KYBERNETIKA — VOLUME *16* (1980), NUMBER 5

Quantil-artige Ungleichungen für die Systemzuverlässigkeit

ELKE WARMUTH, WALTER WARMUTH

Ausgehend von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\mathsf{P}(X_1/(X_1 + X_2) \geqq \mathsf{E}X_1 : (\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)) = p$ werden Schranken für die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$ abgeleitet. Die Ergebnisse sind für die Konstruktion von Konfidenzschranken und Tests für $\mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)$ und Konfidenzschranken für $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$ in einer großen Klasse von Lebens- und Reparaturdauern bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen geeignet.

Ein Maß für die Effektivität eines reparierbaren Systems mit zufälligen unabhängigen Lebens- und Reparaturdauern X_1 bzw. X_2 (F_1 bzw. F_2 sind die entsprechenden Verteilungsfunktionen) ist die *stationäre Verfügbarkeit*

$$A = \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)\,.$$

Konfidenzschranken und Tests für A gaben [8] für exponentialverteilte X_1, X_2, [3] und [4] für exponentialverteilte X_1 und log-normalverteilte X_2 (bei bekannter Varianz von $\log X_2$) an.

Im Abschnitt 1 werden wir die $p(F_1, F_2)$-Quantile mit

$$p(F_1, F_2) = \mathsf{P}(X_1/(X_1 + X_2) \geqq \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2))$$

charakterisieren. Hiervon ausgehend wurden in [2] Konfidenzschranken und Tests für A in einer großen Klasse von Lebens- und Reparaturdauern gefunden.

Es gibt eine umfangreiche Literatur, die Konfidenzschranken für $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$ in einigen Spezialfällen angibt. Ist X_1 die Belastbarkeit und X_2 die Belastung eines Systems, so interessieren insbesondere zur Durchführung beschleunigter Versuche untere Schranken dieser Wahrscheinlichkeit. Im Abschnitt 2 geben wir Schranken für die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$ an. Da $p(F_1, F_2)$ auch gleich $\mathsf{P}(X_1/\mathsf{E}X_1 \geqq X_2/\mathsf{E}X_2)$ ist, sind Schranken für $p(F_1, F_2)$ Spezialfälle obiger Schranken. Es ist deshalb genauso wie in [2] und [1] möglich, Konfidenzschranken für $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$ in einer großen Klasse von Lebens- und Reparaturdauern anzugeben.

Konfidenzintervalle für $A = \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)$ wurden in [2] konstruiert, **wenn** A Median von $X_1/(X_1 + X_2)$ ist, d. h.

$$\mathsf{P}(X_1/(X_1 + X_2) \geqq \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)) = 1/2 . \tag{1}$$

[6] gab folgenden Satz an:

1.1. *X_1, X_2 seien unabhängige, absolutstetige Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen F_1 bzw. F_2, $\mathsf{P}(X_1 > 0) = \mathsf{P}(X_2 \geqq 0) = 1$, $\mathsf{E}X_1$, $\mathsf{E}X_2 < \infty$.*

$$G_1(x) = G_2(x) \quad \textit{für alle} \quad x \tag{2}$$

ist hinreichend für (1), *wobei* $G_i(x) = F_i(\mathsf{E}X_i\, x)$ $(i = 1, 2)$.

Die Vermutung von [6], daß (2) auch notwendig ist, wurde in [2] widerlegt. Weiterhin wurde dort 1.2. bewiesen:

1.2. *X_1, X_2 seien unabhängige Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen F_1 bzw. F_2, $\mathsf{P}(X_1 > 0) = \mathsf{P}(X_2 \geqq 0) = 1$, $\mathsf{E}X_1$, $\mathsf{E}X_2 < \infty$. Für* (1) ***ist hinreichend und notwendig***

$$\int G_2(x + 0)\,\mathrm{d}G_1(x) = \int G_1(y)\,\mathrm{d}G_2(y) \tag{3}$$

(*oder, was gleichbedeutend ist,*

$$\int G_2(x + 0)\,\mathrm{d}G_1(x) = 1/2) .$$

Beispiele (für (1). Die Formparameter sind jeweils gleich.)

1) F_1, F_2 Gleichverteilungen
2) F_1, F_2 Weibull-Verteilungen
3) F_1, F_2 Gamma-Verteilungen
4) F_1, F_2 log-Normalverteilungen
5) F_1, F_2 Birnbaum-Saunders-Verteilungen

Die Untersuchungen zu (1) zeigen, daß entsprechende Ergebnisse auch für

$$\mathsf{P}(X_1/(X_1 + X_2) \geqq \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)) = p(F_1, F_2) \tag{4}$$

gelten, d. h. A ist p-Quantil von $X_1/(X_1 + X_2)$.

