$. *Potom*:

1. *Optimální strategii, která pro třídu vybraných strategií dává průměrný zisk* $\Lambda^{(C)} \in \langle \Lambda^{(A_{l-1})}, \Lambda^{(A_l)} \rangle$ *stačí hledat ve třídě „smíšených" strategií složených ze strategií* (A_{l-1}) *a* (A_l).

2. *Platí tyto dva navzájem ekvivalentní vztahy*:

$$\frac{\Theta^{(B)} - \Theta^{(A_{l-1})}}{\Lambda^{(B)} - \Lambda^{(A_{l-1})}} \leqq \frac{\Theta^{(A_l)} - \Theta^{(A_{l-1})}}{\Lambda^{(A_l)} - \Lambda^{(A_{l-1})}} = M_{l-1}\,, \tag{9}$$

$$\frac{\Theta^{(B)} - \Theta^{(A_l)}}{\Lambda^{(B)} - \Lambda^{(A_l)}} \leqq \frac{\Theta^{(A_l)} - \Theta^{(A_{l-1})}}{\Lambda^{(A_l)} - \Lambda^{(A_{l-1})}}\,. \tag{9*}$$

Důkaz. Tvrzení 1 dokážeme sporem. Předpokládejme existenci strategie (S) takové, že $\Lambda^{(C)} = \Lambda^{(S)}$ a že $\Theta^{(S)} > \Theta^{(C)}$. Podle (5), (5*) lze psát

$$(10) \quad \Lambda^{(S)} - \Lambda^{(A_{l-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(S)} \cdot \delta_i^{(S,A_{l-1})}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(S)} \cdot \hat{q}_i^{(S)}} = \frac{\sum_g \pi_g^{(C)} \cdot \delta_g^{(C,A_{l-1})}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(C)} \cdot \hat{q}_i^{(C)}} = \Lambda^{(C)} - \Lambda^{(A_{l-1})} > 0\,,$$

$$(11) \quad \Theta^{(S)} - \Theta^{(A_{l-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(S)} \cdot \gamma_i^{(S,A_{l-1})}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(S)} \cdot \hat{q}_i^{(S)}} > \frac{\sum_g \pi_g^{(C)} \cdot \gamma_g^{(C,A_{l-1})}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(C)} \cdot \hat{q}_i^{(C)}} = \Theta^{(C)} - \Theta^{(A_{l-1})}\,.$$

Násobením vztahů (10), (11) a dosazením za $\gamma_i^{(S,A_{l-1})}$, $\delta_i^{(S,A_{l-1})}$, $\gamma_g^{(C,A_{l-1})}$, $\delta_g^{(C,A_{l-1})}$, z lemmatu 1 obdržíme

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_g \sum_{j=1}^{s_i} \sum_{h=1}^{s_g} [\pi_i^{(S)} \cdot \pi_g^{(C)} \cdot p_i(k_j) \cdot p_g(k_h) \cdot \gamma_i(k_j, A_{l-1}) \cdot \delta_g(k_h, A_{l-1})] >$$
$$> \sum_{i=1}^{N} \sum_g \sum_{j=1}^{s_i} \sum_{h=1}^{s_g} [\pi_i^{(S)} \cdot \pi_g^{(C)} \cdot p_i(k_j) \cdot p_g(k_h) \cdot \gamma_g(k_h, A_{l-1}) \cdot \delta_i(k_j, A_{l-1})]$$

a o rovnici (12) ukážeme, že nemůže být splněna. Úpravou vztahů uvedených v předpokladech věty máme

$$\gamma_i(k_j, A_{l-1}) \cdot \delta_g(k_h, A_{l-1}) \leqq \gamma_g(k_h, A_{l-1}) \cdot \delta_i(k_j, A_{l-1})\,.$$

Po pronásobení těchto rovnic $\pi_i^{(S)} \cdot \pi_g^{(C)} \cdot p_i(k_j) \cdot p_g(k_h)$ a sečtení dostaneme spor se vztahem (12).

K tvrzení 2. Platnost vztahu

$$M_{l-1} = \frac{\Theta^{(A_l)} - \Theta^{(A_{l-1})}}{\Lambda^{(A_l)} - \Lambda^{(A_{l-1})}}$$

lehce odvodíme z (5) a (5*). Ekvivalenci vztahů (9) a (9*) lze ukázat pomocí jednoduchých algebraických úprav. Stačí proto dokázat pouze vztah

$$\frac{\Theta^{(B)} - \Theta^{(A_{l-1})}}{\Lambda^{(B)} - \Lambda^{(A_{l-1})}} \leqq \frac{\Theta^{(A_l)} - \Theta^{(A_{l-1})}}{\Lambda^{(A_l)} - \Lambda^{(A_{l-1})}} = \frac{\gamma_g(k_h, A_{l-1})}{\delta_g(k_h, A_{l-1})}\,.$$

Správnost tohoto vztahu lze prokázat analogicky jako v bodě 1.

