KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 3/1967

Sústava v procese učenia sa v danom prostredí*

RUŽENA BAJCSYOVÁ

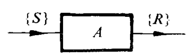
V uvedenej práci je rozobrané chovanie sa sústavy pri procese učenia sa, keď sústava je popísaná stochastickým, lineárnym modelom bez vplyvu prostredia a pod vplyvom prostredia Prostredie, ktoré uvažujeme je náhodilé a stacionárne alebo nestacionárne.

1. ÚVOD

Na katedre matematických strojov elektrotechnickej fakulty SVŠT v Bratislave sme sa zaoberali matematickým popisom chovania sa sústavy pri procese učenia sa. Pod pojmom sústava rozumieme živý organizmus alebo automat a označíme ho A. Za základ pre sústavu sme zobrali lineárny stochastický model popísaný v práci [1]. Podrobnejšie o tomto modeli z technického hľadiska sme sa zmienili v práci [2]. Tento model nezahrňuje v sebe pamäť a preto, aby sa mohol uskutočniť proces učenie sa, musí sa zaviesť spätná väzba. Predpokladáme, že sústava pri procese učenia sa splňuje podmienky jednoduchého Markovovského procesu.

2. POPIS LINEÁRNEHO MODELU

Majme sústavu A (viď. obr. 1) na vstup ktorej prichádza konečná množina r alternatív stimulov $\{S\}$ so stĺpcovou matickou pravdepodobnosti v n-tom kroku



Obr. 1.

$[p(n)]$. Sústava A reaguje na tieto stimuly množinou r alternativ reakcií $\{R\}$ so stĺpcovou maticou pravdepodobnosti v n-tom kroku $[P(n)]$. Potom platí:

$$(1) \qquad [P(n)] = [A] \times [p(n)] = \{\alpha . [I] + (1 - \alpha) . [\lambda]^*\} \times [p(n)] ,$$

* Prednesené na *druhej konferencii o kybernetike*, Praha 16.—19. novembra 1965.

kde $[A]$ je matica prenosu sústavy, ktorej komponenty sa skladajú z koeficientov α a elementov matice $[\lambda]^*$, v ktorej sú všetky stĺpce rovnaké,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}; & a_{12}; & \dots; & a_{1r} \\ a_{21}; & a_{22}; & \dots; & a_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r1}; & a_{r2}; & \dots; & a_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + (1-\alpha)\lambda_1; & (1-\alpha)\lambda_1; & \dots; & (1-\alpha)\lambda_1 \\ (1-\alpha)\lambda_2; & \alpha + (1-\alpha)\lambda_2; & \dots; & (1-\alpha)\lambda_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ (1-\alpha)\lambda_r; & (1-\alpha)\lambda_r; & \dots; & \alpha + (1-\alpha)\lambda_r \end{bmatrix};$$

$[I]$ je jednotkova matica; α je koeficient zhoršujuci proces učenia sa a v danom modeli sa uvažuje, že $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$; λ_i je hraničná pravdepodobnosť i-tej reakcie, preto musia platiť vzťahy

$$0 \leqq \lambda_i \leqq 1 ; \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 ;$$

podobne pre pravdepodobnosti stimulov $p_i(n)$ a reakcií $P_i(n)$ platí

$$0 \leqq p_i(n) \leqq 1 ; \quad \sum_{i=1}^{r} p_i(n) = 1 ;$$

$$0 \leqq P_i(n) \leqq 1 ; \quad \sum_{i=1}^{r} P_i(n) = 1 .$$

3. SÚSTAVA PRI PROCESE UČENIA SA

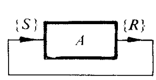
Sústava sa môže učiť alebo bez vplyvu prostredia (napr. bez učiteľa), alebo pod vplyvom prostredia (napr. s učiteľom).

3.1. Sústava bez vplyvu prostredia

Aby sa mohla sústava v takomto pripade učiť, musí sa uskutočniť spätná väzba a to tak, že predpokladáme, že pravdepodobnosť stimulu v $(n + 1)$-om kroku bude sa rovnať pravdepodobnosti reakcie v n-tom kroku

$$[p(n + 1)] = [P(n)] .$$

Ak označíme $[P(0)]$ ako stĺpcovu maticu pravdepodobnosti reakcie sústavy ešte pred začiatkom procesu učenia sa, a $[\lambda]$ ako stĺpcovu maticu hraničných pravde-



Obr. 2.

podobností reakcií, potom po n-násobnom opakovaní platí

$$[P(n)] = [A]^n \times [P(0)] = \alpha^n . [P(0)] + (1 - \alpha^n) . [\lambda] , \tag{2}$$

pričom vzťah medzi $[\lambda]^*$ a $[\lambda]$ je nasledovný

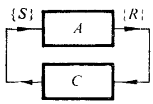
$$[\lambda]^* = [\lambda] \times [11 \ldots 1],$$

kde $[1\ 1\ 1 \ldots 1]$ je jednoriadkova r-stĺpcova matica. Pre $n \to \infty$ $[P(n)] \to [\lambda]$ (viď. obr. 2).