Da für Verteilungsfunktionen mit dem Skalenparameter α (wir schreiben dafür $F^{(\alpha)}$)

$$F^{(\alpha)}(x) = F^{(1)}(x/\alpha)$$

 gilt, folgt insbesondere

$$p(F_1^{(\alpha)}, F_2^{(\beta)}) = p(F_1^{(1)}, F_2^{(1)}),$$

d. h. die Unabhängigkeit vom Skalenparameter. Beispiele hierzu sind in [2] und [1] untersucht.

2. SCHRANKEN FÜR $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$

X_1, X_2 seien unabhängige, nichtnegative Zufallsgrößen. Ihre Verteilungsfunktionen seien F_1 bzw. F_2, und es gelte $\mathsf{P}(X_1 > 0) = \mathsf{P}(X_2 \geqq 0) = 1$, $\mathsf{E}X_1, \mathsf{E}X_2 < \infty$. In den folgenden Sätzen setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß F_1 und F_2 stetig sind.

Für die Verteilungsfunktion F der Zufallsgröße X schreiben wir $F \in \boldsymbol{Exp}$, falls F Verteilungsfunktionen einer Exponentialverteilung ist $(F(x) = 1 - \exp(-x/\mathsf{E}X))$, und $F \in \boldsymbol{NBUE}$, falls für alle s mit $1 - F(s) > 0$ die Ungleichung $\mathsf{E}X \geqq \int_0^\infty (1 - F(s + t))\,\mathrm{d}t/(1 - F(s))$ gilt.

2.1. *Ist F_1 bzw. F_2 konkav, so gilt entsprechend*

$$1 - F_1(\mathsf{E}X_2) \leqq \mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) \leqq F_2(\mathsf{E}X_1).$$

Beweis. 1. Zwei Zufallsgrößen X_1, X_2 mit dem gleichen Erwartungswert heißen *(2)-vergleichbar*, $\leqq^{(2)}$ (*(3)-vergleichbar*, $\leqq^{(3)}$), falls für alle konvexen (konkaven) Funktionen f

$$\int f(t)\,\mathrm{d}F_1(t) \leqq \int f(t)\,\mathrm{d}F_2(t)$$

gilt (siehe z. B. [7]).

Es gilt $X_1 \geqq^{(2)} \mathsf{E}X_1$. Da $X_1 \geqq^{(2)} \mathsf{E}X_1$ genau dann gilt, wenn $X_1 \leqq^{(3)} \mathsf{E}X_1$ ist, folgt

$$\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) = \int F_2(x)\,\mathrm{d}F_1(x) \leqq \int F_2(x)\,\mathrm{d}\delta_{\mathsf{E}X_1}(x) = F_2(\mathsf{E}X_1),$$

falls F_2 konkav ist.

2. Es ist $X_2 \geqq^{(2)} \mathsf{E}X_2$. Folglich gilt

$$\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) = \int (1 - F_1(x))\,\mathrm{d}F_2(x) \geqq \int (1 - F_1(x))\,\mathrm{d}\delta_{\mathsf{E}X_2}(x) = 1 - F_1(\mathsf{E}X_2),$$

falls F_1 konkav ist. □

Aus 2.1. erhalten wir für konkave F_1 bzw. F_2 unmittelbar

$$1 - F_1(\mathsf{E}X_1) \leqq p(F_1, F_2) \leqq F_2(\mathsf{E}X_2).$$

(Die untere Schranke für $F_1 \in \boldsymbol{Exp}$ findet man bei [1].)

2.2. *Sei $F_1 \in$ **NBUE** und F_2 konkav, dann gilt*

$$\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) \geqq \exp(-\mathsf{E}X_2/\mathsf{E}X_1)\,.$$

Beweis. $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) = \int F_2(x)\,\mathrm{d}F_1(x) \geqq \int F_2(x)\,\mathrm{d}\mathbf{Exp}\,(1/\mathsf{E}X_1)(x) =$

$$= 1 - \int (1 - \exp(-x/\mathsf{E}X_1))\,\mathrm{d}F_2(x) = \int \exp(-x/\mathsf{E}X_1)\,\mathrm{d}F_2(x) \geqq \exp(-\mathsf{E}X_2/\mathsf{E}X_1)\,,$$

weil $\exp(-x/\mathsf{E}X_1)$ konvex ist. □

Aus 2.2 erhalten wir für $F_1 \in$ **NBUE** und F_2 konkav

$$p(F_1, F_2) \geqq \exp(-1)\,.$$

2.3. *Sei $F_1 \in$ **Exp** und $F_2 \in$ **NBUE**, dann gilt*

$$\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) \leqq \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)\,.$$

