KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 1/1965

Anwendungen der Theorie der optimalen Regelung nichtabbrechender Diffusionsprozesse

PETR MANDL

In der vorliegenden Arbeit wird an konkreten Beispielen die praktische Anwendung der in [4] und [5] entwickelten Theorie der Regelung von nichtabbrechenden Diffusionsprozessen dargestellt und mit der Regelung abbrechender Prozesse verglichen.

Eindimensionaler homogener Diffusionsprozess im endlichen Intervall $I = \langle r_0, r_1 \rangle$ ist ein Zufallsprozess, $X(t)$ welcher sich im Innern von I als die Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\, X(t)}{\mathrm{d}t} = b(X(t)) + \sqrt{[2a(X(t))]}\, \xi(t)$$

benimmt. Hier $a(x)$, $b(x)$ sind stetige Funktionen auf I, $a(x) > 0$. $b(x)$ wird Koeffizient der lokalen Verschiebung, $a(x)$ Diffusionskoeffizient genannt. $\xi(t)$ ist weißes Rauschen, dessen Spektraldichte gleich eins vorausgesetzt wird. Erreicht $X(t)$ eine der Grenzen von I, so kann der Prozess abbrechen, oder sind verschiedene Typen der Fortsetzung von $X(t)$ möglich. Im Folgenden wird nur der Fall vorkommen, daß nach der Erreichung der Grenze r_i, $i = 0, 1$, $X(t)$ in einem zufälligen Punkt wieder seinen Anfang nimmt. Der Punkt sei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_i(x)$ verteilt. $f_i(x) = \delta(x - x_i)$, wo $\delta(x)$ die Diracsche Funktion ist, bedeutet, daß $X(t)$ nach der Erreichung von r_i jedesmal im Punkt x_i fortsetzt.

1. Um ein konkretes Problem vor Augen zu haben, betrachten wir die auf Bild 1 schematisch gezeichnete Anlage A. Auf einem Stadium der Produktion wird eine Flüssigkeit F erzeugt und zwar nicht ganz regelmässig mit der Intensität gleich einer Menge μ pro Zeiteinheit, sondern mit einer Intensität, welche zufälligen Schwankungen unterworfen ist. Die Schwankungen sollen mit genügender Annäherung die Form $\sqrt{(2D)}\, \xi(t)$ besitzen. Dagegen der weitere Produktionsprozess erfordert regelmäßigen Zufluß einer Menge μ von F pro Zeiteinheit. Man hat also den Regulationsbehälter R mit der Pumpe zum Hauptbehälter P in die Leitung eingegliedert. Die

Einheiten seien so gewählt, daß $\mu = 1$ und daß das Volumen von R gleich zwei ist. Die Gesamtmenge von F welche R verlassen hat, kann also die Rolle des Zeitparameters spielen. Es sei $X(t)$ die Größe um welche der Zustand von F im R vom

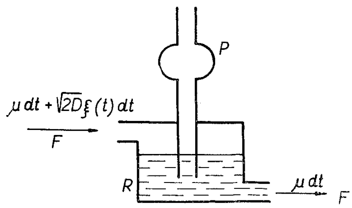

Bild 1.

Werte 1 abweicht. $X(t)$ bewegt sich im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$. Die Arbeitsleistung von P sei dem Werte von $X(t)$ proportional. Dann erfüllt $X(t)$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = -h\, X(t) + \sqrt{(2D)}\, \xi(t),$$

wo h, D positive Konstanten sind. Wird R ganz voll oder leer d.h. $X(t) = \pm 1$, so wird die Produktion aufgehalten, der Zustand im R wird gleich eins gemacht und die Produktion wieder fortgesetzt. Es ist also $f_i(x) = \delta(x)$.

Betrachten wir durchschnittliche Kosten, welche in der Anlage A auf eine Einheitsmenge von F entstehen. Die durch Aufhalten der Produktion und Einstellen des Zustandes 1 im R verursachten Kosten seien N. Die Ausgaben auf P seien der Leistung proportional. $\Theta(t)$ bezeichne die Kosten die bei der Produktion der ersten t Einheiten von F in A entstanden und $E(t)$ die Anzahl der dabei erfolgten Produktionsunterbrechungen. Man hat, da die Leistung von P proportional $X(t)$ ist,

$$\Theta(t) = k \int_0^t |X(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + N E(t).$$

Der Grenzwert

$$\Theta = \lim_{t \to \infty} t^{-1}\, \Theta(t)$$

stellt die durchschnittlichen Kosten in der Anlage A dar.

