

Informationstheoretisch optimale Filter*

E.-G. WOSCHNI

Es ist bewiesen daß der erreichbare Nachrichtenfluß bei Dekodierung ohne Gedächtnis in linearen Systemen tatsächlich höher liegen kann als beim Wienerischen Optimalfilter.

1. EINLEITUNG

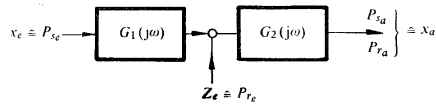
In einer bereits erschienenen Arbeit des Verfassers war der erreichbare Nachrichtenfluß bei Dekodierung ohne Gedächtnis in nicht korrigierten Systemen, ideal korrigierten Systemen sowie Systemen mit Wienerischen Optimalfiltern berechnet worden. Bereits in dieser Arbeit war die Vermutung geäußert worden, daß es Filter gibt, die einen größeren Nachrichtenfluß zu erreichen gestatten, als Systeme mit Wienerischen Optimalfiltern.

In vorliegender Arbeit wird daher das Problem der Optimierung unter Benutzung des Begriffes des Nachrichtenflusses im gedächtnislosen System beleuchtet. Zunächst wird gezeigt, daß die Problemstellung bei der Optimierung in der Meßtechnik und in der Regelungstechnik grundsätzlich die gleiche ist. Anschließend werden die verschiedenen Optimierungen (ideale Korrektur, minimaler Fehler, maximaler Nachrichtenfluß) behandelt. Dabei wird die optimale Übertragungsfunktion für das Filter mit maximalem Nachrichtenfluß (informationstheoretisch optimales Filter) in erster Näherung durch Einführen eines Variationsfaktors κ in die Optimalfilterfunktion des Wienerischen Optimalfilters ermittelt. Für ein Beispiel, ein reales Tiefpaßsystem (RC-Tiefpaß), wird der optimale κ -Wert ermittelt. Es zeigt sich, daß der erreichbare Nachrichtenfluß im gedächtnislosen System tatsächlich höher liegt, als beim Wienerischen Optimalfilter. Weiterhin werden für dieses Beispiel die Beziehungen mit einer frequenzabhängigen $\kappa(\omega)$ -Funktion auf dem Elektronenrechner programmiert und das Optimum ermittelt. Es ergibt sich eine weitere Vergrößerung des Nachrichtenflusses.

* Vortrag auf der zweiten Kybernetik-Konferenz, Prag 16. – 19. November 1965.

Bei den Systemen der Meßtechnik liegt im allgemeinen die in Bild 1 dargestellte Anordnung vor. Sie stimmt mit dem System in der Steuerungstechnik überein. In

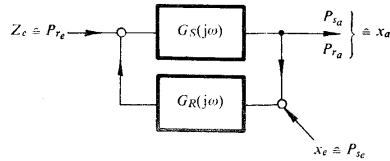
Bild 1. Zugrundegelegtes System in der Meßtechnik.



der Regelungstechnik dagegen entsteht stets ein geschlossener Regelkreis, wie in Bild 2 dargestellt ist.

Mit den bekannten Beziehungen der Regelungstechnik läßt sich jedoch das System

Bild 2. Zugrundegelegtes System in der Regelungstechnik, das sich auf das System des Bildes 1 zurückführen läßt.



des Bildes 2 in das des Bildes 1 überführen. Es ergeben sich nämlich folgende Zusammenhänge [1], [2]:

- a) Dem Frequenzgang zwischen Störung Z_e und Ausgang x_a , dem „Störungsfrequenzgang“ aus Bild 2

$$(1a) \quad G_{x_a, z_e} = \frac{G_S(j\omega)}{1 + G_S(j\omega) G_R(j\omega)}$$

entspricht in Bild 1

$$(1b) \quad G_{x_a, z_e} = G_2(j\omega).$$

- b) Dem Frequenzgang zwischen Nutz-Eingangsgröße x_e und Ausgangsgröße x_a , dem „Führungsfrequenzgang“ aus Bild 2

$$(2a) \quad G_{x_a, x_e} = \frac{G_S(j\omega) G_R(j\omega)}{1 + G_S(j\omega) G_R(j\omega)}$$

entspricht in Bild 1

$$(2b) \quad G_{x_a, x_e} = G_1(j\omega) G_2(j\omega).$$

Damit ist nachgewiesen, daß es fortan genügt, wenn wir uns mit dem System des Bildes 1 beschäftigen. Wie bei Betrachtungen in der Systemtheorie regelloser Größen üblich [3], werden wir fortan als Eingangs- und Ausgangsgrößen die Leistungsspektren des Signals $P_{s_e}(\omega)$, die Störung (Rauschen) $P_{r_e}(\omega)$ und die entsprechenden Ausgangsgrößen $P_{s_a}(\omega)$ und $P_{r_a}(\omega)$ benutzen (siehe Bild 1).

Die *Problemstellung* bei der Optimierung läßt sich unter Zugrundelegung der Systeme der Bilder 1 und 2 demnach wie folgt formulieren:

Die Ausgangsgröße x_a soll möglichst genau der Eingangsgröße x_e entsprechen (bzw. einer vereinbarten Operation von x_e)

$$(3a) \quad x_a \cong x_e,$$

dagegen soll x_a möglichst von den Störungen Z_e unabhängig sein

$$(3b) \quad x_a \neq f(Z_e).$$

3. OPTIMIERUNG

3.1 Normales, unkorrigiertes System

Zum Vergleich werden wir fortan stets auch das normale, unkorrigierte System mit gegebenem $G_1(j\omega)$ und bis zu einer Grenzfrequenz konstantem

$$G_2(j\omega) = \begin{cases} \text{konst für } \omega < \omega_g, \\ 0 & \text{für } \omega > \omega_g, \end{cases}$$

d.h. mit einem nachgeschalteten idealen Tiefpaßsystem annehmen.

3.2 Ideal korrigiertes System [1], [4]

Beide Forderungen (3a) und (3b) gleichzeitig exakt zu erfüllen, ist nicht möglich. Erfüllt man nur (3a) und läßt (3b) unberücksichtigt, so erhält man das ideal korrigierte System mit der Bedingung in $G_2(j\omega)^*$

$$(4) \quad G_2(j\omega) = \frac{1}{G_1(j\omega)}.$$

Dieser einfache Sonderfall einer Optimierung wird dann zweckmäßig sein, wenn die Störungen vernachlässigbar sind.

3.3 System mit Wienerschen Optimalfilter

Sind die Störungen nicht so klein, daß sie vernachlässigt werden können, so liegt

* Die Konstante ist gleich 1 gesetzt worden, was jedoch keine Einschränkung bedeutet, da sich die Konstante ohnehin später heraushebt (Normierung).

350 es nahe, zur Optimierung das Kriterium des kleinsten quadratischen mittleren Fehlers $\overline{\varepsilon^2}$ zu verwenden. Man fordert also

$$(5a) \quad \overline{|x_a - x_e|^2} = \overline{\varepsilon^2} \rightarrow \text{Min.}$$

Die Optimierung nach diesem Kriterium führt bekanntlich auf das Wiener'sche Optimalfilter. Der günstigste Frequenzgang $G_{20}(j\omega)$ ohne Berücksichtigung der Realisierung lautet in diesem Fall bekanntlich unter der Voraussetzung, daß Rauschen und Signal konstantes Spektrum $P_{r,0}$; $P_{s,0}$ besitzen und nicht miteinander korreliert sind [3]

$$(5b) \quad G_{20}(j\omega) = \frac{\mu |G_1(j\omega)|}{\mu |G_1(j\omega)|^2}.$$

Zur Abkürzung wurde dabei $\mu = P_{s,0}/P_{r,0}$ gesetzt. Das Filter nach (5b) gewährleistet, daß die Spektralanteile des Ausgangsspektrums stark geschwächt werden, bei denen das Rauschen überwiegt.