3.2. Sústava pod vplyvom prostredia

V našej práci rozoberieme dva druhy prostredí: stacionárne a nestacionárne.

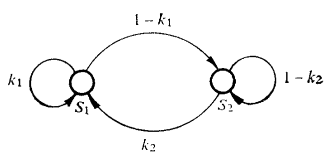
3.2.1. Sústava pod vplyvom stacionárného nahodilého podmieneného prostredia Pod stacionárnym náhodilým prostredím rozumieme také prostredie, kde pravdepodobnosti reakcií prostredia a reakcií sústavy sú v nasledovnom vzťahu: Na reakciu



Obr. 3.

$R_i(n)$ s pravdepodobnosťou $P_i(n)$ odpovie prostredie stimulom $S_i(n + 1)$ s pravdepodobnosťou $p_i(n + 1)$. Reakcia prostredia je totožná so stimulom sústavy. Schematicky viď. obr. 3.

Aby sme mohli vyjadriť pravdepodobnosti reakcie prostredia na reakciu sústavy, musíme určiť prenos prostredia C. Pre zjednodušenie predpokladajme, že sústava bude reagovať len dvomi triedami reakcií R_1 a R_2 s príslušnými pravdepodobnosťami



Obr. 4.

P_1 a P_2. Potom uvažujme také prostredie, ktoré za reakciu R_1 pochváli s pravdepodobnosťou k_1 a nepochváli s pravdepodobnosťou $1 - k_1$. Podobne za reakciu R_2 potrestá s pravdepodobnosťou k_2 a nepotrestá s pravdepodobnosťou $1 - k_2$. Z definície stacionárneho prostredia vyplýva, že ak máme dve triedy reakcií, uvažujeme aj dve triedy stimulov S_1 a S_2 s príslušnými pravdepodobnosťami. Nech S_1 je povzbudzujúci stimul a predpokladáme, že taký účinok na proces učenia bude mať ako pochválená reakcia R_1 tak aj potrestaná reakcia R_2. Podobne brzdiacim stimulom bude nepochválená reakcia R_1 a nepotrestaná reakcia R_2. Pomocou grafu stavov môžeme znázorniť prenos prostredia C. (Viď. obr. 4.) Prenos C možno vyjadriť v maticovom tvare:

$$[C] = \begin{bmatrix} k_1; & k_2 \\ 1 - k_1; & 1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Potom pravdepodobnosť stimulu nadobudne tvar

$$[p(n + 1)] = [C] \times [P(n)]$$

a pravdepodobnosť výslednej reakcie bude

$$[P(n + 1)] = [A] \times [p(n + 1)] = [A] \times [C] \times [P(n)] .$$

Po n-násobnom opakovaní je pravdepodobnosť výslednej reakcie

(3) $$[P(n)] = [[A] \times [C]]^n \times [P(0)] = \alpha'^n . [P(0)] + (1 - \alpha'^n) . [\lambda'] ,$$

kde

(4) $$\alpha' = \alpha . (k_1 - k_2) ,$$

a hraničná pravdepodobnosť má tvar stĺpcovej matice pre dve reakcie

(5) $$[\lambda'] = \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{(1 - \alpha) . \lambda + \alpha . k_2\} . \dfrac{1}{1 - \alpha'} \\ \\ \{1 - (1 - \alpha) . \lambda - \alpha k_1\} . \dfrac{1}{1 - \alpha'} \end{bmatrix}.$$

Na ilustráciu vypočítame α' a $[\lambda']$ pre dva špeciálne prípady:

a) $$k_1 = k_2 = 1 ,$$

b) $$k_1 = k_2 = 0 .$$

Prípad a). Z rovnice (4) vyplýva

(4a) $$\alpha' = 0$$

a z rovnice (5) vyplýva

(5a) $$[\lambda'] = \begin{bmatrix} (1 - \alpha) . \lambda + \alpha \\ (1 - \alpha)(1 - \lambda) \end{bmatrix}.$$

Toto je prípad, keď na sústavu pôsobí optimálne prostredie. Sústava po prvom opakovaní dosahuje hraničnú pravdepodobnosť reakcií λ'_1, λ'_2, kde λ'_1 je väčšia ako bez vplyvu prostredia $\lambda'_1 = \lambda + (1 - \lambda) . \alpha > \lambda$.