Wir kehren jetzt dem allgemeinen am Anfang definierten Diffusionsprozess zu und formulieren einen Satz, der die Berechnung von Θ ermöglicht. Wir setzen voraus, daß die Ausgaben durch drei Funktionen $c(x)$, $v_0(x)$ und $v_1(x)$ definiert sind. Dabei $c(x)$ soll stetig in I sein und es soll

$$\int_{r_0}^{r_1} |v_i(x)|\, f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty, \quad i = 0, 1,$$

gelten. Nimmt $X(t)$ für die Zeit $\mathrm{d}t$ den Wert x an, so entsteht die Ausgabe $c(x)\,\mathrm{d}t$. Dieser Teil der Kosten ist also bis zur Zeit t gleich $\int_0^t c(X(\tau))\,\mathrm{d}\tau$. Erreicht $X(t)$ die Grenze r_i und beginnt wieder im Punkt x, so wird die Ausgabe $v_i(x)$ verursacht. Die durchschnittlichen Kosten pro Zeiteinheit Θ werden durch folgenden Satz charakterisiert.

Satz 1. *Θ ist die einzige Zahl, für welche die Gleichung*

$$a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w + b(x)\,w - \Theta + c(x) = 0\,, \tag{1}$$

eine Lösung $w(x)$, die die Bedingungen

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(\int_{r_0}^{x} w(s)\,\mathrm{d}s + v_0(x)\right)f_0(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{2}$$

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(\int_{x}^{r_1} w(s)\,\mathrm{d}s - v_1(x)\right)f_1(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{3}$$

erfüllt, besitzt.

Wir setzen

$$Q(x) = \exp\int_{r_0}^{x} b(s)\,a(s)^{-1}\,\mathrm{d}s\,.$$

Jede Lösung der Gleichung (1) hat die Form

$$Q(x)^{-1}\int_{r_0}^{x} a(s)^{-1}\,Q(s)\,(c(s) - \Theta)\,\mathrm{d}s + kQ(x)^{-1}\,. \tag{4}$$

Das Einsetzen von (4) in (2) (3) ergibt zwei lineare Gleichungen, durch welche die Unbekannten, k, Θ, eindeutig bestimmt sind.

Wir berechnen Θ für die oben beschriebene Anlage A. Die Gleichung (1) und die Bedingungen (2), (3) haben die Form

$$D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w - hxw - \Theta + k|x| = 0\,,$$

$$\int_{-1}^{0} w(s)\,\mathrm{d}s = -N\,,\quad \int_{0}^{1} w(s)\,\mathrm{d}s = N\,.$$

Da aus der Symmetrie folgt $w(0) = 0$, so findet man leicht

$$\Theta = D\left[\int_0^1 e^{\bar{h}x^2}\int_0^x e^{-\bar{h}y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right]^{-1}\left[N + \frac{k}{h}\left(\int_0^1 e^{\bar{h}x^2}\,\mathrm{d}x - 1\right)\right]$$

mit $\bar{h} = h/(2D)$.

Naheliegend ist jetzt die Frage, ob sich die Kosten in der Anlage A vermindern, wenn man für die Leistung von P eine andere als lineare Funktion wählt. Es sei

$\langle -\omega, \omega\rangle$ das Intervall, wo sich die Leistung von P, welche den Parameter der Regelung z darstellt, bewegen kann. Eine Regelung ist eine stetige Funktion $z(x)$, welche den Wert von z angibt, wenn der Zustand im R um x vom mittleren Zustand eins abweicht. Die Differentialgleichung für $X(t)$ hat dann die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = - z(X(t)) + \sqrt{(2D)}\, \xi(t)$$

und die entsprechende Kostenfunktion ist $c(x) = kz(x)$.