Věta 4. *Uvažujeme ergodický semimarkovský proces z úlohy 2*, jehož každý stav je při libovolné přípustné strategii podstatný.*

Jestliže strategie (A_0) je optimální strategií pro úlohu 1 a jestliže strategii (A_{l+1}) obdržíme ze strategie (A_l) tak, že ve stavu g použijeme strategii (k_h) splňující vztah*

$$\frac{\gamma_g(k_h, A_l)}{\delta_g(k_h, A_l)} = \max_{\substack{i,j \\ \delta_i(k_j, A_l) > 0}} \frac{\gamma_i(k_j, A_l)}{\delta_i(k_j, A_l)} = M_l\,,$$

označíme-li dále

$$m_l = \min_{\substack{i,j \\ \delta_i(k_j, A_l) < 0}} \frac{\gamma_i(k_j, A_l)}{\delta_i(k_j, A_l)}\,,$$

potom platí:

1. $$\gamma_i(k_j, A_l) \leqq 0 \quad pro \quad \delta_i(k_j, A_l) > 0\,,$$
2. $$m_l \geqq M_l\,,$$
3. $$M_{l+1} \leqq M_l\,.$$

Důkaz. Při libovolné přípustné strategii jsou podle předpokladu všechna $\pi_i > 0$. Ze vztahu (5*) plyne, že $\Lambda^{(A_{l+1})} > \Lambda^{(A_l)}$. Důkaz věty 4 provedeme úplnou indukcí. Pro $l = 0$ tvrzení 1 a 2 okamžitě plyne z vlastností optimální strategie pro úlohu 1*; tvrzení 3 je důsledkem tvrzení 1 a 2 věty 4 a tvrzení 2 věty 3 pro $l = 0$.

Předpokládejme, že věta 4 platí pro $l - 1$. Pro $l - 1$ jsou pak splněny předpoklady věty 3. Tvrzení 1 věty 4 je snadným důsledkem tvrzení 1 věty 3. Jestliže by platilo $m_l < M_l$, změnou strategie (A_l) v jednom stavu lze sestrojit strategii (S) takovou, že $\Lambda^{(S)} < \Lambda^{(A_l)}$, a pro kterou dále platí

$$(13) \qquad \Theta^{(S)} = \Theta^{(A_l)} + m_l(\Lambda^{(S)} - \Lambda^{(A_l)}) > \Theta^{(A_l)} + M_l(\Lambda^{(S)} - \Lambda^{(A_l)}) \geqq$$
$$\geqq \Theta^{(A_l)} + M_{l-1}(\Lambda^{(S)} - \Lambda^{(A_l)})\,.$$

Vztah (13) je ve sporu s tvrzením 1 věty 3 pro $l - 1$, proto $m_l \geqq M_l$. Z platnosti tvrzení 1, 2 věty 4 plyne pro l platnost tvrzení 2 věty 3, ze kterého lehce dokážeme správnost tvrzení 3 věty 4 pro l.

Důsledek. Jsou-li splněny předpoklady věty 4, platí též věta 3.

Dále vyšetříme případ, kdy ergodický semimarkovský proces má i nepodstatné stavy. V tomto případě musí v matici přechodu existovat pro jistou strategii (A) nulové prvky. Změnou strategie (A) sestrojíme *ε-strategii* (A, ε) takto:

Jestliže pro jisté i, pro $n_i > 0$ hodnot j je $p_{ij}^{(A)} = 0$, množinu těchto hodnot j označíme $\mathscr{J}_i$.

Potom pro $j \in \mathscr{J}_i$ je $p_{ij}^{(A,\varepsilon)} = \varepsilon/n_i$ a pro jedno j_0 splňující $p_{ij_0}^{(A)} = \max_j p_{ij}^{(A)}$ klademe $p_{ij}^{(A,\varepsilon)} = p_{ij_0}^{(A)} - \varepsilon$. Pro $j \neq j_0$, $j \notin \mathscr{J}_i$ platí $p_{ij}^{(A,\varepsilon)} = p_{ij}^{(A)}$.

Je třeba vyšetřit změny váhových koeficientů a průměrného zisku, jestliže místo strategie (A) uvažujeme strategii (A, ε). Platí:

Lemma 2. *Nechť pro strategii (A) ergodický semimarkovský proces z úlohy 2* dává hodnoty $\Theta^{(A)}$, $w_i^{(A)}$. K danému $\delta > 0$ lze vždy najít takové $\varepsilon > 0$, že pro ε-strategii (A, ε) platí:*

$$|\Delta\Theta^{(A)}| < \delta\,; \quad |\Delta w_i^{(A)}| < \delta\,,$$

kde

$$\Delta\Theta^{(A)} = \Theta^{(A,\varepsilon)} - \Theta^{(A)}\,; \quad \Delta w_i^{(A)} = w_i^{(A,\varepsilon)} - w_i^{(A)}\,;$$

když pro jedno i klademe $w_i^{(A,\varepsilon)} = w_i^{(A)} = 0$.

Analogické tvrzení platí samozřejmě i pro v_i, A.

