KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 3/1967

K problému optimálního diskrétního řízení lineární soustavy

JIŘÍ RŮŽIČKA

V článku je řešen problém syntézy optimálního diskrétního řízení lineární spojité soustavy při zobecněném kvadratickém kritériu optimálnosti. Je ukázáno, že za jistých standardních předpokladů o soustavě je optimální řízení realizováno lineární zpětnou vazbou.

1. FORMULACE PROBLÉMU

V teorii optimálnímu řízení je věnována značná pozornost speciálnímu případu s lineární soustavou a s kvadratickým kritériem optimálnosti. Při řešení problému syntézy regulačního obvodu se ještě obvykle předpokládá, že zpětná vazba je lineární, tj. že vstup do soustavy (všude v dalším budeme používat termín řízení) vyhovuje určité lineární diferenciální, příp. diferenční rovnici. Např. v pracích [1], [2] je řešena syntéza diskrétních regulačních obvodů s kritériem optimálnosti

$$J_\nu = \int_{\nu T}^{\infty} \epsilon^2(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde ν je celé nezáporné číslo, T perioda vzorkování, a $\epsilon(t)$ je průběh odchylky výstupu. Přitom ve zpětné vazbě předpokládáme lineární korekční člen (diskrétní).

Předpoklad o linearitě zpětné vazby je z hlediska technického dobře odůvodněn. Z teoretického hlediska se však naskýtá otázka, jaká bude zpětná vazba při vynechání tohoto předpokladu. Přesněji, v dalším bude řešen následující problém:

Nechť regulovaná soustava je popsána soustavou diferenciálních rovnic ve vektorovém vyjádření

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t)\,, \tag{1}$$

kde $x(t)$ je n-rozměrný stavový vektor, A je konstantní matice $n \times n$, b je n-rozměrný konstantní vektor a $u(t)$ je řízení (vstup do soustavy).

Předpokládáme, že regulační obvod je diskrétní v čase, tj.

$$u(t) = u(kT)\,, \quad kT \leqq t < (k+1)\,T\,, \tag{2}$$

kde $T > 0$ je tzv. perioda vzorkování. Dále, definujme funkci vektoru x vztahem*

$$V(x) = (x, Qx)\,, \tag{3}$$

kde Q je pozitivně definitní matice. Máme najít takové řízení $u(t)$, aby libovolný počáteční stav $x(0)$ byl převeden do počátku stavového prostoru, a aby současně kritérium optimálnosti

$$J_\nu(x_0, u(t)) = \int_{\nu T}^{\infty} V(x)\,\mathrm{d}t\,, \tag{4}$$

ν celé nezáporné, nabývalo své minimální hodnoty $J_\nu^0(x_0)$.

Pro spojité systémy a $\nu = 0$ byl tento problém řešen v [3] J. Kurzweilem. V takovém případě nevystupuje předpoklad (2) a místo něho nastupuje předpoklad, že funkce V je pozitivně definitní formou v proměnných u, x. Jak známo, kdyby V neobsahovala u, nabývalo by optimální řízení v tomto případě nekonečných hodnot. V [3] je odvozeno, že za jistých předpokladů o soustavě (1) je optimální řízení dáno lineární funkcí stavového vektoru. Podobný výsledek platí i v diskrétním případě (věta 3). Za některých doplňujících podmínek na výstupní veličinu soustavy je optimální zpětná vazba popsána lineární diferenční rovnicí (věta 4).

Problém je řešen tak, že je nejdříve transformován na čistě diskrétní tvar a dále je řešen metodou dynamického programování [4]. Transformovaný tvar je zobecněním úlohy, kterou řešil R. Kalman v [5].

2. ŘEŠENÍ PROBLÉMU

Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic je známo [6], že řešení rovnice (1) při počátečních podmínkách $x(0)$ je tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\,x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\xi)} b\, u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Podle (2) odtud

$$x(kT + \tau) = \mathrm{e}^{A\tau}\,x\,(kT) + \int_0^\tau \mathrm{e}^{A(\tau-\xi)} b\,\mathrm{d}\xi\,.\,u(kT)\,, \quad 0 \leqq \tau < T\,. \tag{5}$$

Položme $x(0) = x_0$. Výraz (4) pro $J_\nu(x_0, u(t))$ lze přepsat na tvar

$$J_\nu(x_0, u(t)) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \int_0^T (x(kT+\tau), Qx(kT+\tau))\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{6}$$

* Symbol (a, b) značí skalární součin vektorů a, b.