Im allgemeinen Fall formuliert sich das Problem der Regelung folgendermaßen. Es sind drei stetige Funktionen $a(x, z) > 0$, $b(x, z)$, $c(x, z)$ für $x \in I$, $z \in J = \langle z_0, z_1\rangle$ angegeben. Durch die Wahl einer Regelung $z(x)$ entsteht ein Prozess, welcher die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\, X(t)}{\mathrm{d}t} = b(X(t), z(X(t))) + \sqrt{[2a(X(t), z(X(t)))]}\, \xi(t)$$

erfüllt. Die Ausgaben sind durch die Funktionen $c(x, z(x))$, $v_0(x)$, $v_1(x)$ beschrieben. Jeder Wahl einer Regelung entsprechen durchschnittliche, durch den Verlauf des Prozesses verursachte, Kosten. Das Infimum dieser Kosten über alle möglichen Regelungen sei mit $\hat{\Theta}$ bezeichnet. $\hat{\Theta}$ läßt sich mit Hilfe vom Satz 2 bestimmen.

Satz 2. *$\hat{\Theta}$ ist die einzige Zahl, für welche die Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + \min_{z \in J} a(x, z)^{-1} \left[b(x, z)\, w - \hat{\Theta} + c(x, z)\right] = 0 \tag{5}$$

eine, den Bedingungen (2), (3) *genügende, Lösung* $w(x)$ *besitzt.*

Die Funktion $\hat{z}(x)$ die solche Werte annimmt, für welche $a(x, z)^{-1} \left[b(x, z)\, w(x) - \hat{\Theta} + c(x, z)\right]$ minimal ist, braucht nicht stetig sein. Ist $\hat{z}(x)$ stetig, so folgt aus Satz 1, daß $\hat{z}(x)$ eine optimale Regelung ist. Wir bezeichnen

$$\Phi(x, w; \hat{\Theta}) = -\min_{z \in J} a(x, z)^{-1} \left[b(x, z)\, w - \hat{\Theta} + c(x, z)\right].$$

Dann läßt sich (5) als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w = \Phi(x, w; \hat{\Theta}), \tag{6}$$

schreiben.

Untersuchen wir jetzt $\hat{\Theta}$ für die Anlage A. Man hat $I = \langle -\omega, \omega\rangle$, $a(x, z) \equiv D$, $b(x, z) = z$, $c(x, z) = k|z|$. Folglich

$$\Phi(x, w; \hat{\Theta}) = \begin{cases} D^{-1}[\omega(w - k) + \hat{\Theta}] & \text{für } w \geqq k, \quad \hat{z}(x) = -\omega, \\ D^{-1}\hat{\Theta} & \text{für } |w| \leqq k, \quad \hat{z}(x) = 0, \\ D^{-1}[\omega(-w - k) + \hat{\Theta}] & \text{für } w \leqq -k, \quad \hat{z}(x) = \omega. \end{cases} \tag{7}$$

Ferner (2), (3) gibt

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = N = -\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Aus der Symmetrie folgt $w(0) = 0$. Wir werden $w(x)$ für $x \in \langle 0, 1\rangle$ untersuchen Wir setzen $\bar{\Theta} = D^{-1}\hat{\Theta}$, $\bar{\omega} = D^{-1}\omega$. Aus (6) und (7) bekommt man

$$w(x) = \bar{\Theta}x \quad \text{für} \quad x \in \langle 0, k/\bar{\Theta}\rangle\,,$$

$$w(x) = k - \bar{\Theta}/\bar{\omega} + (\bar{\Theta}/\bar{\omega})\,e^{\bar{\omega}(x-k/\bar{\Theta})} \quad \text{für} \quad x \geqq k/\bar{\Theta}\,.$$

Ist $k/\bar{\Theta} \geqq 1$, so hat man

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\bar{\Theta} = N\,.$$

Also $k \geqq 2N$. In diesem Fall ist die Benutzung von P nicht einträglich. Ist $k < 2N$, so ergibt sich $\bar{\Theta}$ aus der Gleichung

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = k^2/(2\bar{\Theta}) + (k - \bar{\Theta}/\bar{\omega})(1 - k/\bar{\Theta}) +$$

$$+ (\bar{\Theta}/\bar{\omega}^2)(e^{\bar{\omega}(1-k/\bar{\Theta})} - 1) = N\,.$$

Die optimale Regelung ist für $|X(t)| < k / \bar{\Theta}\; P$ zu ausschalten und beim Durchgang von $X(t)$ durch $\pm\, k / \bar{\Theta}\; P$ so schnell wie möglich auf die höchste Leistung in Betrieb zu setzen.

