KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 2/1966

Učiace sa systémy automatického riadenia*

ŠTEFAN PETRÁŠ

V článku je uvedená definícia učenia a formulovaný je proces učenia pri automatickom riadení. Uvedené sú niektoré problémy samoučenia, ako aj kvantitatívne metódy procesu učenia. Z hľadiska riešenia úlohy automatického riadenia je dôležitá etapa vypracovania algoritmu riadenia. V článku sú uvedené tri druhy algoritmu riadenia, ako aj analýza konvergencie riešenia a rozptylu náhodnej veličiny cieľa.

1. ÚVOD

Skúsenosti s použitím metód optimálneho riadenia zložitých výrobných procesov nasvedčujú tomu, že najväčšie ťažkosti vznikajú pri vypracovaní algoritmu riadenia. Zostavenie algoritmu riadenia predpokladá znalosť:

a) matematického modelu daného výrobného procesu (včítane obmedzení). Získať tento model je časove veľmi náročná úloha. Najmä však je náročná práca spojená so spracovaním veľkého počtu informácií u mnohorozmerných sústav,
b) metód riešenia úloh optimálneho riadenia. Tento problém spočíva vo voľbe deterministických, alebo stochastických metód. Vzhľadom na zložitosť matematického modelu a použitie počítacích strojov budú to spravidla iteračné metódy. Tu vzniká problém rýchlosti konvergencie riešenia pri požadovanej presnosti.
c) kritérií kvality riadiaceho systému, t. j. do akej miery môže daná sústava splniť požadované ciele (vyhovovať objektívnej funkcii — funkcionálu).

V závislosti od vyššie uvedených podmienok kvalita algoritmu riadenia bude adekvátna stupňu poznania matematického modelu a na druhej strane algoritmus bude efektívny v závislosti od celkového času riešenia pri požadovaných kritériách kvality práce riadiacej sústavy. Doterajšie metódy optimálneho riadenia, ako aj metódy optimálneho riadenia pri neúplných informáciách (duálne riadenie, riadenie modelom, strategické riadenie, riadenie pokusom) rozsiahlych sústav (large systems, большие системы) sú neefektívne [3], [4], [11]. Snaha je preto, použiť metódy riadenia založené na princípe „učenia", resp. „samoučenia".

V tomto referáte budeme sa zaoberať definíciou učenia s ohľadom na proces učenia v problematike riadenia výrobných procesov. Nemienim sa zaoberať klasifikáciou učiacich sa sústav, ich

* Referát prednesený na *druhej konferencii o kybernetike*, Praha, 16.—19. novembra 1965.

významom a učiacimi sa automatmi, ako sú perceptrón (model istej činnosti mozgu). Mojou snahou je poukázať na riešenie otázok optimálneho riadenia výrobných procesov ak nepoznáme matematický model výrobného procesu úplne.

2. DEFINÍCIA UČENIA A SAMOUČENIA, ZÁKLADNÉ BLOKOVÉ SCHÉMY

Jednotný názor na definíciu učenia a samoučenia vo vedeckých kruhoch nie je. Tak napr. V. M. Gluškov v práci [6] pod pojmom *samoučiaci proces rozumie taký proces, ktorý stále zlepšuje cieľ daného procesu.* Iný vedec Pask v práci [9] rozumie pod pojmom *učenie charakteristiku chovania sa sústavy, odvodenú zo skúseností.* Sovietský vedec A. M. Dovgjallo [2] rozumie pod pojmom *učenie zložitú činnosť sústavy za účelom zlepšenia její vlastností.* Niektorí autori pod pojmom učenia rozumia *proces adaptácie.*

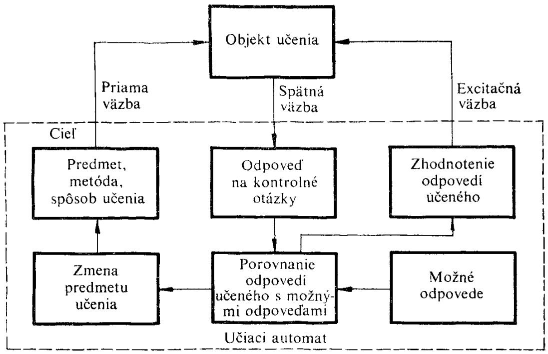
Uvedieme definíciu, vyplývajúcu z kybernetického hľadiska. *Pod pojmom učenia budeme rozumieť proces získavania* (schopnosť prijímať otázky), *uschovania* (schopnosť zapamätať si), *transformácie* (vypracovať odpoveď) a *využitia* (podrobiť sa kontrole) *informácií.*