Prípad b). Z rovnice (4) vyplýva

(4b) $$\alpha' = 0$$

a z rovnice (5) vyplýva

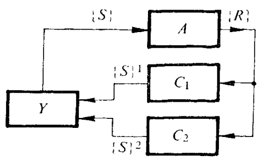
(5b) $$[\lambda'] = \begin{bmatrix} (1 - \alpha) . \lambda \\ 1 - (1 - \alpha) \lambda \end{bmatrix}.$$

Toto je prípad úplne ignorujúceho prostredia, kde výsledky ukazujú, že hraničná pravdepodobnosť reakcie λ'_1 je horšia ako pri učení sa bez vplyvu prostredia $\lambda'_1 = (1 - \alpha) . \lambda < \lambda$.

3.2.2. Sústava pod vplyvom nestacionárneho náhodilého podmieneného prostredia. Uvažujme nestacionárne prostredie definované v práci [3] takto: Nestacionárne prostredie K se skladá z dvoch stacionárnych náhodilých prostredí C_1 a C_2, kde spojenie medzi nimi je uskutočnené Markovovskou sieťou. Pravdepodobnostná matica prechodov je daná takto:

(6) $$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_1; & 1 - \delta_1 \\ 1 - \delta_2; & \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Ak sústava pôsobila v prostredí C_1 v n-tom kroku, potom v $(n + 1)$-om kroku bude s pravdepodobnosťou δ_1 pôsobiť znova v prostredí C_1 a s pravdepodobnosťou



Obr. 5.

$(1 - \delta_1)$ prejde do prostredia C_2. Podobne, ak sústava pôsobila v n-tom kroku v prostredí C_2, tak v $(n + 1)$-om kroku bude znova pôsobiť v prostredí C_2 s pravdepodobnosťou δ_2 a s pravdepodobnosťou $(1 - \delta_2)$ prejde do prostredia C_1. Prostredia C_1 a C_2 sú samé o sebe stacionárne prostredia a platí o nich všetko, čo bolo o stacionárnych prostrediach povedané. V maticovom tvare prenosy $[C_1]$ a $[C_2]$ pre tieto prostredia sú:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} k_1^1; & k_2^1 \\ 1 - k_1^1; & 1 - k_2^1 \end{bmatrix}; \quad [C_2] = \begin{bmatrix} k_1^2; & k_2^2 \\ 1 - k_1^2; & 1 - k_2^2 \end{bmatrix}.$$

Označme $[Y(n)]$ riadkovú maticu pravdepodobnosti, charakterizujúcu nestacionaritu v n-tom kroku prostredia. Schématické znázornenie pôsobenia sústavy v nestacionárnom prostredí je na obr. 5. Vzhľadom na to, že nestacionárita prostredia je Markovovským procesom, platia nasledovné vzťahy:

(7) $$[Y(n)] = [Y(0)] \times [\Delta]^n = [Y_1(0); Y_2(0)] \times [\Delta]^n,$$

kde $Y_1(0)$ a $Y_2(0)$ sú počiatočné pravdepodobnosti pôsobnosti sústavy v tom ktorom prostredí.

Stĺpcova matica pravdepodobnosti stimulu po prvom kroku pri nestacionárnom prostredí je

$$[p(1)] = \{Y_1(0) . [C_1] + Y_2(0) . [C_2]\} \times [P(0)] .$$

Keď zavedieme označenie:

$$(8) \qquad \begin{aligned} Y_1(0) . [C_1] + Y_2(0) . [C_2] &= [C(0)] , \\ Y_1(1) . [C_1] + Y_2(1) . [C_2] &= [C(1)] , \\ &\vdots \\ Y_1(n) . [C_1] + Y_2(n) . [C_2] &= [C(n)] , \end{aligned}$$

potom výsledná pravdepodovnosť reakcií je daná rovnicou

$$(9) \qquad \begin{aligned} [P(n)] = [[A] \times [C(n-1)]] \times [[A] \times [C(n-2)]] \times \ldots \times \\ \times [[A] \times [C(0)]] \times [P(0)] . \end{aligned}$$

Vyšetrujme dva špeciálne prípady a to:

a) $\delta_1 = \delta_2 = 1$,

b) $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Prípad a). Z výrazu (6) vyplýva, že v tomto prípade