Integrand v předchozí rovnici je podle (5) a (3)

$$([e^{A\tau} x(kT) + \int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} b \, d\xi \, u(kT)], Q[\ldots]) \geqq 0$$

a rovnost nastává pouze v případě

$$e^{A\tau} x(kT) + \int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} b \, d\xi \, u(kT) = 0 . \tag{7}$$

Naším cílem je nyní ukázat, že $J_\nu(x_0, u)$ lze psát jako sumu hodnot pozitivně definitní formy v proměnných $x(kT)$, $u(kT)$. To bude zřejmé, dokážeme-li, že platnost rovnice (7) v intervalu $0 < \tau < T$ implikuje

$$x(kT) = u(kT) = 0 .$$

Předpokládejme tedy, že předchozí rovnice není splněna. Podle předpokladu plyne z (7)

$$-x(kT) \equiv \int_0^\tau e^{-A\xi} b \, d\xi \, . \, u(kT) ,$$

tedy

$$\int_0^\tau e^{-A\xi} b \, d\xi \equiv \text{konst} ,$$

$$e^{-A\tau} b \equiv 0$$

a vektor b by se rovnal nule, neboť matice $e^{-A\tau}$ je regulární. (6) je tedy pozitivně definitní v proměnných $x(kT)$, $u(kT)$. Označme

$$e^{A\tau} = F(\tau) , \quad F(T) = F , \tag{8}$$

$$\int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} b \, d\xi = f(\tau) , \quad f(T) = f$$

a dále pro jednoduchost $x(kT) = x_k$, $u(kT) = u_k$. Potom kritérium optimálnosti nabývá tvaru

$$J_\nu(x_0, u(t)) = \sum_{k=\nu}^{\infty} [(x_k, P x_k) + (x_k, p) u_k + \gamma u_k^2] , \tag{9}$$

kde*

$$P = \int_0^T F'(\tau)\, QF(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{10}$$

$$p = \int_0^T F'(\tau)\, [Q + Q']\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

$$\gamma = \int_0^T (f(\tau), Qf(\tau))\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Všimneme-li si ještě toho, že s označením (8) přejde rovnice (5) pro $\tau = 0$ na tvar

$$x_{k+1} = Fx_k + fu_k\,, \tag{11}$$

můžeme původní úlohu přeformulovat takto:

Pro soustavu (11) najít takovou posloupnost u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, aby při daných počátečních podmínkách x_0 byla minimální suma (9) hodnot pozitivně definitní kvadratické formy

$$(x, Px) + (x, p)\, u + \gamma u^2\,. \tag{12}$$

V této formulaci a pro $v = 0$ je problém přesnou analogií problému vyšetřovaného J. Kurzweilem v [3].

V dalším bude mít značnou úlohu tzv. podmínka řiditelnosti soustavy (1). Všimněme si nyní, jak se tato podmínka transformuje při přechodu k diskrétnímu tvaru (11), srov. [5].

Věta 1. *Nechť soustava* (1) *je řiditelná, tj. vektory*

$$b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b$$

jsou lineárně nezávislé, a nechť dále pro T platí nerovnost

$$T \neq \frac{m\pi}{\mathrm{Im}\lambda_k}\,, \quad k = 1, \ldots, n \tag{13}$$

kde λ_k jsou vlastní čísla matice A, m je libovolné celé číslo. Potom také vektory

$$f, Ff, F^2f, \ldots, F^{n-1}f$$

jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že implikace neplatí:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i F^i f = 0\,, \quad \eta_i \not\equiv 0\,,$$

* A' značí matici transponovanou s A.

tj.

$$\int_0^T e^{A(T-\xi)}\, d\xi \,.\, \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e^{iAT} b = 0 \,.$$