Důkaz. Označme $\Delta p_{ij}^{(A)} = p_i^{(A,\varepsilon)} - p_{ij}^{(A)}$ a zcela analogicky zavedeme $\Delta q_i^{(A)}$, $\Delta \hat{q}_i^{(A)}$. Úpravou ze systému rovnic (4) napsaných pro strategii (A) a (A, ε) dostaneme:

$$\Delta w_i^{(A)} = \sum_{j=1}^{N} p_i^{(A,\varepsilon)} \,.\, \Delta w_j^{(A)} - \Delta\Theta^{(A)} \,.\, \hat{q}_{ij}^{(A,\varepsilon)} + \tag{14}$$

$$+ \left[\Delta q_i^{(A)} - \Theta^{(A)} \,.\, \Delta\hat{q}_i^{(A)} + \sum_{j=1}^{N} \Delta p_{ij}^{(A)} \,.\, w_j^{(A)}\right].$$

Z definice q_i, $\hat{q}_i$ se lehce přesvědčíme o platnosti vztahů:

$$|\Delta q_i^{(A)}| < N \,.\, \max_j |r_{ij}| \,.\, \varepsilon\,; \quad |\Delta\hat{q}_i^{(A)}| < N \,.\, \max_j \tau_{ij} \,.\, \varepsilon\,;$$

a proto lze systém rovnic (14) přepsat:

$$\Delta w_i^{(A)} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(A,\varepsilon)} \,.\, \Delta w_j^{(A)} - \Delta\Theta^{(A)} \,.\, \hat{q}_i^{(A,\varepsilon)} + d_i\,, \tag{14*}$$

kde

$$|d_i| < N \,.\, \left[\max_j |r_{ij}| + \max_j \tau_{ij}\Theta^{(A)} + \max_j |w_j^{(A)}|\right] \,.\, \varepsilon\,.$$

O systému rovnic (14*) lze ukázat (viz [3]), že v případě jedné ergodické třídy (když klademe jedno $\Delta w_i^{(A)} = 0$), má vzhledem k $\Delta w_i^{(A)}$, $\Delta\Theta^{(A)}$ vždy jedno řešení; pro $\varepsilon = 0$ je zřejmě $d_i = 0$, $\Delta w_i^{(A)} = \Delta\Theta^{(A)} = 0$ a tvrzení lemmatu je zřejmé.

Důsledek. Z lemmatu 2 a definice $\gamma_i(k_j, A, \varepsilon)$, $\delta_i(k_j, A, \varepsilon)$ je patrno:

α) $\gamma_i(k_j, A, \varepsilon)$, $\delta_i(k_j, A, \varepsilon)$ jsou spojité vzhledem k ε;

β) jestliže

$$a > \frac{\gamma_j(k_j, A)}{\delta_j(k_j, A)} > b > \frac{\gamma_i(k_i, B)}{\delta_i(k_i, B)}\,; \quad \Theta^{(A)} > \Theta^{(B)}$$

potom lze najít takové $\varepsilon > 0$, že pro strategie (A, ε), (B, ε) platí:

$$a > \frac{\gamma_j(k_j, A, \varepsilon)}{\delta_j(k_j, A, \varepsilon)} > b > \frac{\gamma_i(k_i, B, \varepsilon)}{\delta_i(k_i, B, \varepsilon)}\,; \quad \Theta^{(A,\varepsilon)} > \Theta^{(B,\varepsilon)}\,.$$

Věta 5. *Uvažujme ergodický semimarkovský proces z úlohy 2*. (A_0) je optimální strategie pro úlohu 1*. Strategii (A_l) obdržíme ze strategie (A_{l-1}) tak, že ve stavu g použijeme strategii (k_h) splňující vztah:*

$$(15) \qquad M_{l-1} = \frac{\gamma_g(k_h, A_{l-1})}{\delta_g(k_h, A_{l-1})} = \max_{\substack{i,j \\ \delta_i(k_j, A_{l-1}) > 0}} \frac{\gamma_i(k_j, A_{l-1})}{\delta_i(k_j, A_{l-1})}.$$

Předpokládáme dále, že vztah (15) splňuje pouze jedna dvojice (i, j) pro každé l. Z (5) zřejmě $\Lambda^{(A_l)} \geqq \Lambda^{(A_{l-1})}$. Platí:*

1. *Optimální strategii, která ve třídě vybraných strategií dává průměrný zisk $\Lambda^{(C)} \in \langle \Lambda^{(A_{l-1})}, \Lambda^{(A_l)} \rangle$, stačí hledat ve třídě smíšených strategií složených ze strategií (A_{l-1}) a (A_l).*

2. *Není možné, aby při tomto postupu se jakákoliv strategie vyskytla více než jedenkrát.*

Důkaz. Protože pro každé l vztah (15) splňuje pouze jedna dvojice $i = g$, $(k_j) = (k_h)$, lze podle důsledku lemmatu 2 zvolit $\varepsilon > 0$ tak, že platí

$$(15^*) \qquad \frac{\gamma_g(k_h, A_{l-1}, \varepsilon)}{\delta_g(k_h, A_{l-1}, \varepsilon)} > \frac{\gamma_i(k_j, A_{l-1}, \varepsilon)}{\delta_i(k_j, A_{l-1}, \varepsilon)}$$

pro $\delta_i(k_j, A_{l-1}) > 0$, kde současně není $i = g, j = k$.