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jednotkova matica. Keď dosadíme $[A]$ do rovnice (7) dostaneme

$$(7a) \qquad [Y(n)] = [Y(0)] ,$$

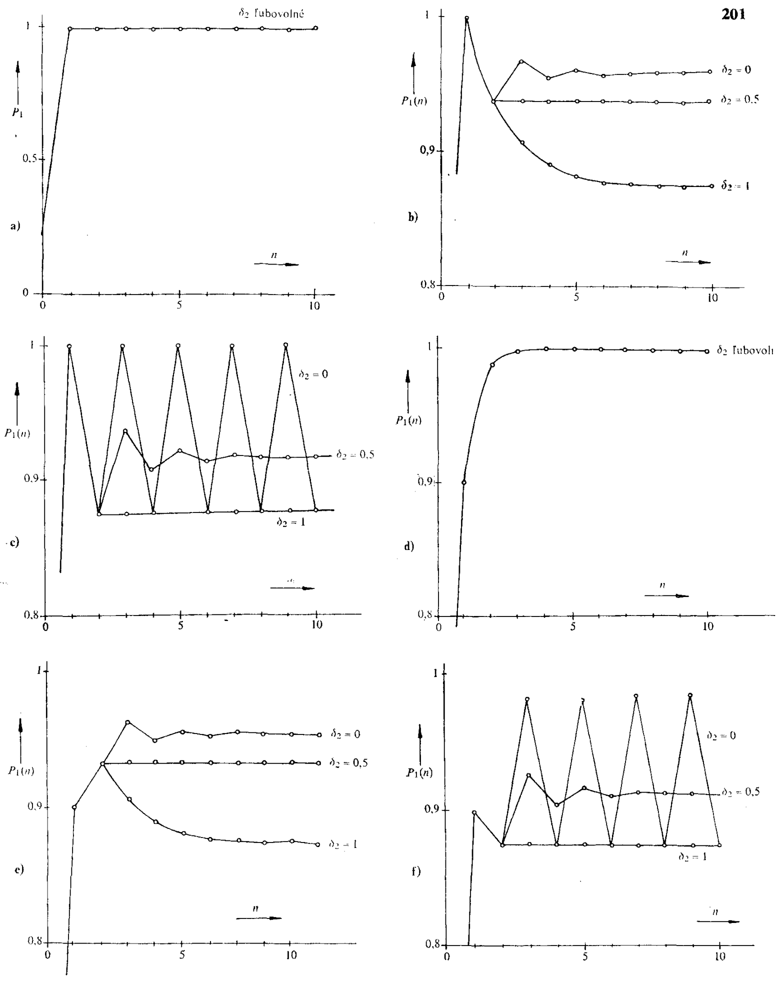
čo znamená, že pravdepodobnostná riadkova matica, ktorá určuje pravdepodobnosť pôsobenia sústavy v tom ktorom prostredí je konštantná aj po n-násobnom opakovaní. Matice $[C(0)]$, $[C(1)] \ldots [C(n-1)]$ vyplývajúce zo vzťahov (8), sú totožné, tedy môžeme písať

$$(8a) \qquad [C(0)] = [C(1)] = \ldots = [C(n-1)] .$$

Keď hore uvedené predpoklady dosadíme do vzťahu (9), dostávame stĺpcovu maticu pravdepodobností výsledných reakcií

$$(9a) \qquad [P(n)] = [[A] \times [C(0)]]^n \times [P(0)] ,$$

čo je len rozšírený vzťah (3) pravdepodobnosti výslednej reakcie pre stacionárne prostredie.


δ_2 ľubovolné
1
P_1
0,5
a)
0
0
5
10
n
1
$P_1(n)$
0,9
0,8
b)
$\delta_2 = 0$
$\delta_2 = 0,5$
$\delta_2 = 1$
c)
d)
δ_2 ľubovoľ
e)
f)

Obr. 6.

Prípad b). Z výrazu (6) dostaneme teraz maticu $[\Delta]$ v takomto tvare:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Keď toto dosadíme do rovnice (7), dostaneme:

$$(7b) \qquad [Y(n)] = [Y(0)] \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n .$$

Rovnica (7b) vyjadruje pravdepodobnosť, že sústava v každom kroku sa nachádza pod vplyvom iného prostredia ($C_1C_2C_1C_2 \ldots$). Pričom hodnota tejto pravdepodobnosti je daná počiatočnou pravdepodobnosťou pôsobenia sústavy v tom ktorom prostredí. Ako je vidieť, v tomto prípade ide o druhý extrémny prípad — maximálne nestacionárneho prostredia. Z rovnice (8) potom vyplýva, že

$$(8b) \qquad \begin{aligned} [C(0)] &= [C(2)] = [C(4)] = \ldots = [C(2n)]\,, \\ [C(1)] &= [C(3)] = [C(5)] = \ldots = [C(2n-1)]\,. \end{aligned}$$