Inými slovami můžeme povedať, že *proces učenia je realizovaný súhrn algoritmov, odvodených z predchádzajúcej činnosti sústavy* (apriorné charakteristiky) a *súčasnej činnosti* (aposteriorné charakteristiky).

Pod pojmom samoučenie budeme rozumieť schopnosť učiacej sa sústavy, sama si generovať nové informácie na základe pokusov. Tieto môžu byť úspešné (keď vyhovujú cieľu), alebo neúspešné. Charakteristickým rysom učiacej sústavy je zlepšovať odpoveď na danú otázku. Ináč povedané, pri daných vstupných informáciách (otázkach) upraviť transformáciu informácií tak, aby po určitom počte pokusov výstup (odpoveď) vyhovoval kritériu učenia (objektívnej, účelovej funkcii).

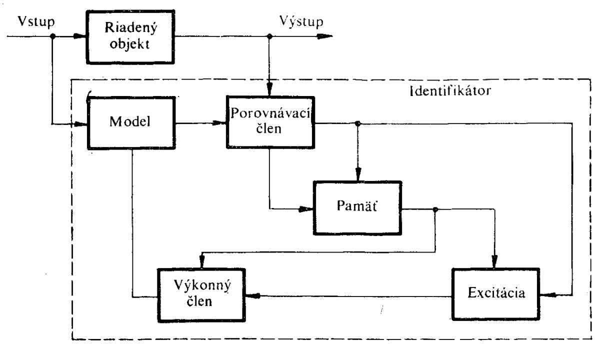
Pri procese učenia sa vždy vyskytuje *objekt učenia* (žiak, automat, riadená sústava) *subjekt učenia – učiaci automat* (učiteľ, automat, počítací stroj a pod.) (obr. 1). Učiaci automat pusobí na objekt učenia priamou väzbou, t. j. poskytuje informácie objektu učenia o *cieli učenia, o predmete, o metóde a spôsobe učenia.* Objekt učenia po osvojení (transformácii a zapamätaní) potrebných informácií odpovedá na kontrolné otázky. Učiaci automat porovnáva odpovede s *možnými odpoveďami* a vypracuje potrebné zmeny v cieľoch, v predmete, v metóde a spôsobe učenia. Tieto prenosy sa uskutočňujú v *spätnej väzbe.* Okrem toho na základe výsledku porovnania odpovede s možnými odpoveďami zhodnotí sa súčasne proces učenia a vypracuje sa „povzbudzujúca" excitačná informácia, ktorá pôsobí na objekt učenia. Vidíme teda, že proces učenia je proces so spätnou väzbou, využívajúci základnej kybernetickej myšlienky získavania, prenosu, transformácie, zapamätovania a využívania informácií.

V zásade pri riadení výrobných procesov môžeme použiť proces učenia pri *identifikácii* výrobných procesov a pri *automatickom riadení* výrobných procesov. Bloková



Obr. 1.

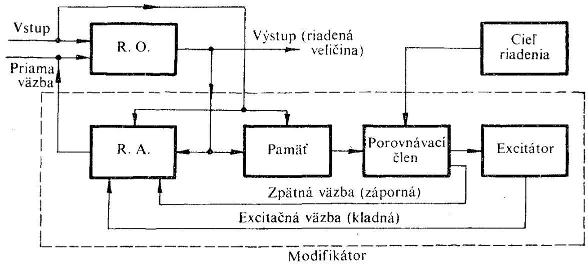
schéma identifikácie procesov učenia je nakreslená na obr. 2. Identifikátor (automat pre identifikáciu) zahrňuje v sebe vlastnú sústavu, model sústavy, porovnávací člen, pamäť, logický člen a výkonný člen a excitátor.



Obr. 2.