Pro strategii (A_l, ε), jejíž každý stav je podstatný, platí věty 3, 4. Ze spojitosti $\gamma_i(k_j, A_l, \varepsilon)$, $\delta_i(k_j, A_l, \varepsilon)$ vzhledem k ε je patrno, že tvrzení věty 4 pro strategii (A_l, ε) je splněno i pro $\varepsilon = 0$. Jestliže $\Lambda^{(A_l)} > \Lambda^{(A_{l-1})}$ platí věta 3 a tedy platí i tvrzení 1 věty 5; pro $\Lambda^{(A_l)} = \Lambda^{(A_{l-1})}$ je toto tvrzení samozřejmé.

Tvrzení 2 věty 5 dokážeme následovně: Předpokládejme, že je možné, aby $(A_l) \equiv (A_{l+j})$. Potom též $(A_l, \varepsilon) \equiv (A_{l+j}, \varepsilon)$ a $\Lambda^{(A_l, \varepsilon)} = \Lambda^{(A_{l+j}, \varepsilon)}$. Pro ε-strategie zřejmě z (5*) platí $\Lambda^{(A_l, \varepsilon)} > \Lambda^{(A_{l-1}, \varepsilon)}$ a tudíž platí tvrzení 2 věty 5.

V případě, že pro jisté $l - 1$ vyhovuje vztahu (15) více strategií, pro toto $l - 1$ sice platí tvrzení 1 věty 5, avšak pro strategii (A_l), sestrojenou ze strategie (A_{l-1}) obdobným způsobem jako ve větě 5, nemusí být splněny předpoklady věty 3 a opakování postupu z věty 5 by mohlo vést k nalezení strategie, která není optimální.

Ve větě 6 uvedeme postup, kterým sestrojíme strategii (A_{l+k}), pro níž budou splněny předpoklady věty 3.

Věta 6. *Jestliže vztah (15) je splněn pro více dvojic (i, j), strategii (A_l) obdržíme změnou strategie (A_{l-1}) v libovolném počtu stavů i, kdy použijeme strategii (k_j) splňující vztah (15). Klademe $(A_l) \equiv (B)$ a strategii (A_l) změníme ve všech stavech i, kdy použijeme strategie (k_j), která vyhoví aspoň jednomu ze vztahů (8), (8*), (8**). Tak obdržíme strategii (A_{l+1}). Klademe opět $(A_{l+1}) \equiv (B)$ a postup opakujeme.*

Podobně pro (A_{l+m}). *Platí*:

1. $$\Lambda^{(A_{l+m})} = \Lambda^{(A_l)}\,; \quad \Theta^{(A_{l+m})} = \Theta^{(A_l)}\,.$$

2. *Po konečném počtu kroků dojdeme ke strategii* (A_{l+k}), *pro kterou strategie* $(A_{l+k}) \equiv (B)$ *nesplní žádný ze vztahů* (8), (8*), (8**).

3. *Není možné, aby* $(A_{l+m}) \equiv (A_n)$ *pro* $n < l + m$.

Důkaz. Platnost tvrzení 1 je důsledkem věty 3. Důkaz lze provést obdobně jako v důkaze věty 4.

Tvrzení 2 dokážeme následovně: Při vhodném $\varepsilon > 0$, platnost vztahů (8), (8*), (8**) je zachována i pro ε-strategie (důsledek lemmatu 2). Při změně strategie (A_{l+m}) podle předpokladů věty 6, ze vztahů (8), (8*), (8**) pro příslušná $\gamma_i(k_j, A_{l+m})$, $\delta_i(k_j, A_{l+m})$ odvodíme:

$$\sum_{i,j} \gamma_i(k_j, A_{l+m}, \varepsilon) > M_{l-1} \,.\, \sum_{i,j} \delta_i(k_j, A_{l+m}, \varepsilon)\,. \tag{16}$$

Ze vztahu (5*) plyne

$$\operatorname{sg} \sum_{i,j} \delta_i(k_j, A_{l+m}, \varepsilon) = \operatorname{sg}\left[\Lambda^{(A_{l+m+1}, \varepsilon)} - \Lambda^{(A_{l+m}, \varepsilon)}\right]$$

a z (5), (5*), (16) tedy máme:

$$\Theta^{(A_{l+m+1}, \varepsilon)} - \Theta^{(A_{l+m}, \varepsilon)} = \frac{\sum_{i,j} \gamma_i(k_j, A_{l+m}, \varepsilon)}{\sum_{i,j} \delta_i(k_j, A_{l+m}, \varepsilon)} \,. \tag{17}$$

$$.\left[\Lambda^{(A_{l+m+1}, \varepsilon)} - \Lambda^{(A_{l+m}, \varepsilon)}\right] > M_{l-1} \,.\left[\Lambda^{(A_{l+m+1}, \varepsilon)} - \Lambda^{(A_{l+m}, \varepsilon)}\right].$$