Dosadením vzťahov (8b) do rovnice (9) dostaneme pre pravdepodobnosti výstupnej reakcie po $2n$-násobnom opakovaní:

$$(9b) \qquad [P(2n)] = [[\Delta] \times [C(1)] \times [\Delta] \times [C(0)]]^n \times [P(0)]\,.$$

Tabulka 1.

obr.	k_1^1	k_2^1	k_1^2	k_2^2	δ_1	δ_2
6a	1	1	1	1	ľubovolné	ľubovolné
b	1	1	0,5	0	0,5	0 0,5 1
c	1	1	0,5	0	0	0 0,5 1
d	1	0,5	0,5	0,5	1	ľubovolné
e	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0 0,5 1
f	1	0,5	0,5	0,5	0	0 0,5 1

Další analytický rozbor rovnice (9) by bol pomerne zložitý, pretože rovnica (9) počíta s dosť veľkým počtom premenných. Analyticky sme riešili len dva horeuvedené špeciálne prípady (9a) a (9b), ostatné variácie sme počítali na číslicovom počítači URAL 2 na Katedre matematických strojov Elektrotechnickej fakulty SVŠT v Bratislave. Výsledky sú velmi zaujmavé a ich podrobný rozbor uvedieme v našej nasledujúcej práci. Teraz len pre ilustráciu uvedieme niekoľko príkladov. Na obrázkoch 6a až 6f sú znázornené závislosti pravdepodobnosti P_1, na počte n opakovaní za predpokladu, že sústava je daná parametrami $\alpha = 0{,}25$ a $\lambda_1 = 1$. Počiatočná pravdepodobnosť reakcie R_1 nech je $P_1(0) = 0{,}2$. Počiatočná pravdepodobnosť pôsobnosti sústavy v prostredí C_1 nech je $Y_1(0) = 1$ a v prostredí C_2 nech je $Y_2(0) = 0$. Premenné parametre sú $\delta_1, \delta_2, k_1^1, k_2^1, k_1^2, k_2^2$. V tabulke 1 sú uvedené pre jednotlivé obrázky príslušné hodnoty parametrov.

4. ZÁVER

V uvedenej práci sme rozobrali chovanie sa sústavy pri procese učenia sa, keď sústava je popísaná stochastickým lineárnym modelom, bez vplyvu prostredia a pod vplyvom prostredia. Prostredia sme uvažovali stacionárne a nestacionárne. Vzťahy pre prevdepodobnosti reakcie sústavy, keď sústava je pod vplyvom nestacionárneho prostredia sú pôvodné a nám v dostupnej literatúre neznáme. Rovnice majú všeobecnú platnosť pre r tried reakcií ako aj stimulov, hoci pre zjednodušenie boli niektore vzťahy odvodzované pre dve triedy reakcií a stimulov. Dá sa predpokladať, že lineárny model je vhodný pre modelovanie niektorých problémov neživej sústavy a niekedy aj živej sústavy.

(Došlo dňa 11. januára 1966.)

LITERATÚRA

[1] R. R. Bush, F. Mosteller: Stochastic Models for Learning. Wiley, New York 1955.
[2] R. Bajcsyová: Lineárny model procesu učenia. Kybernetika *2* (1966), 1, 64—74.
[3] М. Л. Цетлин: О поведении конечных автоматов в случайных средах. Автоматика и телемеханика *XXII* (1961), № 10.

SUMMARY

System Behaviour in the Learning Process in a Given Environment

RUŽENA BAJCSYOVÁ

System behaviour in the learning process is analysed, the system being described by a stochastic linear model without effect of environment and under effect of environment. This model does not include a memory. It is assumed that in the learning process the system satisfies the conditions of a simple Markov process. A random and stationary, or non-stationary environment is considered. The non-stationary environment [3] comprises two stationary random environments interconnected by a Markov net. The relations given under [9] for reaction probabilities of a system learning under the effect of a non-stationary random environment appear to be original. Finally, reaction probabilities of the system are analysed for different values of non-stationaries and also for different values of environment. The results of reaction probabilities R_1 as a function of repetition n are shown in Figs. 6a through 6f.

Ing. Ružena Bajcsyová, Elektrotechnická fakulta SVŠT, katedra matematických strojov, Vazovová 1b, Bratislava.