Z hľadiska štrukturálneho niet podstatného rozdielu medzi adaptívnym prístupom k riešeniu úlohy a naznačenou schémou až na obvod excitácie, ktorý práve využíva apriorné charakteristiky a úspešné či neúspešné pokusy. Tento obvod je charakteristický procesu učenia pri identifikácii. Proces identifikácie vyplýva z naznačenej blokovej schémy.

Zaujímavý je proces učenia v procese riadenia. Bloková schéma je nakreslená na obr. 3. Modifikátor (učiaci automat) zahrňuje v sebe riadiaci automat RA, pamäť, porovnávací člen a excitátor. Ako vidíme, v modifikátori už zdanlivo nevystupuje model sústavy a výkonný člen a naviac je tu riadiaci automat RA. Môžu existovať učiace sa obvody automatického riadenia, využívajúce aj vlastnosti modelu. Závisí to na metóde učenia.



Obr. 3.

3. KVANTITATÍVNE METÓDY PROCESU UČENIA

Treba vysvetliť pojem zlepšovať odpoveď na danú otázku, čiže kvantitatívne zhodnotiť proces učenia. Pre toto vyjadrenie môžeme použiť pojem entrópie, resp. množstva informácie takto:

Nech je daná diskrétna a náhodná veličina $x, x \in X$ s rozložením pravdepodobnosti $f(x)$. Entrópiou tohto rozloženia budeme nazývať výraz:

$$H_x = -\sum_{x \in X} f(x) \log f(x) . \tag{1}$$

Ak $f(x) = 0$, potom tiež $f(x) . \log f(x) = 0$ (rozumie sa prirodzený logaritmus). V prípade dvoch nezávislých náhodných veličín $z = z(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ s rozloženiami pravdepodobnosti $f_1(x)$ a $f_2(y)$ entrópia veličiny z bude daná vzťahmi:

$$\begin{aligned} H_{yx} &= -\sum f_2(y) \sum f_1(x) \log f_1(x) , \\ H_{xy} &= -\sum f_1(x) \sum f_2(y) \log f_2(y) . \end{aligned} \tag{2}$$

Napríklad majme n riadení, pričom každé môže nadobúdať m rôznych hodnôt. Potom celkové množstvo možných režimov je $N = nm$. Nech počet priaznivých režimov je k (t. j. takých, ktoré vyhovujú objektívnej funkcii). Potom počiatočná pravdepodobnosť priaznivosti režimov je

$$p_i = \frac{k}{mn} \tag{3}$$

a jemu odpovedajúca entrópia bude

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i \,. \tag{4}$$

Okrem priaznivých režimov vyskytnú sa aj režimy nepriaznivé, ktoré v priebehu pokusu vylučujeme tým, že ich od celkového počtu možných režimov odpočítavame. Teda pravdepodobnosť priaznivosti i-tého režimu je

$$p_i = \frac{k}{mn - s}\,, \tag{5}$$

kde s je označenie pre počet už uskutočnených nepriaznivých režimov. Táto pravdepodobnosť postupne bude stúpať až pre $s = mn - k$.

Entrópia bude:

$$H_s = -\sum_{i=1}^{mn-s} p_i \log p_i\,, \tag{6}$$

t. j. $|H_s| < |H_0|$. V priebehu učenia entrópia bude klesať.

Mieru učenia môžeme vyjadriť napríklad takto: Označme pomer entrópie pred učením H_0 a po naučení H_s, čiže

$$h = \frac{H_s}{H_0} \quad (0 \leqq h \leqq 1)\,. \tag{7}$$

Tento pomer nazývame relatívna entrópia učenia. Mieru učenia dostaneme

$$\eta = \frac{H_0 - H_s}{H_0} = 1 - h \quad (0 \leqq \eta \leqq 1)\,. \tag{8}$$

Čím je η väčšie, tým sa sústava lepšie naučila (lepšie reprodukovala vstupné informácie). Predpokladáme apriori, že η nie je záporné číslo. V praxi sa však môže stať, že namiesto učenia (t. j. organizovanosti) sústava sa dezorganizuje, potom η môže byť číslo záporné.