Wir werden jetzt voraussetzen, daß die Kosten für den Betrieb von P nicht der Leistung, sondern ihrem Quadrat proportional sind, d.h. $c(x, z) = kz^2$. Man findet, daß dann ist

$$\Phi(x, w; \hat{\Theta}) = w^2 / 4kD + \hat{\Theta} / D \quad \text{für} \quad |w| \leqq 2k\omega\,.$$

Dabei ist

(8) $$\hat{z}(x) = -w(x) / (2k)\,.$$

Man bekommt aus (6) und der Bedingung $w(0) = 0$

(9) $$w(x) = 2D^{-1}\sqrt{(\hat{\Theta}/k)}\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{2}D^{-1}\sqrt{(\hat{\Theta}/k)}x)\,.$$

Folglich

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = -4\ln\cos\,(\tfrac{1}{2}D^{-1}\sqrt{(\hat{\Theta}/k)}) = N\,,$$

(10) $$\hat{\Theta} = k[2D\arccos\,(e^{-N/4})]^2\,.$$

Die Bedingung $|w| \leqq 2k\omega$ ist erfüllt, wenn $\arccos\,(e^{-N/4}) \leqq \eta$ ist. Hier ist η die Lösung der Gleichung $\eta\,\mathrm{tg}\,\eta = \tfrac{1}{2}k\omega$. Dann ist die optimale Regelung für alle x durch (8) und (9) gegeben.

2. Als zweites Beispiel wird die Regelung eines Verzweigungsprozesses dienen. Betrachten wir eine Kultur von Mikroorganismen in einem Gefäß. Es sei $X(t)$ die Dichte (oder das Gesamtgewicht) der Mikroorganismen in der Nahrlösung. In einfachen Fällen gibt die Voraussetzung, daß $X(t)$ der Differentialgleichung

$$\text{(11)} \qquad \frac{\mathrm{d}\, X(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\, X(t) + \sqrt{(2\alpha\, X(t))}\, \xi(t)$$

genügt, ein befriedigendes mathematisches Modell der Kultivation. Hier α, β sind Konstanten, $\alpha > 0$ ([1]). Aus (11) folgt, daß β den mittleren relativen Zuwachs von $X(t)$ darstellt. Wir werden $\beta \geqq 0$ voraussetzen.

Die Kultivation soll fogendermaßen verlaufen. Erreicht die Dichte der Kultur die Größe r_1, so wird der Prozess beendet und entsteht ein Erzeugniss, das den Wert N_1 besitzt. Erreicht dagegen $X(t)$ eine Grenze $r_0 > 0$, d.h. die Verdünnung wird so groß, daß man von einer Degeneration der Kultur sprechen kann, so beginnt man mit einer neuen Kultur welche die Anfangsdichte $\varrho, r_0 < \varrho < r_1$, besitzen soll. Die Kosten der Einsetzung einer neuen Kultur seien N_0.

Setzen wir voraus, daß sich der mittlere relative Zuwachs β durch Einführung vom zusätzlichen Nährstoff Z um die Größe z $z \in \langle 0, \omega \rangle$ steigern läßt. Dabei sei das Resultat der eingeführten Menge von Z im folgenden Sinne proportional. Um β um z während der Zeit $\mathrm{d}t$ zu vergrößern, muß man die Menge $k_0 z\, X(t)\, \mathrm{d}t$ in derselben Zeit einliefern. Die entstandenen Kosten seien $kz\, X(t)\, \mathrm{d}t$. Wir stellen uns die Frage, wie man den Zufluß von Z regeln soll, um die Kultivation mit niedrigsten Kosten durchzuführen. In den im Punkt 1 erklärten Bezeichnungen haben wir

$$a(x, z) = \alpha x\,, \quad b(x, z) = (\beta + z)\, x\,, \quad c(x, z) = k\, xz\,.$$

Da wir auch die einmalige Herstellung der Kultur untersuchen wollen, so modifizieren wir die Bedingungen unter welchen Sätze 1, 2 abgeleitet wurden. Wir setzen voraus:

A. Nach der Erreichung der Grenze r_1 bricht der Prozess ab und es entstehen die Kosten N_1. Nach der Erreichung der Grenze r_0 beginnt der Prozess mit der Anfangsdichte $f_0(x)$ und Kostenfunktion $v_0(x)$.