Použitím Jordanovy formy matice A a nerovnosti (13) lze snadno ukázat, že matice $\int_0^T e^{A(T-\xi)}\, d\xi$ z předchozí rovnice je regulární. Musí tedy platit

$$[\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e^{iAT}]\, b = 0 \,, \quad \eta_i \not\equiv 0 \,. \tag{14}$$

V této rovnici vyjádříme matici e^{iAT} pomocí známého definičního vztahu pro funkci matice (srov. např. [7]), tj.

$$e^{iAT} = p_i(A) \,,$$

kde $p_i(\lambda)$ jsou polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Existují tedy konstanty ϑ_i, $i = 0, \ldots, n - 1$ tak, že

$$\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e^{iAT} = \sum_{i=0}^{n-1} \vartheta_i A^i \,.$$

Přitom ϑ_i nejsou identicky pro všechna i rovna nule. Jinak by totiž levá strana předchozí rovnice musela být rovna nulové matici, tj., opět podle definice funkce matice, výraz $\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e^{i\lambda T}$ by se musel anulovat na spektru matice A. Podle (13) pro $\lambda_k \neq \lambda_l$ také $e^{\lambda_k T} \neq e^{\lambda_l T}$ a tedy $\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e^{i\lambda T}$ by musel mít n kořenů $e^{\lambda_k T}$ (počítajíc v to přísl. násobnosti), což není možné.

Tedy, podle (14)

$$\sum \vartheta_i A^i b = 0 \,, \quad \vartheta_i \not\equiv 0 \,.$$

To je spor s předpokladem věty.

Přistupme nyní k řešení vlastní variační úlohy. Předpokládejme nejdříve případ $v = 0$. Ve shodě s metodou dynamického programování [4], namísto abychom minimalizovali přímo výraz (9), budeme řešit posloupnost jednodušších úloh na minimum výrazu

$$J_{0,\alpha}(x_0, u_0, u_1, \ldots, u_\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} [(x_k, Px_k) + (x_k, p)\, u_k + \gamma u_k^2] \,.$$

Označme

$$J^0_{v,\alpha}(x_0) = \min_{u_0, \ldots, u_\alpha} J_{v,\alpha}(x_0, u_0, \ldots, u_\alpha) \,.$$

Zřejmě

$$J_{0,\alpha+1}(x_0, u_0, \ldots, u_{\alpha+1}) = (x_0, Px_0) + (x_0, p)\, u_0 + \gamma u_0^2 + J_{0,\alpha}(x_1, u_1, \ldots, u_{\alpha+1})$$

a minimalizací obou stran předchozí rovnice podle u_i

$$J^0_{0,\alpha+1}(x_0) = \min_{u_0} [(x_0, Px_0) + (x_0, p)\, u_0 + \gamma u_0^2 + J^0_{0,\alpha}(x_1)] \,.$$

 Odtud pomocí (11) dostáváme tyto základní rekurentní formule:

(15) $$J^0_{0,\alpha+1}(x) = \min_u \left[(x, Px) + (x, p)\, u + \gamma u^2 + J^0_{0,\alpha}(Fx + fu)\right],$$

$$J^0_{0,0}(x) = \min_u \left[(x, Px) + (x, p)\, u + \gamma u^2\right].$$

Zde a v dalším pokládáme pro jednoduchost $x_0 = x$, $u_0 = u$. Nechť zpočátku $\alpha = 0$. Z (15) plyne

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(x, Px) + (x, p)\, u + \gamma u^2\right] = 0,$$

$$u = -\frac{(x, p)}{2\gamma} \stackrel{!}{=} (\psi_0, x).$$

Odtud zpětným dosazením do (15)

$$J^0_{0,0}(x) = (x, Px) + \tfrac{1}{4}\gamma\,(x, p)^2 \stackrel{!}{=} (x, R_0 x), \quad R_0 \text{ pozitivně definitní}.$$

Předpokládejme dále, že

(16) $$J^0_{0,\alpha}(x) = (x, R_\alpha x), \quad R_\alpha \text{ pozitivně definitní}.$$

Dosazením do (15)

$$J^0_{0,\alpha+1}(x) = \min_u \left[(x, Px) + (x, p)\, u + \gamma u^2 + ([Fx + fu], R_\alpha[Fx + fu])\right].$$