(*Die Schranke wird für $F_2 \in$ **Exp** erreicht.*)

Beweis. 1. $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) = \int (1 - F_1(y))\,\mathrm{d}F_2(y) = \int \exp(-y/\mathsf{E}X_1)\,\mathrm{d}F_2(y) \leqq$
$\leqq \int \exp(-y/\mathsf{E}X_1)\,.\,1/\mathsf{E}X_2\,.\,\exp(-y/\mathsf{E}X_2)\,\mathrm{d}y = 1/\mathsf{E}X_2\,.\,1/(1/\mathsf{E}X_1 + 1/\mathsf{E}X_2) =$
$= \mathsf{E}X_1/(\mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2)$. □

Aus 2.3. folgt unmittelbar für $F_2 \in$ **NBUE** und $F_1 \in$ **Exp**

$$p(F_1, F_2) \leqq 1/2\,.$$

Wir wollen nun noch ein Beispiel angeben, wie sich monotone Veränderungen z. B. der Lebensdauer auf die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2)$ auswirken. Sei F_2 konkav und $X_3 \leqq^{(2)} X_1$. Dies ist z. B. nach dem Schnittkriterium von Karlin - Nowikow [5] der Fall, wenn ein Intervall (x_1, x_2) (z. B. auch $x_1 = x_2$) existiert mit

$$\begin{aligned} F_3(x) &\leqq F_1(x) \quad \text{für} \quad x < x_1 \\ F_3(x) &= F_1(x) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ F_3(x) &\geqq F_1(x) \quad \text{für} \quad x > x_2\,. \end{aligned}$$

Wenn $\mathsf{P}(X_1 \geqq X_2) \geqq p$ ist, dann gilt wegen

$$\mathsf{P}(X_3 \geqq X_2) = \int F_2(z)\,\mathrm{d}F_3(z) \geqq \int F_2(z)\,\mathrm{d}F_1(z)$$

auch $\mathsf{P}(X_3 \geqq X_2) \geqq p$.

3. BEMERKUNG

Auch auf Quantile anderer Zusammenhänge in der Zuverlässigkeitstheorie wie etwa für

$$\mathsf{P}(1/X_1 + 1/X_2 \geqq 1/\mathsf{E}X_1 + 1/\mathsf{E}X_2) = 1/2$$

kann man die Untersuchungen der Abschnitte 1 und 2 übertragen. Als notwendige und hinreichende Bedingung erweist sich hierbei

$$1 - F_1(1/a) - F_2(1/a) = \mathsf{E}F_1(1/(a - 1/X_2)) + \mathsf{E}F_2(1/(a - 1/X_1))$$
$$(a = 1/\mathsf{E}X_1 + 1/\mathsf{E}X_2)\,.$$

(Eingegangen am 1. September 1978.)

LITERATUR

[1] B. Gerlach: A characterization of availability with statistical applications. Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statistics *9* (1978), 4, 563–586.

[2] B. Gerlach, W. Warmuth: Some remarks to system availability. Math. Operationsforsch. u. Statist. *7* (1976), 4, 601–606.

[3] H. L. Gray, T. O. Lewis: A confidence interval for availability ratio. Technometrics *9* (1967), 465–471.

[4] H. L. Gray, W. R. Schucamy: Lower confidence limits for availability assuming log-normally distributed repair times. IEEE Trans. Rel. *18* (1969), 157–162.

[5] S. Karlin, A. Novikoff: Generalized convex inequalities. Pacific J. Math. *13* (1963), 1251 to 1279.

[6] H. F. Martz: On single-cycle availability. IEEE Trans. Rel. *20* (1971), 21–23.

[7] D. Stoyan: Qualitative Eigenschaften und Abschätzungen stochastischer Modelle. Akademie-Verlag, Berlin 1977.

[8] M. Thompson: Lower confidence limits and a test of hypotheses for system availability. IEEE Trans. Rel. *15* (1966), 32–36.

Dr. Elke Warmuth, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik, 1080 Berlin, Mohrenstr. 39. DDR.

Dr. Walter Warmuth, Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, 1086 Berlin, PSF 1297. DDR.