B. Der Prozess bricht auf beiden Grenzen ab. Die Kosten sind N_0 auf r_0, N_1 auf r_1.

Der Fall B wurde eingehend auch für mehrdimensionale und inhomogene Diffusionsprozesse in den Arbeiten [2], [3], analysiert. Die Arbeit [6] verallgemeinert die Resultate von [2] in der Richtung, daß man ein allgemeines Verhalten des Prozesses auf den Grenzen zuläßt.

Da unter den Bedingungen A, B, der Prozess mit Sicherheit in einem (zufälligen) Zeitmoment τ abbricht, so sind die erwarteten Gesamtkosten bis zu dieser Zeit vom Interesse. Sie hängen von der Anfangslage $X(0) = x$ des Prozesses ab und werden mit $u(x)$ bezeichnet. Ein Analogon zu Satz 1 ist Satz 3.

Satz 3. *Man hat*

$$u(x) = N_1 + \int_x^{r_1} w(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

wo $w(x)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$a(x) \frac{d}{dx} w + b(x) w + c(x) = 0$$

ist, welche im Falle A der Bedingung

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(\int_{r_0}^{x} w(s) \, ds + v_0(x) \right) f_0(x) \, dx = 0 \,, \tag{12 A}$$

im Falle B der Bedingung

$$\int_{r_0}^{r_1} w(s) \, ds = N_0 - N_1 \tag{12 B}$$

genügt.

Das Infimum von $u(x)$ über alle möglichen Regelungen wird mit $\hat{u}(x)$ bezeichnet. Satz 2 entspricht folgender Satz.

Satz 4. *Man hat*

$$\hat{u}(x) = N_1 + \int_{x}^{r_1} w(s) \, ds \,,$$

wo $w(x)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dx} w + \min_{z \in J} a(x, z)^{-1} \left[b(x, z) w + c(x, z) \right] = 0 \tag{13}$$

ist, welche den Bedingungen (12 A), *bzw.* (12 B) *genügt.*

Über die Funktion $\hat{z}(x)$ läßt sich dieselbe Bemerkung wie nach Satz 2 machen.

Wenden wir jetzt den Satz 4 auf das oben formulierte Problem der Kultivation von Mikroorganismen an. Man hat

$$I = \langle 0, \omega \rangle \,, \quad a(x, z) = \alpha x \,, \quad b(x, z) = (\beta + z) \, x \,,$$

$$c(x, z) = kxz \,, \quad f_0(x) = \delta(x - \varrho) \,, \quad v_0(\varrho) = N_0 \,.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\alpha = 1$ voraussetzen. Die Einsetzung in (13) und (12 A) ergibt

$$\frac{d}{dx} w = -(\omega + \beta) w - \omega k \quad \text{für} \quad w \leqq -k, \; \hat{z}(x) = \omega \,,$$

$$\frac{d}{dx} \omega = -\beta w \quad \text{für} \quad w \geqq -k, \; \hat{z}(x) = 0 \,,$$

$$-\int_{r_0}^{\varrho} w(s) \, ds = N_0 \,. \tag{14}$$

Bezeichnen wir mit y den Punkt in welchem $w(y) = -k$ ist. Dann y ist die Dichte von Mikroorganismen bei der die Einführung von Z ausgeschaltet werden soll. Man hat

$$w(x) = -\frac{\omega k}{\beta + \omega} - \frac{\beta k}{\beta + \omega} e^{-(\beta+\omega)(x-y)} \quad \text{für} \quad x \leqq y\,,$$

$$w(x) = -ke^{-\beta(x-y)} \quad \text{für} \quad x \geqq y\,.$$

Setzen wir voraus, daß $r_0 < y < \varrho$ ist. Die Gleichung (14) für die Bestimmung von y ist dann

$$(15)\quad \frac{\beta k}{(\beta+\omega)^2}\left[e^{(\beta+\omega)(y-r_0)} - 1\right] + \frac{\omega k}{\beta+\omega}(y - r_0) + \frac{k}{\beta}\left[1 - e^{-\beta(\varrho-y)}\right] = N_0\,.$$