Derivováním a úpravou získáme pro u

$$u = -\frac{1}{2}\,\frac{(x, p + F'[R_\alpha + R'_\alpha] f)}{\gamma + (f, R_\alpha f)} = (x, \psi_\alpha)$$

a zpětným dosazením do (15)

$$J^0_{0,\alpha+1}(x) = (x, Px) + (x, p)(x, \psi_\alpha) +$$
$$+ \gamma(x, \psi_\alpha)^2 + ([Fx + f(x, \psi_\alpha)], R_\alpha[Fx + f(x, \psi_\alpha)]),$$

tj. podle (15) a této rovnice existuje pozitivně definitní matice $R_{\alpha+1}$ tak, že

$$J^0_{0,\alpha+1}(x) = (x, R_{\alpha+1} x).$$

Tedy (16) platí pro každé α. Dalším krokem je nyní zřejmě vyšetření matic R_i pro $i \to \infty$.

Věta 2. *Nechť pro soustavu* (11) *platí podmínka řiditelnosti*

$$\text{hod}\,[f, Ff, F^2 f, \ldots, F^{n-1} f] = n.$$

Potom posloupnost matic R_i konverguje pro $i \to \infty$ k pozitivně definitní matici R.

Důkaz konvergence, podobně jako v [5], je důsledkem následujících dvou nerovností, platných pro všechna x; $i = 0, 1, 2, \ldots$:

$$(x, R_{i+1}x) \geqq (x, R_i x)\,; \tag{17}$$

existuje matice $\tilde{R}$ tak, že

$$(x, R_i x) \leqq (x, \tilde{R}x)\,. \tag{18}$$

(17) vyplývá snadno ze vztahu

$$J_{0,i+1}(x, u_0, \ldots, u_{i+1}) = J_{0,i}(x, u_0, \ldots, u_i) + J_{0,0}(x_{i+1}, u_{i+1})\,.$$

Pro důkaz (18) použijeme rovnici (11) $(n - 1)$krát samu na sebe:

$$x_1 = Fx_0 + fu_0\,,$$

$$x_2 = F^2x_0 + Ffu_0 + fu_1\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = F^n x_0 + F^{n-1}fu_0 + \ldots + fu_{n-1}\,. \tag{19}$$

Podle předpokladu, vektory $F^i f$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, představují bazi stavového prostoru, a tedy existují $u_i = \tilde{u}_i$, $i = 0, 1, \ldots$ tak, že pravá strana (19), tj. x_n, je rovna nule. Jak známo, lze $\tilde{u}_i$ vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{u}_i = (c_i, x_0)\,, \quad i = 0, \ldots, n - 1\,, \tag{20}$$

kde c_i jsou jednoznačně určené vektory. Položme

$$\tilde{u}_i = 0\,, \quad i = n, n + 1, \ldots \tag{21}$$

a dále opět $x_0 = x$. (19), (20), (21) dávají

$$x_k = F^k x + \sum_{i=0}^{k-i} F^{k-i} f\tilde{u}_i = \Phi_k x\,, \quad k = 0, \ldots, n - 1\,,$$

$$x_k = 0\,, \quad k = n, n + 1, \ldots$$

Hodnota kritéria optimálnosti je tedy podle (9)

$$J_0(x, \tilde{u}_0, \ldots) = \sum_{k=0}^{n-1} [(\Phi_k x, P\Phi_k x) + (\Phi_k x, p)(c_k, x) + \gamma(c_k, x)^2] = (x, \tilde{R}x) < \infty\,,$$

kde $\tilde{R}$ je zřejmě pozitivně definitní matice. Předchozí výraz nemůže být menší než $J_0^0(x)$, což ve spojení se (17) dokazuje (18).

Podle (17), (18) konverguje $(x, R_i x)$ stejnoměrně na každé kompaktní množině stavového prostoru, a tedy $R_i \to R$, R je pozitivně definitní.