3.4. Informationstheoretisch optimales Filter

Man kann das System der Bilder 1 oder 2 auch als Informationsübertragungssystem auffassen und fordern, daß die übertragene Information ein Maximum wird. Falls man eine einfache Decodierung ohne Gedächtnis, die nur auf die Leistung anspricht, annimmt — in der Praxis liegt fast stets dieser Fall vor —, so muß man möglichst große Zahlen unterscheidbarer Leistungsstufen fordern, d.h.

$$(6a) \quad P_{S_a} \overline{\varepsilon^2} \rightarrow \text{Max},$$

wenn

$$P_{S_a} = \int_0^{\omega_g} P_{s_a}(\omega) d\omega$$

die gesamte Signalleistung bedeutet. Gl. (6a) kann auch aus der Transinformations-Entropie

$$(6b) \quad H(x; y) = R \approx \frac{1}{2} \text{ld} \left(1 + \frac{P_{S_a}}{\overline{\varepsilon^2}} \right)$$

gewonnen werden, wobei allerdings genau genommen für Signal und Fehler Gaussche Verteilung und fehlende Korrelation vorausgesetzt werden muß. Ersteres ist erfüllt, wenn die Eingangsgrößen gaussverteilt sind und die Systeme linear sind, letzteres ist wegen der vorhandenen Korrelation zwischen Fehler und Signal nie ganz erfüllt, so daß tatsächlich die Transinformations-Entropie sogar noch etwas größer ist.

Eine exakte Lösung, selbst für den einfachen Sonderfall konstanter Gausscher Eingangsspektren ohne Korrelation, ist noch nicht durchgeführt. Wir werden daher

versuchen, Näherungslösungen unter Benutzung einer Variation der Gl. (5b) für minimalen Fehler durchzuführen durch Einführen eines zu variierenden Faktors κ

$$(6c) \quad G_{2\text{inf.th.}} = \frac{\kappa \mu |G_1(j\omega)|}{1 + \kappa \mu |G_1(j\omega)|^2}.$$

Für $\kappa = 1$ erhält man also das Wiener-Filter, für $\kappa \rightarrow \infty$ das ideal korrigierte System.

4. Beispiel

Als Beispiel behandeln wir das praktisch besonders bedeutsame System mit Verzögerung 1. Ordnung

$$(7a) \quad G_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)}.$$

Wir berechnen für dieses System die jeweils auf die Signalleistung eines idealen Vergleichssystems der Bandbreite ω_0 d.h. $P_{s_{a0}} = P_{s_{a0}\omega_0}$ bezogenen (normierten) Leistungen (durch einen Stern gekennzeichnet); die bezogene Signalleistung $P_{s_a}^*$; die bezogene Rauschleistung $P_{R_a}^*$; die bezogene Verzerrungsleistung $P_{V_a}^*$; die bezogene Fehlerleistung $\bar{\epsilon}^{2*} = P_{R_a}^* + P_{V_a}^*$ und schließlich die auf die tatsächliche Signalleistung bezogene Leistung $\bar{\epsilon}^2/P_{s_a}$.

In Abhängigkeit von κ mit jeweils μ und ω_g/ω_0 als Parameter werden die sich ergebenden Leistungen wie in Bild 3 gezeigt aufgetragen, und daraus kann κ_{opt} für das informationstheoretisch optimale Filter ermittelt werden. Der Verlauf der Leistungen in Abhängigkeit von κ läßt sich leicht erklären, insbesondere wenn man beachtet, daß für $\kappa = 1$ das Wiener-Filter, für $\kappa \rightarrow \infty$ der ideal korrigierte Fall entsteht.