Z hľadiska štrukturálneho treba povedať, že celková entrópia učiacej sa sústavy pozostáva z niekoľkých častí (v závislosti od celkovej štruktúry). Napr. ak proces učenia je podľa schémy otázka, odpoveď, zhodnotenie [5], potom entrópia celej sústavy bude pozostávať z troch hlavných častí

H_{vs} entrópia vstupu (entrópia otázky),

H_t entrópia transformácie (entrópia odpovede),

H_z entrópia výsledku (entrópia zhodnotenia).

Okrem týchto vyskytujú sa ešte entrópie dielčie (ako sú entrópia prenosu informácie na vstupe, vo vlastnej sústave, na výstupe a pod.). Z hľadiska procesu učenia, najdôležitejšia časť celkovej entrópie učenia je H_t entrópia transformácie. Uvedieme teraz vzťahy pre hlavné časti entrópie.

Nech $(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n) = P$ je postupnosť otázok, vstupujúcich do učiacej sústavy a $\alpha(P)$ je rozloženie pravdepodobnosti postupnosti P, potom entrópia otázky bude

$$H_{vs} = -\sum_{p_i \in P} \alpha(P) \log \alpha(P) . \tag{9}$$

Nech $\beta(P)$ je rozloženie pravdepodobnosti postupnosti vstupných otázok P po vložení otázky a $\gamma(A)$ je rozloženie pravdepodobnosti počiatočného stavu A učiacej sústavy. Nech F je operátor, ktorý charakterizuje spôsob transformácie informácií. Veličiny $\beta(P)$ a $\gamma(A)$ a operátor F určujú funkciu $\varepsilon(P, Q)$, kde Q je odpoveď, čiže

$$\varepsilon(P, Q) = \varepsilon\{F[\beta(P)], \gamma(A)\} . \tag{10}$$

Entrópia transformácie bude potom daná vzťahom

$$H_t = -\sum_{\substack{p_i \\ a_j}\}\in R} \varepsilon(P, Q) \log \varepsilon(P, Q) . \tag{11}$$

Nech $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m = Q$ je postupnosť odpovedí (výstupu) učiacej sa sústavy s rozložením pravdepodobnosti $\mu(Q)$, potom entrópia výsledku

$$H_z = \sum_{q_i \in Q} \mu(Q) \log \mu(Q) . \tag{12}$$

Celková entrópia učenia pri danom zákone rozloženia učenia u daná súčtom jednotlivých entrópií

$$H_u = H_{vs} + H_t + H_z .$$

Niektorí autori [5] zavádzajú pre mieru učenia iný vzťah ako je (8). Nech počiatočná entrópia učiacej sústavy je H_{u0}. Rozloženie učenia je $\varphi(u)$ triedy K pri danej entrópii H_u, potom výraz

$$\eta'_w = \int_K \Delta H_u \, \varphi(u) \, \mathrm{d}u , \tag{13}$$

resp.

$$\eta'_u = \int_K \frac{\Delta H_u}{\Delta H_t} \varphi(u) \, \mathrm{d}u , \tag{14}$$

kde $\Delta H_u = H_u - H_{u0}$, $\Delta H_t = H_t - H_{t0}$. Porovnaním vzťahu (14) a (8) vidíme, že vzťah (8) vyjadruje mieru učenia len pre jeden prípad. Výraz (13), resp. (14) pre celú triedu, zdôrazňujúc pritom proces transformácie informácie.

Môžeme teda povedať, že čím je vyššia hodnota integrálu (13), tým sústava je schopnejšia sa učiť. Ak η je záporné, potom sústava sa neučí, je schopná len „dezorganizovať sa". Výpočet týchto integrálov je zložitý, v praxi použijeme radšej vzťah (8).

Uvedieme teraz kvantitatívne vyjadrenie miery samoučenia [5]. V tomto prípade už nemôžeme použiť vyššie uvedené entropické vzťahy. Zavedieme reálnu funkciu $f(P, Q)$ na množine všetkých možných párov otázok (P) a odpovedí (Q). Hodnota tejto funkcie charakterizuje kvantitatívne vyjadrenie odpovede na ľubovoľnú otázku. Nech daná sústava je schopná samoučenia. Rozloženie pravdepodobnosti počiatočného stavu nech je $\gamma(A)$, rozloženie pravdepodobnosti vstupných informácií otázok nech je $\alpha(P)$, výstup odpoveď sústavy nech je $Q = \lambda(A, P)$.