Protože čistých strategií, pro které hodnoty Θ (resp. Λ) jsou stejné, je pouze konečný počet, ze vztahu (17) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení 3 dokážeme takto: Jestliže $(A_{l+m}) \equiv (A_n)$, potom $(A_{l+m}, \varepsilon) \equiv (A_n, \varepsilon)$; $\Lambda^{(A_{l+m}, \varepsilon)} = \Lambda^{(A_n, \varepsilon)}$; $\Theta^{(A_{l+m}, \varepsilon)} = \Theta^{(A_n, \varepsilon)}$. Z postupu, jakým byla sestrojena strategie (A_{l+m}) a ze vztahu (17) je patrno, že nemůže platit $(A_{l+m}, \varepsilon) \equiv (A_n, \varepsilon)$ pro $n < l + m$.

Věta 7. *Uvažujme ergodický semimarkovský proces z úlohy* 2*. *Platí*:

1. *Jestliže pro jistou strategii* (M) *neexistuje* $\delta_i(k_j, M) > 0$, *potom neexistuje žádná strategie* (S), *která splňuje vztah* $\Lambda^{(S)} > \Lambda^{(M)}$.

2. *Jestliže optimální strategie pro úlohu* 1* *nevyhovuje podmínce kladené v úloze* 2* *na průměrný zisk* Λ, *stačí zvyšovat hodnotu* Λ *pouze tak, aby požadovaný vztah* $\Lambda \geqq H$ *byl splněn formou rovnosti.*

Důkaz.

1. Jestliže $\Lambda^{(S)} > \Lambda^{(M)}$, potom podle (5*)

$$\Lambda^{(S)} - \Lambda^{(M)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(S)} \delta_i^{(S,M)}}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(S)} \hat{q}_i^{(S)}} > 0 ,$$

což není možné pro $\delta_i(k_j, M) \leqq 0$ splnit.

2. Z vět 3, 4, 5 je patrno, že optimální strategii (O) splňující vedlejší podmínku $\Lambda^{(O)} = H$ lze vyjádřit takto:

$$\Theta^{(O)} - \Theta^{(A_{l-1})} = M_{l-1}(\Lambda^{(O)} - \Lambda^{(A_{l-1})})$$

kde

$$\Lambda^{(A_{l-1})} \leqq \Lambda^{(O)} \leqq \Lambda^{(A_l)} ; \quad M_{l-1} \leqq 0 .$$

Pro $\Lambda^{(B)} > \Lambda^{(O)}$ platí dokonce vztah (viz tvrzení 2 věty 3)

$$\Theta^{(B)} - \Theta^{(A_{l-1})} \leqq M_{l-1} \cdot [\Lambda^{(B)} - \Lambda^{(A_{l-1})}] ,$$

čímž je platnost tvrzení 2 dokázána.

5. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 2. Uvažujme 2 výrobní procesy charakterizované hodnotami:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = 1\} = \tfrac{1}{2} ; \quad \mathsf{P}\{\xi_1 = 2\} = \tfrac{1}{2} ; \quad \mathsf{P}\{\eta_1 = 1\} = \tfrac{1}{2} ; \quad \mathsf{P}\{\eta_1 = 2\} = \tfrac{1}{2} ;$$

$$\mathsf{P}\{\xi_2 = 1\} = 1 ; \quad \mathsf{P}\{\eta_2 = 1\} = \tfrac{1}{2} ; \quad \mathsf{P}\{\eta_2 = 3\} = \tfrac{1}{2} ;$$

$$a_2 = 4 ; \quad b_2 = 2 ; \quad c_2 = 4 . \quad a_1 = 2 , \quad b_1 = 1 , \quad c_1 = 1 ;$$

Nalezněte optimální obsluhovací strategii!

Řešení. Podle vzorce (1*) vypočteme $\bar{c}_1 = 5$; $\bar{c}_2 = 18$; a dále zjistíme $\mathsf{E}[\xi_1] = 1{,}5$; $\mathsf{E}[\xi_2] = 1{,}0$; $\mathsf{E}[\eta_1] = 1{,}5$; $\mathsf{E}[\eta_2] = 2{,}0$. Jestliže obsluhujeme pouze 2. výrobní proces, dostaneme průměrný zisk (neuvažujeme ztráty o velikosti $\bar{b}_2$)

$$\Theta_2 = \frac{\bar{c}_2 \, . \, \mathsf{E}[\xi_2]}{\mathsf{E}[\xi_1] + \mathsf{E}[\xi_2]} = 6 .$$

Je splněno $\Theta_2 \geqq \bar{c}_1$ a na základě poznámky k větě 2, ve stavu $\{A_1, 0\}$ stačí při optimální strategii provádět obsluhu 2. výrobního procesu. Podle vzorce (1) vypočteme $Z_1 = 7{,}5$; $Z_2 = 18$. V tabulce 1 jsou uvedeny přechody mezi jednotlivými stavy v závislosti na použité strategii. Jestliže ve stavu 3 provádíme obsluhu 1. výrobního procesu, dostaneme průměrný zisk $\Theta = 8{,}64$, jestliže ve stavu 3 neprovádíme obsluhu průměrný zisk $\Theta = 6{,}0$. Po odečtení ztrát o velikosti $\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = 3$ skutečný průměrný zisk při optimální obsluhovací strategii činí 5,64.