Wir bilden nun mit den sich ergebenden Werten für $P_{s_a}\sqrt{\bar{\epsilon}^2}$ den aus der Formel für die Transinformations-Entropie (6b) ableitbaren „erreichbaren Nachrichtenfluß in gedächtnislosen System \mathcal{J} “

$$\mathcal{J} \approx \omega_g \ln(1 + P_{s_a}\sqrt{\bar{\epsilon}^2})$$

und rechnen stets mit dem auf die Kanalkapazität eines Vergleichssystems bezogenen Wert

$$(7b) \quad \frac{\mathcal{J}}{C_t(\omega_0)} \approx \frac{\omega_g}{\omega_0} \frac{\ln(1 + P_{s_a}\sqrt{\bar{\epsilon}^2})}{\ln(1 + \mu)}.$$

Für unser Beispiel berechnen wir für die verschiedenen Optimierungen 3.1. bis 3.4. den Verlauf von (7b) in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz ω_g/ω_0 , wie es in [4] für die Fälle 3.1. bis 3.3. vorgeführt wurde, und tragen die Werte in Bild 4 auf. Man erkennt deutlich die Verbesserungen, die selbst gegenüber dem

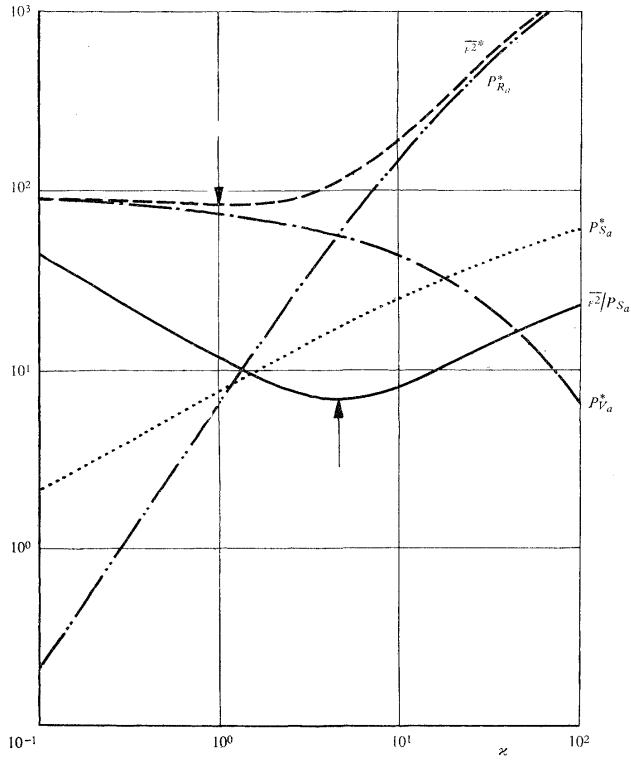


Bild3. Bezogene (normierte) Leistungen in Abhängigkeit von κ für $\mu = 10^2$; $\omega_g/\omega_0 = 10^2$ (\uparrow, \downarrow — Minimum der Kurve).

Wienerschen Optimalfilter mit dieser neuen Optimierungsmethode erreichbar sind.

Selbst die hier unter Zugrundelegung der unter 3.4., insbesondere Gl. (6c), abgeleiteten Methode erhaltenen Ergebnisse stellen jedoch nicht das absolute erreichbare Optimum dar. Um dies zu zeigen, wurde das Problem auf einem Elektronenrechner programmiert. Das gesamte Integrationsintervall wurde in 5 Teilintervalle aufgespalten und vom Rechner jeweils für diese Intervalle die optimalen κ -Werte durch gezieltes Probieren ermittelt. Die so erhaltenen Werte für den erreichbaren Nachrichtenfluß

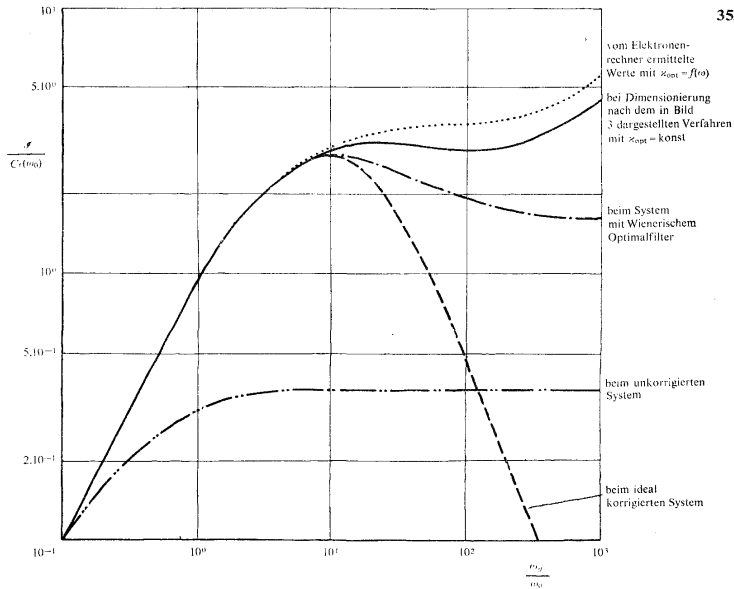


Bild 4. Normierter Nachrichtenfluß für $\mu = 10^2$ in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz ω_g/ω_0 des Systems.

(d.h. mit einer von ω abhängigen x -Funktion) wurden ebenfalls in das Bild 4 punktiert mit eingezeichnet. Auch diese Werte lassen sich natürlich durch Wahl kleinerer Intervalle noch etwas verbessern.

(Eingegangen am 27. Dezember 1965.)

LITERATUR

- [1] Woschni, E. - G.: Meßdynamik, eine Einführung in die Theorie dynamischer Messungen. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1964.
- [2] Oppelt, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim, Bergstraße 1960.
- [3] Schlitt, H.: Systemtheorie für regellose Vorgänge. Springer Verlag, Berlin 1960.
- [4] Woschni, E. - G.: Vergleichende Untersuchungen über den Nachrichtenfluß in normalen, nicht korrigierten Systemen, ideal korrigierten Systemen und Systemen mit Optimalfiltern. Archiv der elektrischen Übertragung 18 (1964), 725–731.

- 354 [5] Woschni, E. - G.: Informationstheoretische Optimierung von Übertragungssystemen mit idealen Filtern, jedoch endlicher Sperrdämpfung. Zeitschrift für Hochfrequenztechnik und Elektroakustik (im Druck).
- [6] Shannon, C. E.: The mathematical Theory of Communication. The University Illinois Press, Urbana 1949.

V Ý T A H

Informačně teoreticky optimální filtr

E.-G. WOSCHNI

Tato práce úzce navazuje na autorovu práci [4] týkající se porovnání rychlosti přenosu informace při použití dekódování bez paměti v nekorigovaných lineárních systémech, v ideálně korigovaných systémech a v systémech s optimálním filtrem ve smyslu Wienerovy teorie filtrace signálu v přítomnosti aditivního šumu.

V této práci se uvažuje o optimálním filtru ve smyslu informačně teoretickém, tj. o takovém filtru, který maximalizuje rychlost přenosu informace. V první aproximaci se přenosová charakteristika tohoto filtru počítá zavedením variačního faktoru κ v přenosové funkci Wienerova optimálního filtru. Výpočet optimální hodnoty faktoru κ je proveden v případě vstupního signálu s rovnoměrným energetickým spektrem předem filtrovaného dolní propustí (RC-filtrem). Ukazuje se, že za přítomnosti bílého šumu rychlost přenosu informace při použití dekódování bez paměti je pak v případě informačně teoreticky optimálního filtru skutečně vyšší než v případě Wienerova optimálního filtru. Další růst rychlosti tohoto přenosu byl dosažen tím, že variační faktor κ byl zvolen v závislosti na frekvenci. Optimum bylo vyhledáno pomocí počítače.

Prof. Dr. - Ing. habil. Eugen - Georg Woschni, Institut für Informationsverarbeitung und Rechenelektronik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62, 901 Karl-Marx-Stadt C 1. DDR.