Hodnota funkcie

$$f_u = \sum_{P,A} f[P, \lambda(A, P)]\, \gamma(A)\, \alpha(P) \tag{15}$$

nám určuje strednú hodnotu kvality odpovedí sústavy pri danom zákone rozložení učenia u. Kvantitatívny proces samoučenia nejakej sústavy môžeme nazvať rozdiel $f_u - f_{u_0}$, kde u_0 je apriorný zákon rozloženia, daný vopred, u je aposteriórny zákon rozloženia, ktorý získame po vykonaní úspešných pokusov. Nech rozloženie pravdepodobnosti aposteriórnych zákonov triedy K je $\varphi(u)$, potom

$$\eta'' = \int_{u \in K} (f_u - f_{u_0})\, \varphi(u)\, du \tag{16}$$

nám udáva kvantitatívnu charakteristiku schopnosti danej sústavy samoučiť sa. Nedostatkom tejto definície je, že v mnohých prípadoch nepoznáme analytické vyjadrenie f_u. Charakteristickou črtou učiacich sa sústav je „prítomnosť" učiteľa, t. j. zariadenia, ktoré je schopné zadávať otázky a klasifikovať (porovnať) odpoveď. U samoučiacich sústav nemáme „učiteľa". Ako zdroj otázok používame pokusy a pre klasifikáciu použijeme kladnú spätnú väzbu, ktorá pôsobí ako experimentátor, t. j. hľadač žiadaného stavu.

Iný prístup k hodnoteniu procesu učenia možno uviesť ako schopnosť sústav stotožniť sa s daným obsahom cieľa učenia. Môžeme použiť teóriu množín a teóriu formálnych jazykov, potom problém sa redukuje na problém *spojovania* a *stotožňovania* formálnych jazykov.

4. METÓDY RIEŠENIA UČIACICH SA SÚSTAV AUTOMATICKÉHO RIADENIA

Výsledkom riešenia úloh učiacich sa sústav je algoritmus učenia. Tento môže byť pevný, alebo premenlivý. Premenlivý algoritmus je charakteristický samoučiacim sa sústavám automatického riadenia. V ďalšej časti budeme sa zaoberať procesom učenia u optimálnych sústav automatického riadenia, najmä s aspektom, ak nepoznáme úplné informácie o matematickom modeli riadenej sústavy. Súčasne predpokladajme, že proces optimálneho riadenia sa bude vzťahovať ku kvázistacionárnemu stavu, čiže pôjde nám o statickú optimalizáciu. V tomto prípade účelová funkcia je daná vzťahom

$$Q = \varphi(\bar{x})\,; \tag{17}$$

je to skalárna funkcia vektora riadenej veličiny $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Úlohou optimálneho riadenia je určenie takého vektora $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, pre ktorý účelová funkcia (17) nadobúda extrém hodnoty napr.

$$Q_{\min} = Q(\bar{x}^*) \leqq Q(\bar{x})\,, \tag{18}$$

pričom $\bar{x}^*$ je z ohraničenej množiny $\{x\}$.

Vzhľadom k tomu, že v praxi sa vyskytujú viacrozmerné sústavy, používame preto metódy diskrétne (krokové). Objektívna účelová funkcia má zpravidla viac extrémov, preto používame metódy globálne. Ako prostriedok pre proces automatického riadenia použijeme číslicový počítací stroj. V týchto prípadoch sa redukuje problém na určenie rekurentných vzťahov postupného priblíženia k cieľu, čiže určíme postupnosť vektorov

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \Delta\bar{x}_{i+1}\,, \tag{19}$$

kde

$$\Delta\bar{x}_{i+1} = \begin{cases} \alpha\bar{\xi} & \text{ak} \quad Q(\bar{x}_i) < Q(\bar{x}^*)\,, \\ \Delta\bar{x}_i & \text{ak} \quad Q(\bar{x}_i) \geqq Q(\bar{x}^*)\,, \end{cases} \tag{20}$$

kde α je hodnota kroku a $\bar{\xi}$ je jednotkový vektor.