Položme $J^0_{0,\infty}(x) = (x, Rx)$. Zřejmě $J^0_{0,\infty}(x) \leqq J^0_0(x)$, neboť v opačném případě by existovalo α tak, že $J^0_{0,\alpha}(x) > J^0_0(x)$. Tedy

$$J^0_{0,\infty}(x) = J^0_0(x)$$

a rovnice (15) pro $\alpha = \infty$ nabývá tvar

$$J^0_0(x) = \min_u \left[(x, Px) + (x, p)\,u + \gamma u^2 + J^0_0(Fx + fu)\right].$$

Postupem stejným jako dříve

$$u = -\frac{1}{2}\,\frac{(x, p + F'(R + R')f)}{\gamma + (f, Rf)} = (x, \psi)\,. \tag{22}$$

Doposud jsme stále uvažovali případ, kdy ve výrazu (4) je $\nu = 0$. Předpokládejme nyní $\nu = 1$. Zřejmě

$$J^0_1(x) = \min_u J^0_0(Fx + fu) = \min_u (Fx + fu, R[Fx + fu])\,.$$

Odtud opět

$$u = (x, \varphi_1)\,, \quad \varphi_1 = -\frac{F'(R + R')f}{(f, Rf)}\,.$$

Zpětným dosazením

$$J^0_1(x) = ([F + f\varphi'_1]\,x, R[F + f\varphi'_1]\,x) = (x, S_1 x) \geqq \emptyset\,.$$

Pro $\nu > 1$ dává úplná indukce

$$\begin{gathered} J^0_{\nu+1}(x) = \min_u J^0_\nu(Fx + fu) \overset{!}{=} (x, S_{\nu+1}x)\,, \\ u = (x, \varphi_{\nu+1})\,, \\ \varphi_{\nu+1} = -F'(S_\nu + S'_\nu)f(f, S_\nu f)^{-1}\,. \end{gathered} \tag{23}$$

(23) představuje skutečně minimum, protože jde o extrém nezáporné kvadratické formy.

Shrňme, co bylo dosud odvozeno.

Věta 3. *Předpokládejme, že soustava* (1) *je řiditelná,* tj. $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ *jsou lineárně nezávislé, a že je splněna nerovnost* (13). *Nechť kritériem optimálnosti je funkcionál* (4):

$$\int_{\nu T}^{\infty} (x(t), Qx(t))\,\mathrm{d}t$$

Nechť dále $u(t)$ je diskrétní v čase, tj. splňuje vlastnost (2). *Pak optimální řízení má tvar*

$$u(kT) = (\vartheta, x(kT))\,, \tag{24}$$

kde ϑ je nějaký konstantní vektor; neboli, optimální řízení je lineární funkcí stavového vektoru.

Často je výhodnější vyjádřit linearitu zpětné vazby diskrétního obvodu formou lineární diferenční rovnice mezi výstupní veličinou soustavy (bývá jí např. některá složka stavového vektoru) a řízením. To je také forma běžná v teorii diskrétních systémů, neboť se hodí pro přímou aplikaci transformace Z (srov. [2]).

Věta 4. *Nechť výstupní veličina soustavy* (1) *je popsána rovnicí*

$$y = (c, x), \tag{25}$$

kde c je konstantní vektor. Předpokládejme, že vektory

$$c, A'c, \ldots, A'^{(n-1)}c \tag{26}$$

jsou lineárně nezávislé, a že je splněna nerovnost (13). *Předpokládejme dále, že řízení lze vyjádřit ve tvaru* (24). *Potom lze toto řízení také vyjádřit v závislosti na výstupu soustavy lineární diferenční rovnicí*

$$\begin{aligned} b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \ldots + b_{n-1} u_{k-n+1} &= \\ = a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k-n+1} &, \end{aligned} \tag{27}$$

kde a_i, b_k jsou konstanty, u_j resp. y_j značí $u(jT)$ resp. $y(jT)$.