Tabulka 1.

Stav i	Stavový vektor	Přechod k	Přechod j	Přechod p_{ij}
1	$\{0,0\}$	2	3	1,0
2	$\{1,0\}$	2	3 4	0,5 0,5
3	$\{0,1\}$	1	2 5	0,75 0,25
		0	1 6	0,5 0,5
4	$\{2,1\}$	0	1 6	0,5 0,5
5	$\{1,3\}$	0	1 7	0,5 0,5
6	$\{0,2\}$	1	2 5	0,5 0,5
7	$\{2,0\}$	2	3	1,0

Ze stavu i, jestliže obsluhujeme k-tý výrobní proces, přejdeme do stavu j s pravděpodobností p_{ij}.

Příklad 3 (deterministický příklad).
Pro 3 výrobní procesy charakterizované deterministicky hodnotami

$$\xi_1 = 1{,}0\,; \quad \eta_1 = 1{,}0\,; \quad a_1 = 1{,}0\,; \quad b_1 = 0{,}2\,; \quad c_1 = 0\,;$$
$$\xi_2 = 1{,}0\,; \quad \eta_2 = 1{,}5\,; \quad a_2 = 2{,}0\,; \quad b_2 = 0{,}0\,; \quad c_2 = 0\,;$$
$$\xi_3 = 0{,}5\,; \quad \eta_3 = 1{,}0\,; \quad a_3 = 1{,}0\,; \quad b_3 = 0{,}8\,; \quad c_3 = 0$$

nalezněte optimální strategii obsluhy!

Řešení. Jde o deterministickou úlohu. Pro tento případ poněkud pozměníme algoritmus 1. Veškerá rozhodnutí budeme provádět pouze v okamžicích zakončení obsluhovací etapy některého výrobního procesu, kdy určíme, který výrobní proces budeme dále obsluhovat.

Algoritmus 1* (pro úlohu s deterministickými parametry). 1. Vyjdeme ze stavu, který je charakterizován stavovým vektorem $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ a je definován v okamžiku zakončení obsluhovací etapy l-tého výrobního procesu.

Tabulka 2.

Stav i	Stavový vektor	Přechod k	j	τ_{ij}
1	$\{0, 0, 0\}$	1 2 3	2 3 4	1,0 1,0 0,5
2	$\{1, 0, 0\}$	2 3	3 5	1,0 0,5
3	$\{0, 1, 0\}$	1 3	7 6	1,0 0,5
4	$\{0, 0, 1\}$	1 2	2 3	1,0 1,0
5	$\{2, 0, 1\}$	1 2	2 3	1,5 1,0
6	$\{0, 2, 1\}$	1	2	1,0
7	$\{1, 3, 0\}$	2 3	3 4	1,5 1,0

Ze stavu i, jestliže obsluhujeme k-tý výrobní proces, přejdeme do stavu j za dobu τ_{ij}.

2. Určíme

$$\min_j \left[\frac{\eta_j}{\Delta} - A_j + \frac{\xi_j}{\Delta}\right] = z' .$$

V uvažovaném stavu po obsluze l-tého uvažujeme obsluhu i-tého výrobního procesu, pro který platí $\eta_i/\Delta - A_i < z'$ a zjistíme příslušné stavové vektory.

3. Úvahu bodu 2 opakujeme tak dlouho, dokud nevyčerpáme všechny stavové vektory, které se při uvedeném postupu někdy vyskytly. Přechody mezi 2 stavy

charakterizujeme středním příjmem Z_j podle vzorce (1) a dobou přechodu τ, kterou uvažujeme jako přírůstek času mezi zakončením obsluhovacích etap dvou po sobě následujících operací. Protože se jedná o deterministický případ, můžeme též mluvit o seřazení jednotlivých operací.

Podle vzorce (1) vypočteme $Z_1 = 1{,}4$; $Z_2 = 3{,}0$; $Z_3 = 2{,}2$. V tabulce 2 jsou zachyceny přechody mezi jednotlivými stavy. Z tabulky 3 zjistíme optimální obsluhovací

Tabulka 3.