V ďalšom je treba urobiť úvahy o hodnote kroku, ktorá má vplyv na presnosť riešenia a rýchlosť konvergencie riešenia. Jednotkový vektor sa určí spravidla v smere gradientu účelovej funkcie. Tento typ algoritmu má určité nevýhody [11]. Oveľa výhodnejší sa zdá byť algoritmus, založený na princípe učenia, tento je daný zmenou jednotlivého vektora $\bar{\xi}$ v závislosti na predchádzajúcich úspechoch či neúspechoch, čiže

$$\bar{\xi} = \bar{f}[\Delta\bar{x}_i, \bar{p}_i(\bar{z}_i)]\,, \tag{21}$$

kde $\bar{f}$ je vektorová funkcia, $\bar{p}_i(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in})$ je n-rozmerný vektor pravdepodobnosti p_{ij} správnej voľby smeru j-tej súradnice na i-tom kroku a $\bar{z}_i$ je parameter pamäti.

V podstate teda problém algoritmu učenia spočíva v určení zmeny parametra pamäti. Tento vzťah musí v sebe zahrňovať predchádzajúce informácie o úspechu či neúspechu, ďalej faktor povzbudenia, (excitácie), faktor zapamätania a faktor nádeje na úspech.

α) Najjednoduchší algoritmus bude teda vyjadrovať len informácie o predchádzajúcom úspechu, či neúspechu čiže

$$\bar{z}_{i,n+1} = \bar{z}_{i,n} - \alpha\,\mathrm{sgn}\,(\Delta\bar{x}_{i,n}\Delta Q_n)\,, \tag{22}$$

kde $\alpha > 0$ je faktor rýchlosti účenia. Význam tohto súčiniteľa spočíva v nasledovnom, ak $\alpha = 0$ učenie neexistuje, čím je α väčšie, tým rýchlejšie sa sústava učí.

β) Ďalší typ je algoritmus učenia so zapamätaním, t. j.

$$\bar{z}_{i,n+1} = k\bar{z}_{i,n} - \alpha\,\Delta\bar{x}_{i,n}\,\Delta Q_n\,, \tag{23}$$

kde $0 \leqq k \leqq 1$ je koeficient zabúdania.
Ak $k = 1$ strata pamäti nie je, učenie je úspešné, ak $k = 0$ strata pamäti je úplná, učenie nie je úspešné.

γ) Algoritmus učenia s nádejou na úspech má tvar

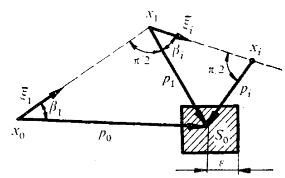
$$\bar{z}_{i,n+1} = k\bar{z}_{i,n} - \alpha\varphi(n)\,\Delta\bar{x}_{i,n}\,\Delta Q_n\,, \tag{24}$$

kde $\varphi(n)$ je funkcia nádeje na úspech ($\varphi(n)$ môže byť naprv. Bayesovo riziko odhadu, resp. je funkcia počtu krokov). Okrem uvedených algoritmov učenia sú známe aj iné typy [10], založené na princípe stochastickej aproximácie.

Z hľadiska praktickej realizácie nás zaujíma u zvolenej metódy algoritmus učenia

a) konvergencie riešenia,
b) rozptyl náhodnej veličiny cieľa.

Uvediem teraz prípad konvergencie riešenia a rozptyl náhodnej veličiny cieľovej funkcie, ak používame algoritmus α resp. β [11].



Obr. 4.

Predpokladajme, že cieľová funkcia je monotónne klesajúca resp. stúpajúca, vzhľadom na vzdialenosť z počiatočného bodu do cieľa, kde účelová funkcia nadobúda extrém. V tomto prípade bude

$$p = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^*)\right]^2}\,, \tag{25}$$

kde x_i^* je i-tá súradnica bodu S_0, v ktorom cieľová funkcia má extrém. Potom platí

$$Q(p) = Q(p + \Delta p) \tag{26}$$

ak $\Delta p \geqq 0$, môžeme povedať, že cieľová funkcia závisí len na vzdialenosti p.