Důkaz. Podobně, jako byla odvozena rovnice (19), získáme rovnici

$$x_k = F^j x_{k-j} + F^{j-1} f u_{k-j} + \ldots + f u_{k-1} .$$

Vynásobme obě strany skalárně vektorem $F'^{-j}c$. Po úpravě s použitím (25) a s označením $y_i = y(iT)$

$$(F'^{-j}c, x_k) = y_{k-j} + \sum_{i=1}^{i=j} (F'^{-i}c, f)\, u_{k-j+i-1} .$$

Definujme vektory v_j takto

$$v_j = F'^{-j}c , \quad j = 0, \ldots, n-1 . \tag{28}$$

Potom

$$(v_j, x_k) = y_{k-j} + \sum_{i=1}^{i=j} (v_i, f)\, u_{k-j+i-1} . \tag{29}$$

Vektory (28) jsou lineárně nezávislé; v opačném případě totiž existují konstanty $\eta_i \not\equiv 0$ tak, že

$$\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i F'^{-i} c = 0 .$$

 Uvážíme-li vztahy (podobně jako v důkazu věty 1)

$$F'^{-i} = e^{-iA'T} = q_i(A') ,$$

kde stupeň polynomu $q_i(\lambda)$ není větší než $n - 1$, existují tedy konstanty ϑ_i tak, že

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vartheta_i A'^i c = 0 .$$

Dále $\vartheta_i \neq 0$ neboť výraz $\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e^{-i\lambda T}$ se nemůže anulovat na spektru matice A', uvážíme-li (13). To je spor s (26).

Vektory $v_j, j = 0, 1, \ldots, n - 1$ tedy představují bazi stavového prostoru. Označme symbolem v_i^* vektory sdružené baze:

$$v_i^* v_j = \delta_{ij} .$$

Potom pro x_k platí

$$x_k = \sum_{j=0}^{n-1} v_j^*(v_j, x_k)$$

a podle (29)

$$x_k = \sum_{j=0}^{n-1} v_j^* y_{k-j} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \Big[\sum_{i=0}^{n-\nu-1} v_{\nu+i}^*(v_{1+i}, f) \Big] u_{k-\nu} .$$

Dosazením do (24) a úpravou obdržíme (27).

Vlastnost (26) je algebraickým vyjádřením tzv. „pozorovatelnosti" soustavy v našem speciálním případě (angl. „observability", rusky „наблюудаемость"). Obecně tato vlastnost značí, že stav soustavy lze určit pozorováním výstupní veličiny na konečném časovém intervalu, za předpokladu nulového řízení.

Z technického hlediska je někdy výhodnější vyjádřit podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti v termínech Laplaceovy transformace. Lze na příklad dokázat, že soustava n-tého řádu, s přenosem

$$S(p) = \frac{q_{n-1}p^{n-1} + q_{n-2}p^{n-2} + \ldots + q_0}{r_n p^n + r_{n-1}p^{n-1} + \ldots + r_0} , \quad r_n \neq 0$$

je řiditelná a pozorovatelná tehdy a jen tehdy, když čitatel a jmenovatel přenosu nemají společný kořenový činitel (srov. [8]).

(Došlo dne 18. května 1966.)

[1] S. Bláha, V. Peterka: Syntéza číslicových regulačních obvodů podle kritéria akvadratické regulační plochy. Kybernetika *1* (1965), 2, 127–143.
[2] V. Strejc a kol.: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, Praha 1965.
[3] Я. Курцвейль: К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика *XXII* (1961), 6, 688—695.
[4] R. Bellman: Adaptive control processes: a guided tour. Princeton University Press, Princeton, 1961.
[5] R. Kalman: On general control theory. In Proc. first international congress on automatic control (Moscow), vol. 1., Butterworth, London 1961.
[6] E. A. Coddington, N. Levinson: Theory of ordinary differential equation. McGraw-Hill, N. Y. 1955.
[7] L. Zadeh, Ch. Desoer: Linear system theory, the state space approach. McGraw-Hill, N. Y. 1963.
[8] R. Sivan, S. Butman: On cancellations, controllability and observability. IEEE Trans. *AC 9* (1964), 3.

SUMMARY

On Optimum Discrete-Time Control Problem

JIŘÍ RŮŽIČKA

This paper is concerned with the synthesis problem of optimum discrete-time control of linear, time-invariant, single input, single-output differential system (1), (25) (standard vector-matrix notation is used). The performance index is supposed to be of the form (4), where $V(x)$ is positive definite. It is shown that if the system is completely controllable and observable, then the optimum control is determined by means of linear sampled-data feedback.

Ing. Jiří Růžička, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.