KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 1/1965

Převod přenosů ze spojité Laplaceovy transformace do transformace Z

ANTONÍN TUZAR

V článku je popsána metoda výpočtu diskrétního přenosu obvodu odpovídajícího danému přenosu v Laplaceově transformaci. Metoda vychází ze souvislosti mezi impulsní odezvou obvodu a rozvojem diskrétního přenosu v řadu v záporných mocninách z a je vhodná k programování pro samočinný počítač.

Při navrhování korekčních členů pro číslicovou regulaci je zapotřebí znát přenosy regulovaných soustav v transformaci Z (viz např. [1], [2]). V tomto článku je ukázána jedna z možných metod výpočtu těchto přenosů, jestliže jsou známy přenosy v Laplaceově transformaci. Uvedený postup byl zpracován jako program pro samočinný počítač URAL 1 a lze jej patrně použít i pro jiné počítače. Vzhledem k tomu, že program byl sestaven s pohyblivou řádovou čárkou a počítač URAL 1 pracuje s pevnou čárkou, obsahoval program zhruba 1500 instrukcí. U počítače vybaveného instrukcemi s pohyblivou čárkou by rozsah daného programu klesl více než o polovinu. Okolnost, že program zaujímal mnoho místa v operační paměti, vedla také k omezení na jednoduché komplexní póly přenosu. Pro popisovanou metodu je charakteristické využití skutečnosti, že vzorky impulsní odezvy obvodu jsou rovny koeficientům rozvoje diskrétního přenosu v záporných mocninách z (srov. [3]). Dále se široce používá program pro dělení polynomů a výpočet zbytku při dělení. Ostatní odchylky od běžného postupu jsou patrné z následujícího podrobného popisu metody.

FORMULACE ÚLOHY

Je dán přenos spojité soustavy $W(p)$ ve tvaru:

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} r_i p^i}{\prod_{j=1}^{P} (p - \alpha_j)^{\nu_j} \prod_{k=1}^{Q} (p^2 + \lambda_k p + \vartheta_k)}, \tag{1}$$

kde r_i, α_j, λ_k, ϑ_k jsou reálná, ν_j, m, P, Q přirozená čísla; čísla α_j pro různá j a dvojice (λ_k, ϑ_k) pro různá k jsou různé a pro $k = 1, \ldots, Q$ platí

$$\lambda_k^2 - 4\vartheta_k < 0 .$$

Předpokládáme tedy, že kořeny jmenovatele jsou již vypočteny (program na výpočet kořenů je v knihovně standardních programů většiny samočinných počítačů) a že imaginární kořeny, pokud se vyskytnou, jsou jednoduché. Dále je dána perioda vzorkování $T > 0$. Je třeba určit přenos v transformaci Z tvaru

$$F^*(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M^*} b_k z^{-k}}{\sum_{l=0}^{N^*} a_l z^{-l}} \tag{2}$$

tak, aby vzorek odezvy na jednotkový impuls u spojité soustavy byl totožný s originálem k obrazu (2).

MATEMATICKÉ ZPRACOVÁNÍ

Výpočet bude sestávat z těchto etap:

a) určení vzorku spojité odezvy,

b) výpočet jmenovatele diskrétního přenosu,

c) výpočet čitatele diskrétního přenosu.

Následuje odvození a popis jednotlivých etap.

a) Výpočet vzorku odezvy

Upravíme nejprve vzorec (1). Zavedeme jiný zápis kořenových činitelů vztahem

$$p^2 + \lambda_j p + \vartheta_j = (p - f_j)^2 + g_j^2 \tag{3}$$

neboli

$$f_j = -\frac{\lambda_j}{2}, \qquad g_j = \sqrt{\left(\vartheta_j - \frac{\lambda_j^2}{4}\right)} . \tag{4}$$

Přenos (1) rozložíme na parciální zlomky

$$F(p) = \sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{\nu_j} \frac{K_{ij}}{(p - \alpha_j)^i} + \sum_{j=1}^{Q} \frac{M_j p + N_j}{(p - f_j)^2 + g_j^2} . \tag{5}$$

 Jednotlivým sčítancům odpovídají tyto originály:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K_{ij}}{(p-\alpha_j)^i}\right) = \frac{K_{ij}}{(i-1)!}\, t^{i-1} \,.\, e^{\alpha_j t}\,,$$

(6)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{M_j p + N_j}{(p-f_j)^2 + g_j^2}\right) = \left[M_j \cos g_j t + \frac{M_j f_j + N_j}{g_j} \sin g_j t\right] e^{f_j t}\,.$$

Ukážeme nyní, jak probíhá výpočet koeficientů K_{ij}, M_j, N_j. Poznamenejme nejprve o reálných kořenech toto: Je-li α_j kořen násobnosti v_j, potom, značí-li R, $\tilde{R}$, T, $\tilde{T}$ polynomy, V racionální funkcí, platí:

$$F(p) = \frac{R(p)}{(p-\alpha_j)^{v_j}\, T(p)} = \sum_{k=1}^{v_j} \frac{K_{kj}}{(p-\alpha_j)^k} + \frac{\tilde{R}(p)}{\tilde{T}(p)}\,,$$

$$F(p)\,(p-\alpha_j)^{v_j} = K_{v_j,j} + K_{v_j-1,j}(p-\alpha_j) + \ldots + K_{1,j}(p-\alpha_j)^{v_j-1} + V(p)\,.$$

Odtud je zřejmé, že pro $r = 0, 1, \ldots, v_j - 1$:

$$K_{v_j-r,j} = \frac{1}{r!}\,\frac{\mathrm{d}^r[F(p)(p-\alpha_j)^{v_j}]}{\mathrm{d}p^r}\bigg|_{p\to\alpha_j}\,.$$

(i) *Výpočet K_{1j} pro jednoduchý reálný kořen α_j.* V tomto případě

$$K_{1,j} = F(p)\,(p-\alpha_j)|_{p\to\alpha_j}$$

neboli

(7)
$$K_{1,j} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} r_k \alpha_j^k}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} (\alpha_j - \alpha_k)^{v_k} \prod\limits_{h=1}^{Q} (\alpha_j^2 + \lambda_h \alpha_j + \vartheta_h)}\,.$$

(ii) *Výpočet K_{ij} pro reálný kořen α_j násobnosti v_j.* (Zde je zahrnut i případ (i), kdy $v_j = 1$.)

Označme

(8)
$$F_j(p) = F(p)\,(p-\alpha_j)^{v_j}$$

a zaveďme novou proměnnou

(9)
$$q = p - \alpha_j\,.$$

Podle Taylorovy věty nyní dostaneme

$$F_j(q+\alpha_j) = F_j(\alpha_j) + \frac{F_j'(\alpha_j)}{1!}\,.\,q + \frac{F_j''(\alpha_j)}{2!}\,q^2 + \ldots\,.$$

Jestliže ve výrazu pro $F_j(q + \alpha_j)$ dělíme čitatele jmenovatelem, obdržíme mocninnou řadu v q:

$$F_j(q + \alpha_j) = G_0 + G_1 q + G_2 q^2 + \ldots ;$$

protože rozklad funkce v mocninnou řadu je jednoznačný (v oblasti, kde řada konverguje!), dostáváme srovnáním koeficientů rovnosti

$$G_k = K_{\nu_j - k, j} .$$

Odtud pravidlo pro výpočet $K_{r,j}$: Do výrazu $F_j(p)$ zavedeme q podle (9); máme

$$F_j(p) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} s_k q^k}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{P} (q + \alpha_j - \alpha_k)^{\nu_k} \cdot \prod\limits_{k=1}^{Q} [(q + \alpha_j - f_k)^2 + g_k^2]}, \tag{10}$$

kde

$$\sum_{k=0}^{m} s_k q^k = \sum_{k=0}^{m} r_k (q + \alpha_j)^k . \tag{11}$$

Výpočet s_k probíhá takto: Výraz na pravé straně v (11) označíme $\varphi(q + \alpha_j)$ a derivujeme jej; pro $q = 0$ je

$$\varphi(\alpha_j) = \sum_{k=0}^{m} r_k \alpha_j^k = s_0 ,$$

$$\varphi'(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{m} k r_k \alpha_j^{k-1} = 1!\, s_1 ,$$

$$\varphi''(\alpha_j) = \sum_{k=2}^{m} k(k-1)\, r_k \alpha_j^{k-2} = 2!\, s_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(h)}(\alpha_j) = h!\, s_h .$$

Výrazy na levé straně nejsnáze vypočteme podle Hornerova schématu:

$$\begin{array}{l|llllll}
\alpha_j & r_m & r_{m-1} & r_{m-2} & \ldots, & r_1 & r_0 \\
\hline
 & r_m, & r_m\alpha_j + r_{m-1}, & (r_m\alpha_j + r_{m-1})\,\alpha_j + r_{m-2}, & \ldots, & & \big|\,\varphi(\alpha_j) \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \Big|\,\dfrac{\varphi'(\alpha_j)}{1!} & \\
(12) & & & & & & \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & & & & \\
 & \Big|\,\dfrac{\varphi^{(m)}(\alpha_j)}{m!} & & & & &
\end{array}$$

 Výsledky Hornerova schématu jsou tedy přímo koeficienty s_h. Pro výpočet K_{ij} dělíme polynom s koeficienty s_h polynomem vzniklým vynásobením ve jmenovateli výrazu (10).

(iii) *Jednoduché komplexně sdružené kořeny.* Označme čitatele a jmenovatele $F(p)$ jako $B(p)$ a $A(p)$:

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}. \tag{13}$$

Kvadratický trojčlen odpovídající kořenům $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$ označme $D_k(p)$. Máme (A_k, B_k jsou polynomy, M_k, N_k reálné konstanty)

$$\frac{B}{A} = \frac{B}{A_k D_k} = \frac{B_k}{A_k} + \frac{M_k p + N_k}{D_k}. \tag{14}$$

Zaveďme ještě polynomy $\hat{B}_k$ a $\tilde{A}_k$ a konstanty ε_k, β_k, γ_k, δ_k definované vztahy

$$\frac{B}{D_k} = \hat{B}_k + \frac{\varepsilon_k p + \beta_k}{D_k}; \tag{15}$$
$$\frac{A_k}{D_k} = \tilde{A}_k + \frac{\gamma_k p + \delta_k}{D_k}.$$

Existence M_k, N_k, ε_k, β_k, γ_k, δ_k plyne z toho, že při dělení polynomu kvadratickým trojčlenem je zbytek při dělení polynom nejvýš prvého stupně.

Vynásobením druhé rovnosti v (14) součinem $A_k D_k$ dostáváme

$$B - (M_k p + N_k)\, A_k = B_k D_k$$

a po dosazení za B a A_k podle (15) do levé strany:

$$\hat{B}_k D_k + \varepsilon_k p + \beta_k - (M_k p + N_k)(\tilde{A}_k D_k + \gamma_k p + \delta_k) = B_k D_k .$$

Proto výraz $$\varepsilon_k p + \beta_k - (M_k p + N_k)(\gamma_k p + \delta_k)$$

je nutně dělitelný $D_k = p^2 + \lambda_k p + \vartheta_k$. Máme

$$\varepsilon_k p + \beta_k - (M_k p + N_k)(\gamma_k p + \delta_k) =$$
$$= -\gamma_k M_k p^2 - (N_k \gamma_k + M_k \delta_k - \varepsilon_k)\, p - (N_k \delta_k - \beta_k).$$

Musí tedy platit

$$\begin{aligned} N_k \gamma_k + M_k \delta_k - \varepsilon_k &= \gamma_k M_k \lambda_k , \\ N_k \delta_k - \beta_k &= \gamma_k M_k \vartheta_k \end{aligned} \tag{16}$$

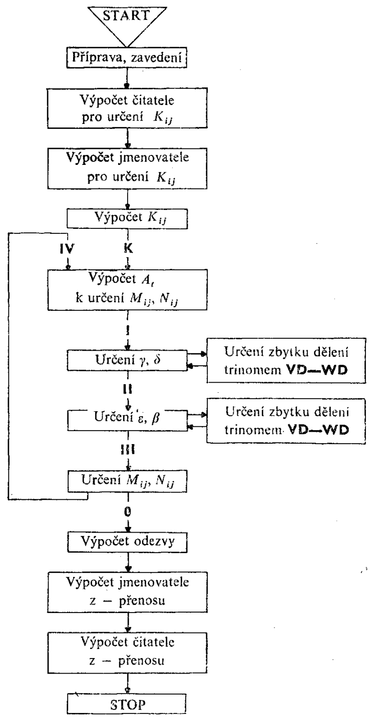
a odtud

$$M_k = \frac{\varepsilon_k \delta_k - \beta_k \gamma_k}{\delta_k^2 - \gamma_k \lambda_k \delta_k + \gamma_k^2 \vartheta_k}, \tag{17}$$
$$N_k = \frac{\delta_k \beta_k - \gamma_k \lambda_k \beta_k + \gamma_k \vartheta_k \varepsilon_k}{\delta_k^2 - \gamma_k \lambda_k \delta_k + \gamma_k^2 \vartheta_k^2},$$

přičemž ε_k, β_k jsou koeficienty zbytku při dělení B/D_k; stejně γ_k a δ_k vzniknou dělením A_k/D_k.

Zbytky při dělení vypočteme nejsnáze metodou dělení polynomů, uvedenou v [4]; polynom A_k je třeba vždy počítat zvlášť.

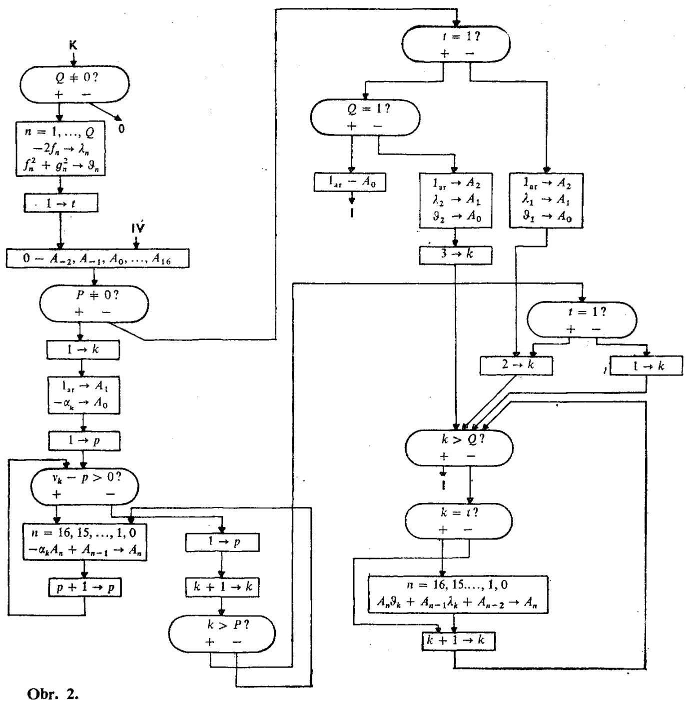
Vzorek odezvy snadno již spočteme sečtením výrazů podle (6).



Obr. 1.

b) Výpočet jmenovatele diskretního přenosu

Je známo, že jednotlivým činitelům spojitého přenosu odpovídají sčítanci diskretního přenosu podle následujících pravidel ($R(z)$ značí polynom v z, který nepotřebu-



Obr. 2.

jeme znát)

$$\frac{1}{p - \alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{z - e^{+\alpha_i T}}$$

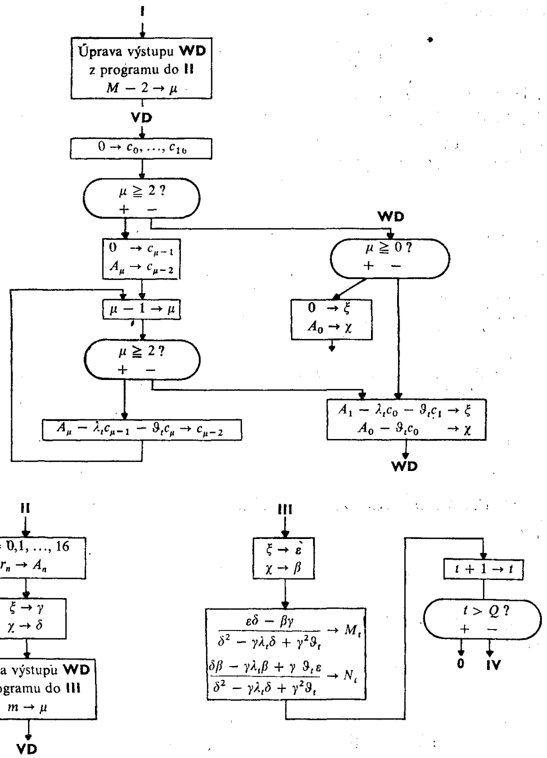
$$\frac{1}{(p - b)^2 + a^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R(z)}{z^2 - \left(e^{(b+a)T} + e^{(b-a)T}\right) z + e^{2bT}} =$$

$$= \frac{R(z)}{z^2 - 2e^{bT} \cos aT \,.\, z + e^{2bT}} \,.$$

Postupným vynásobením jmenovatelů dostáváme tedy výsledek

$$\sum_{k=0}^{N^*} a_{N^*-k} z^k \,.$$

Hledáme čitatele tvaru $\sum_{k=0}^{M^*} b_{M^*-k} z^k$.



Obr. 3.

Označíme-li body odezvy x_n, můžeme napsat

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^{M^*} b_{M^*-k} z^k}{\sum_{k=0}^{M^*} a_{M^*-k} z^k} = \frac{\sum_{k=k}^{M^*} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M^*} a_k z^{-k}}$$

neboli

$$\sum_{k=0}^{M^*} b_k z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_n z^{-n}\right) . \left(\sum_{k=0}^{M^*} a_k z^{-k}\right) . \tag{18}$$

Porovnáním koeficientů pak dostaneme:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} x_k a_{n-k} \quad (n = 0, 1, \ldots, M^*) . \tag{19}$$

Tím jsou vypočteny všechny požadované koeficienty. Výpočet lze programovat přesně v témž sledu, jak byl popsán. Pro ilustraci je ještě uvedeno hrubé blokové schéma programu (obr. 1) a podrobné blokové schéma výpočtu koeficientů parciálních zlomků odpovídajících jednoduchým komplexním pólům (obr. 2 a 3).

(Došlo dne 13. listopadu 1964.)

LITERATURA

[1] Cypkin Ja. Z.: Teorija linejnych impulsnych sistem. Moskva 1961.

[2] Strejc V.: Regulace a řízení samočinnými číslicovými počítači, část I — Základní teoretické vztahy. Výzk. zpráva ÚTIA ČSAV č. 76. Praha 1960.

[3] Weiss J.: Výpočet obrazu v transformaci Z z průběhu originálu. Automatizace (1963), č. 3, 58—60.

[4] Tuzar A.: Metoda pro numerický výpočet podílu polynomů a mocninných řad. Výzk. zpráva ÚTIA ČSAV č. 83. Praha 1961.

SUMMARY

Transformation of the Laplace Transfer Function into the Discrete Transfer Function

ANTONÍN TUZAR

A method of computation of discrete transfer function (2) is described, provided if the Laplace transfer function (1) of the system is known. The treatment is based on the relation between the system impulse response and the expansion of the transfer function into the power series at z^{-1} as shown in [3]. The values of the response at sampling instants are computed according to relations (6). The transfer function (1) is further expanded into partial fractions (5). The subprogram for dividing polynomials and for computing the rest of the division is employed for this operation. The denominator of the discrete transfer function is then equal to the product of the denominators of the fractions (18), the coefficients of the numerator can be obtained by means of (19) in the form (20). According to this method a program for the computer Ural 1 has been developed. Its block-schema is in Fig. 1.

Antonín Tuzar, prom. mat., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2 - Nové Město.