Nech vzdialenosť počiatočného bodu x_0 od S_0 je p_0 (obr. 4). Uhol náhodného jednotkového vektora ξ_1 s priamkou $\overline{x_0 S_0}$ je β_1 ($\frac{1}{2}\pi \leqq \beta_1 \leqq \frac{3}{2}\pi$). Vzdialenosť bodu $\overline{x_1 S_0}$ je p_1. Všeobecne uhol náhodného jednotkového vektora ξ_i je β_i a vzdialenosť p_i. Môžeme teda písať

$$p_{i+1} = \begin{Bmatrix} p_i \sin \beta_{i+1} \\ p_i \end{Bmatrix} = p_i \varphi_{i+1} \begin{cases} \text{ak} \quad 0 \leqq \beta_{i+1} < \frac{1}{2}\pi, \\ \text{ak} \quad \frac{1}{2}\pi \leqq \beta_{i+1} \leqq \pi, \end{cases} \tag{27}$$

alebo obecne

$$p_i = p_0 \prod_{\alpha=1}^{i} \varphi_\alpha . \tag{28}$$

V našom prípade nás bude zaujímať matematická nádej $M_n(p_i)$ a rozptyl (disperzia) $D_n(p_i)$ vzdialenosti do cieľa n-mernej riadenej sústavy.

Zo vzťahu (28) za rovnomerného rozloženia vyplýva, že

$$M_n(p_i) = p_0 M_n \left(\prod_{\alpha=1}^{i} \varphi_\alpha\right); \tag{29}$$

ak φ_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, i$) sú nezávislé náhodné veličiny, potom

$$M_n(p_i) = p_0 \prod_{\alpha=1}^{i} M_n(\varphi_\alpha) = p_0 M_n^i(\varphi) \tag{30}$$

a vzťah pre rozptyl (disperziu) veličiny φ_α je daný vzťahom

$$D_n(p_i) = M_n(p_i^2) - M_n^2(p_i), \tag{31}$$

kde $M_n(p_i^2)$ je druhý centrálny moment veličiny p_i.

Uvažovaním vzťahu (30) a (31) dostaneme

$$D_n(p_i) = p_0^2 [M_n^i(\varphi^2) - M_n^{2i}(\varphi)]. \tag{32}$$

Hustotu pravdepodobnosti $f(\varphi)$ vyjadríme vzťahom

$$f(\varphi) = \frac{dF(\beta)}{d\beta}, \tag{33}$$

kde $F(\beta) = P(\beta)/P(\pi)$ je distribučná funkcia, $P(\beta)$ je plocha povrchu gule a $P(\pi)$ je plocha povrchu gule s uhlom π.

Výraz (33) môžeme napísať

$$f(\varphi) = \frac{1}{P(\pi)} \frac{dP(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{P(\pi)} \lim_{\Delta\beta \to 0} \left(\frac{S(\beta + \Delta\beta) - S(\beta)}{\Delta\beta} \right) = \tag{34}$$

$$= \frac{1}{P(\pi)} \lim_{\Delta\beta \to 0} \frac{\Delta S(\beta)}{\Delta\beta}.$$

Plochu povrchu gule s uhlom π, $P(\pi)$ môžeme vyjadriť vzťahom [11]

$$P(\pi) = \frac{2\pi^{n/2} R^{n-1}}{\Gamma(2/n)}, \tag{35}$$

kde R polomer n-rozmernej gule Γ je sama funkcie;

$$\lim_{\Delta\beta \to 0} \frac{\Delta S(\beta)}{\Delta\beta} = \lim_{\Delta\beta \to 0} \left[\frac{\pi^{n/2} R^{n-1}}{\Gamma(n/2) + 1) \cos(\beta + \Delta\beta)} \frac{\sin^{n-1}(\beta + \Delta\beta) - \sin^{n-1}\beta}{\Delta\beta} \right]. \tag{36}$$

Po dosadení (36) a (35) do (34) dostaneme veľmi jednoducho matematickú nádej

$$M_n(\varphi) = \int_0^\pi \frac{\Gamma(n-1)\, \varphi(\beta) \sin^{n-2}\beta \, d\beta}{2^{n-2}\, \Gamma^2(n - 1/2)} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n - 1/2)\, \Gamma(n + 1/2)}\right]. \tag{37}$$

Veľmi jednoducho môžeme vyjadriť matematickú nádej v závislosti na počte premenných n, ak uvážime, že

$$M_{n-1}(\varphi) < M_n(\varphi) < M_{n+1}(\varphi), \tag{38}$$

čiže

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]} < M_n(\varphi) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}. \tag{39}$$