Bezeichnen wir den Wert des Ausdruckes auf der rechten Seite von (15) für $y = r_0$ durch A, für $y = \varrho$ durch B. Ist $A < N_0 < B$, so ist tatsächlich $r_0 < y < \varrho$. Ist $N_0 \leqq A$, so ist die Regelung $\hat{z}(x) \equiv 0$ optimal d.h. die zusätzliche Nährung ist nicht einträglich. Die Ungleichung $N_0 > B$ zieht nach sich $y > \varrho$. (14) wird dann

$$(16)\quad \frac{\beta k}{(\beta+\omega)^2} e^{(\beta+\omega)y}\left[e^{-(\beta+\omega)r_0} - e^{-(\beta+\omega)\varrho}\right] + \frac{\omega k}{\beta+\omega}(\varrho - r_0) = N_0\,.$$

Besitzt (16) in (ϱ, r_1) keine Lösung, so ist $\hat{z}(x) \equiv \omega$ die optimale Regelung.

Betrachten wir jetzt die wiederholte Herstellung von Kulturen die wir mit geringsten Kosten durchführen wollen. Aus Satz 2 bekommt man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + (\omega + \beta)\, w = \omega k + \hat{\Theta} x^{-1} \quad \text{für} \quad w \leqq -k,\ \hat{z}(x) = \omega\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + \beta w = \hat{\Theta} x^{-1} \quad \text{für} \quad w \geqq -k,\ \hat{z}(x) = 0\,,$$

$$(17)\quad \int_{r_0}^{\varrho} w(s)\,\mathrm{d}s = -N_0\,, \quad \int_{\varrho}^{r_1} w(s)\,\mathrm{d}s = N_1\,.$$

Man kann wie im vorhergehenden Absatze fortschreiten. Die beiden Gleichungen (17) sind linear für $\hat{\Theta}$. Die Elimination von $\hat{\Theta}$ führt zu einer transzendenten Gleichung für den Umschaltungspunkt y.

(Eingegangen am 26. Mai 1964.)

LITERATUR

[1] W. Feller: Diffusion processes in genetics. Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. (1951), 227—246.

[2] W. H. Fleming: Some markovian optimisation problems. J. of Math. and Mech. 12 (1963), 131—140.

[3] И. В. Гирсанов: Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов. ДАН СССР 136 (1961), 761–764.

[4] P. Mandl: On optimal control of a nonstopped diffusion process. Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. G. (im Druck).

[5] П. Мандл: Об управлении необрывающимися диффузионными процессами. Теория вероятностей и ее прим. 9 (1964), 644–669.

[6] P. Mandl: O optimálním řízení jednorozměrných difusních procesů. Aplikace matematiky 9 (1964), 412–420.

VÝTAH

Použití teorie optimálního řízení nepřetržitých difúzních procesů

PETR MANDL

Práce je věnována optimálnímu řízení veličiny $X(t)$, která se uvnitř intervalu $I = \langle r_1, r_2 \rangle$, chová jako řešení diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\,X(t)}{\mathrm{d}t} = b(X(t)) + \sqrt{[2a(X(t))]}\,\xi(t)\,,$$

kde $\xi(t)$ je bílý šum. Řízení spočívá v upravování koeficientů a, b v závislosti na hodnotě řízené veličiny. Po dosažení hranic proces začne znovu v některém z vnitřních bodů intervalu I.

S veličinou $X(t)$ jsou spojeny náklady, které závisí jednak na jejím průběhu v I, jednak na počtu obnovení procesu po dosažení hranic. Cílem řízení je minimalizace průměrných nákladů na jednotku času. Na příkladě regulační nádrže s čerpadlem a na příkladě dodávání živných látek kultuře mikroorganismů je vyjasněna formulace úlohy a vyloženo praktické použití teorie, obsažené v autorových pracích [4], [5]. Pro srovnání je také rozebrán případ, kdy se proces $X(t)$ po dosažení hranice zastaví.

Petr Mandl, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.