Krok l	1		2	
Stav i	(k_{1_i})	w_{1_i}	(k_{2_i})	w_{2_i}
2	3	0,75	3	0,75
3	3	0,00	3	0,00
4	2	0,04	2	0,04
5	2	0,04	2	0,04
6	1	−0,8	1	−0,8
7	3	−0,71	3	−0,71
Průměrný zisk	2,96		2,96	

V i-tém stavu je v l-tém kroku použita strategie (k_{l_i}). Relativní váha i-tého stavu při l-tém kroku je w_{l_i}.

strategii. Skutečný průměrný zisk bude o $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ nižší, tedy se rovná 1,96. Optimální seřazení vznikne postupnou obsluhou těchto výrobních procesů 2,3,1,3; 2,3,1,3; 2,3,1,3; ... o čemž se lehce přesvědčíme z nalezené optimální obsluhovací strategie.

Příklad 4. Uvažujeme 3 výrobní procesy charakterizované těmito hodnotami:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = 1\} = 0{,}5\,;\quad \mathsf{P}\{\xi_1 = 2\} = 0{,}5\,;\quad \mathsf{P}\{\eta_1 = 2\} = 0{,}5\,;\quad \mathsf{P}\{\eta_1 = 1\} = 0{,}5\,;$$

$$\mathsf{P}\{\xi_2 = 2\} = 0{,}5\,;\quad \mathsf{P}\{\xi_2 = 4\} = 0{,}5\,;\quad \mathsf{P}\{\eta_2 = 2\} = 0{,}2\,;\quad \mathsf{P}\{\eta_2 = 3\} = 0{,}8\,;$$

$$\mathsf{P}\{\xi_3 = 1\} = 1{,}0\,;\qquad \mathsf{P}\{\eta_3 = 1\} = 0{,}5\,;\quad \mathsf{P}\{\eta_3 = 2\} = 0{,}5\,;$$

$$a_1 = 0;\ b_1 = 2;\ c_1 = 4;\ a_2 = 2;\ b_2 = 1;\ c_2 = 2;\ a_3 = 3;\ b_3 = 1;\ c_3 = 2.$$

Nalezněte:

1. Optimální obsluhovací strategii.

2. Optimální obsluhovací strategii, která pro průměrný zisk 2. výrobního procesu dává aspoň hodnotu a) 0,9; b) 1,3; c) 1,95.

Tabulka 4.

Stav i	Stavový vektor	Přechod k	Přechod j	Přechod p_{ij}
1	$\{0, 0, 0\}$	1	2	1,0
		2	3	1,0
		3	4	1,0
2	$\{1, 0, 0\}$	2	3	1,0
		3	4	0,5
			5	0,5
3	$\{0, 1, 0\}$	1	6	0,5
			7	0,4
			2	0,1
		3	8	1,0
4	$\{0, 0, 1\}$	1	2	0,75
			9	0,25
		2	3	1,0
		0	1	0,5
			10	0,5
5	$\{2, 0, 1\}$	2	3	1,0
		0	1	0,5
			10	0,5
6	$\{1, 2, 0\}$	3	4	0,1
			5	0,1
			11	0,4
			12	0,4
7	$\{1, 3, 0\}$	3	4	0,5
			5	0,5
8	$\{0, 2, 1\}$	1	2	0,55
			7	0,2
			9	0,05
			13	0,2
		0	1	0,1
			10	0,1
			14	0,4
			15	0,4
9	$\{1, 0, 2\}$	2	3	1,0
		0	1	0,5
			16	0,5
10	$\{0, 0, 2\}$	1	2	1,0
		2	3	1,0
		0	1	1,0
11	$\{0, 3, 1\}$	1	2	0,75
			9	0,25
		0	1	0,5
			10	0,5
12	$\{2, 3, 1\}$	0	1	0,5
			10	0,5
13	$\{1, 3, 2\}$	0	1	0,5
			16	0,5
14	$\{0, 3, 0\}$	1	2	1,0
		3	4	1,0
15	$\{0, 3, 2\}$	1	2	1,0
		0	1	1,0
16	$\{2, 0, 0\}$	2	3	1,0
		3	4	1,0

Ze stavu i, jestliže obsluhujeme k-tý výrobní proces, přejdeme do stavu j s pravděpodobností p_{ij}.

Tabulka 5.

Krok	1		2		3			4			5			6		
Stav i	(k_{1_i})	$w_i^{(A_1)}$	(k_{2_i})	$w_i^{(A_2)}$	(k_{2_i})	$v_i^{(A_2)}$	$w_i^{(A_2)}$	(k_{3_i})	$v_i^{(A_3)}$	$w_i^{(A_3)}$	(k_{4_i})	$v_i^{(A_4)}$	$w_i^{(A_4)}$	(k_{5_i})	$v_i^{(A_5)}$	$w_i^{(A_5)}$
1	3	1,85	3	1,63	3	−2,0	1,63	3	−2,61	1,94	3	−2,61	1,94	2	0,00	0,00
2	3	−1,23	3	−0,11	3	1,55	−0,11	3	−2,61	1,94	3	−2,61	1,94	2	0,00	0,00
3	3	0,75	3	1,20	2	−4,32	1,20	3	−9,57	3,78	3	−9,57	3,78	3	−8,56	3,00
4	1	0,00	1	0,00	1	0,00	0,00	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00
5	0	−6,17	2	−3,50	2	7,12	−3,50	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00
6	3	−3,71	3	−1,15	3	−2,81	−1,15	3	−7,84	1,33	3	−6,52	0,62	3	−6,91	0,2
7	3	−1,23	3	−0,10	3	1,55	−0,10	3	−2,61	1,94	3	−2,61	1,94	3	−2,95	2,2
8	1	−1,11	1	−0,44	1	−2,3	−0,44	1	−6,96	1,84	1	−6,96	1,84	1	−5,6	0,8
9	0	−5,3	2	−3,50	2	7,12	−3,50	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00
10	1	0,04	1	0,86	1	−1,45	0,86	1	−6,52	3,35	2	0,00	0,00	2	0,00	0,00
11	0	−6,17	1	0,00	1	0,00	0,00	1	−5,87	2,87	1	−5,87	2,87	1	−4,44	1,8
12	0	−6,17	0	−6,10	0	−3,71	−6,10	0	−7,17	−4,41	0	−3,92	−6,13	0	−2,95	−6,8
13	0	−5,3	0	−5,71	0	−4,00	−5,71	0	−5,21	−5,12	0	−5,21	−5,12	0	−2,95	−6,8
14	3	1,85	3	1,63	3	−2,00	1,63	3	−2,61	1,94	3	−2,61	1,94	3	−2,95	2,2
15	1	0,04	1	0,86	1	−1,45	0,86	1	−6,52	3,35	1	−6,52	3,35	1	−4,44	1,8
16	3	1,85	3	1,63	3	−2,0	1,63	3	−2,61	1,94	3	−2,61	1,94	2	0,00	0,00
Θ	7,15		7,38		7,38			7,06			7,06			6,80		
Λ					2,00			2,61			2,61			2,95		
Symbol stra-tégie	(A_1)		(A_2)		(A_2)			(A_3)			(A_4)			(A_5)		

Při strategii (A_l) je v i-tém stavu použita strategie (k_{l_i}).

Řešení. Vypočteme

$$\mathsf{E}[\xi_1] = 1{,}5\,; \quad \mathsf{E}[\xi_2] = 3{,}0\,; \quad \mathsf{E}[\xi_3] = 1{,}0\,; \quad \mathsf{E}[\eta_1] = 1{,}5\,;$$
$$\mathsf{E}[\eta_2] = 2{,}8\,; \quad \mathsf{E}[\eta_3] = 1{,}5\,; \quad Z_1 = 12\,; \quad Z_2 = 17{,}4\,; \quad Z_3 = 9{,}0\,.$$

Sestavíme dále tabulku přechodů (tabulka 4) mezi jednotlivými stavy v závislosti na použité strategii. V tabulce 5 nalezneme optimální obsluhovací strategii, u které zjistíme též hodnotu průměrného zisku Λ, který přináší 2. výrobní proces. Protože při výpočtu neuvažujeme ztráty, které pro 2. výrobní proces činí $b_2 = 1$, budeme zjišťovat optimální strategii, která splňuje a) $\Lambda = 1{,}9$; b) $\Lambda = 2{,}3$; c) $\Lambda = 2{,}95$. Je patrné, že optimální obsluhovací strategie (A_2) vyhovuje též případu 2a. Případ 2b řeší smíšená strategie, složená ze strategií (A_2) a (A_3). Výpočtem zjistíme, jestliže ve stavu 4 použijeme strategii (1) s pravděpodobností 0,29 a strategii (2) s pravděpodobností 0,71, dostaneme řešení pro případ 2b. Případ 2c řeší strategie (A_5).

Pro zadanou úlohu existuje celkem $2^9 \,.\, 3^3 = 13\,824$ přípustných čistých strategií. Při řešení podle výše uvedených algoritmů bylo třeba vyzkoušet pouze 5 strategií. Výpočet jedné strategie trval na samočinném počítači LGP-21 asi 20 minut.

(Došlo dne 7. července 1966.)

LITERATURA

[1] R. A. Howard: Dynamic Programming and Markov Processes. Wiley, 1960.

[2] W. S. Jewell: Markov Renewal Programming I.: Formulation, Finite Return Models. Operations Research *11* (1963), 6, 929—948.

[3] W. S. Jewell: Markov Renewal Programming II.: Infinite Return Models, Example. Operations Research *11* (1963), 6, 949—971.

SUMMARY

A Problem Concerning an Optimal Service Policy for Several Facilities

KAREL SLADKÝ

The paper deals with finding an optimal service policy for several facilities, operations of which are time-discrete. Optimality criterion is the average return for an infinite time horizon. Using Algorithm 1, the given task may be formulated as finding optimal policy of a certain semi-markovian process with a finite number of states.

 For solving this problem we can use known methods. In the paper there is derived an iteration procedure for finding such an optimal policy of a certain semi-markovian process with a finite number of states, which must also satisfy some further given condition (Algorithm 3). Some examples, illustrating the described methods, are solved.

Ing. Karel Sladký, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.