V prípade i násobného náhodného pokusu môžeme písať podľa vzťahu (30) a (37)

$$M_n(p_i) = \frac{p_0}{2^i}\left[1 + \frac{\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n - 1/2)\, \Gamma(n + 1/2)}\right]^i. \tag{40}$$

Obdobným spôsobom by sme mali vyjadriť výraz pre rozptyl

$$D_n(p_i) = p_0^2 \left\{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^i - \frac{1}{2^{2i}}\left[1 + \frac{\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n - 1/2)\, \Gamma(n + 1/2)}\right]^{2i}\right\}. \tag{41}$$

Zo vzťahu (40) vidíme, že čím je väčšie n, tým konvergencia je menšia. Zo vzťahu (41) vidíme, že ak $i = 0$, potom $D_n(p_0) = 0$, ak $i \to \infty$, potom $\lim_{i \to \infty} D_n(p_i) = 0$ v intervale $0 < i < \infty$ má $D_n(p_i)$ pre dané n maximum.

Treba pripomenúť, že vyššie uvedené vzťahy platia len pre sústavy bez zotrvačnosti, bez pôsobenia porúch a pod.

5. ZÁVER

Cieľom tohto príspevku nie je vyčerpávajúcim spôsobom podrobne rozobrať problematiku učiacich sa sústav automatického riadenia. Účelom bolo, upozorniť na možnosť použitia princípu učenia pri optimálnom riadení kvázistacionárnych sústav. V ústave, v ktorom autor pracuje, sme overili globálnu metódu optimálneho riadenia sústav kvázistacionárnych stavov metódou učenia. Výsledky sú priaznivé, bude možné ju použiť v niektorých prípadoch aj v praxi.

(Došlo dňa 10. decembra 1965.)

LITERATÚRA

[1] Bush Robert R., Mosteller F.: Stochastic Models for Learning. John Willy and Sons, London 1955.

[2] Довгялло А. М.: Классификация и принципы построения обучающих машин. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Научный совет по кибернетике АН УССР, Киев 1963.

[3] Florentin J. J.: Optimal, Probing, Adaptive Control of Simple Bayesien System. J. Electron. and Control. First Series, August 1962, No. 2.

[4] Гельфанд И. М., Цетлин М. Л.: О некоторых способах управления сложными системами. Успехи математических наук *17* (1962), № 1.

[5] Глушков В. М.: Введение в кибернетику. Издательство АН УССР, Киев 1964.

[6] Глушков В. М.: Некоторые математические проблемы теории обучающихся автоматов. Труды 4-го Всесоюзного математического съезда. Том 2, стр. 587—594, АН СССР, Ленинград 1964.

[7] Иванов А. З., Круг Г. К.: Кушелев Ю. Н., Лецкий Э. К., Свечинский В. Б.: Обучающиеся системы управления. Сборник МЭИ, Москва 1962.

[8] Kiefer J., Welfowitz J.: Stochastic Estimitation of the Maximum of a Regresion Function ASME *23* (1952), 462—466.

[9] Pask G.: Teaching as a Control-engineering Process. Control *9*, No. 79—82.

[10] Petráš Š.: Učiace sa systémy automatického riadenia. Zborník „Problémy kybernetiky a mechaniky", NSAV, Bratislava 1965.

[11] Растригин Л. А.: О сходимости случайного поиска при экстремальном регулировании многопараметрических систем. Автоматика и телемеханика (1963), № 11.

[12] Принципы построения самообучающихся систем. Сборник работ. Государственное издательство технической литературы УССР, Киев 1962.

Learning Systems of Automatic Control

Štefan Petráš

The article defines the notion of learning and selflearning in automatic control. The process of learning is rated from the quantitative point of view by means of information theory. From the practical point of view it is essential to know the solution methods of learning systems of automatic control expressed by the algorithm of learning. The paper refers to some well-known algorithms of learning as well as to that suggested by the author having a prospect of successful solution. Some questions concerning the analysis of convergence solution and the dispersion of the target's random quantity are also referred to.

Doc. Ing. Štefan Petráš, CSc., Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava.