KYBERNETIKA — ТОМ *18* (1982), ВЫПУСК 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ИСХОДОВ ИЗ α-ЯДРА НЕПРЕРЫВНОЙ ИГРЫ

МИЛАН БЕРКА*

В настоящей статье рассмотрен вопрос о возможности превращения ситуации из α-ядра игры Γ в устойчивую в классе некоторых информационных расширений данной игры [1]. Основным результатом является:

1) **Построение специального класса мета-игр n-лиц, в которых все оптимальные по Парето ситуации из α-ядра являются ситуацией равновесия**
2) **Рассмотрен вопрос об устойчивости таких ситуаций в играх данного класса.**

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Будем писать $\Gamma = \langle X_i, f_i : i \in N \rangle$ для непрерывной игры в нормальной форме. Здесь N множество игроков и X_i множество стратегий i-того игрока, которое является компактом. $f_i(x)$ является функцией выигрыша игрока i, которая непрерывна на $\times \prod_{i \in N} X_i$. Множества X_i и N содержат хотя-бы два элемента. Через x_i будем обозначать отдельную стратегию i-того игрока и под записью $x_K = (x_i : i \in K)$ будем понимать статегию коалиции $K : \emptyset \subset K \subseteq N$.

Будем в дальнейшем допускать возможность возникновения в игре коалиций. Поэтому под игрой будем в дальнейшем понимать пару (Γ, T), где $T = \{K_1, \ldots, K_s\}$ множество допустимых коалиций. В определениях 1.—3. приведеных ниже можно формально считать T произвольным семейством множеств, но при игровой интерпретации этих понятий необходимо ввести некоторые ограничения на множество T. Будем считать, что

1) $$\forall i : i \in N \quad \exists K : [K \in T \wedge i \in K]$$
2) $$\forall K : [K \in T \wedge K \neq \{i\}] \quad \exists N \setminus K : N \setminus K \in T\,.$$

* Настоящая статья представляет собой часть результатов полученых автором во время аспирантуры на кафедре Исследования операций факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Прежде, чем перейти к определениям настоящей статьи, обоснуем их смысл.

Пусть на $X = \times \prod_{i \in N} X_i$ задана система отношении $\{R_i\}_{i \in N}$, которые назовем бескоалиционными предпочтениями:

$$xR_iy \Leftrightarrow f_i(x) > f_i(y)\,,$$

где

$$y = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Определим $R(x) = \{y \in X : xRy\}$ и $R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$ для любых $A : A \subseteq X$. Ядром отношения будем называть множество

$$\mathsf{C}_R(G) = X \setminus R(X)\,.$$

Выше указаная система предпочтений антирефлексивна. В принципе можно было бы ввести и рефлексивную систему, но тогда были бы необходимы в дальнейшем дополнительные исследования в краевых точках множества Парето.

Введем следующие производные отношения:

$$R_0 = \bigcup_{i \in N} R_i \quad R_N = \bigcap_{i \in N} R_i \quad R_T = \bigcup_{K \in T} \bigcap_{i \in K} R_i$$

определим отношение:

$$xPy \Leftrightarrow [xR_0y \wedge \ulcorner (yR_0x)]\,.$$

Нетрудно видеть, что $\mathsf{C}_{R_0}(G)$-множество ситуаций равновесия по Нэшу, $\mathsf{C}_{R_N}(G)$-множество полуэффективных ситуаций, $\mathsf{C}_P(G)$-множество ситуаций, исходы которых оптимальны по Парето (в дальнейшем будем это множество обозначать через $\mathsf{P}(\Gamma)$). $\mathsf{C}_{R_T}(G)$-множество устойчивых ситуаций.

На множестве X можно определить кроме этого и отношение доминирования:

$$\forall x, y \in X \qquad x \succ y \Leftrightarrow \exists K \in T\colon f_i(x) > f_i(y) \quad \forall i \in K\,.$$

Положим $\operatorname{dom} x = \{y \in X\colon x \succ y\}$, $\operatorname{dom} A = \bigcap_{x \in A} \operatorname{dom} x$. α-ядром игры G назовем подмножество X, недоминируемых ситуаций:

$$\mathsf{C}_\alpha(G, T) = X \setminus \operatorname{dom} X\,.$$

Определение 1. α- и β-ядрами соответственно игры Γ при заданом множестве T будем называть множества стратегий:

$$\mathsf{C}_\alpha(\Gamma, T) = \bigcap_{K \in T} \bigcap_{x_K} \bigcup_{x_{N \setminus K}} \bigcup_{i \in K} \{\bar{x} : f_i(x_K, x_{N \setminus K}) \leqq f_i(\bar{x})\}$$

$$\mathsf{C}_\beta(\Gamma, T) = \bigcap_{K \in T} \bigcup_{x_{N \setminus K}} \bigcap_{x_K} \bigcup_{i \in K} \{\bar{x} : f_i(x_K, x_{N \setminus K}) \leqq f_i(\bar{x})\}$$

Определение 2. Ситуацию x^0 будем называть устойчивой относительно набора коалиций T, если она принадлежит множеству

$$\mathsf{S}(\Gamma, T) = \bigcap_{K \in T} \bigcap_{x_K} \bigcap_{i \in K} \{\bar{x} : f_i(x_K, \bar{x}_{\setminus K}) \leqq f_i(\bar{x})\}\,.$$

Замечание 1. Если множество допустимых коалиций $\boldsymbol{T}$ совпадает с множеством всех одноэлементных подмножеств множества $\boldsymbol{X}$ то

$$\mathsf{S}(\Gamma, \boldsymbol{T}) = \mathsf{F}(\Gamma)$$

и такое множество будем называть множеством ситуаций равновесия.

Замечание 2. Если множество $\boldsymbol{T}$ совпадает с множеством всех собственных подмножеств множества N, то ситуации из $\mathsf{S}(\Gamma, \boldsymbol{T})$ принято называть ситуациями сильного равновесия [3].

Определение 3. Под квазиинформационным расширением игры Γ в нормальной форме будем понимать игру $\tilde{\Gamma} = \langle \tilde{\boldsymbol{X}}_i, \tilde{f}_i : i \in \boldsymbol{N} \rangle$ вместе с оператором $\Pi : \tilde{\boldsymbol{X}} \to \boldsymbol{X}$ удовлетворяющие следующим двум свойствам:

1) $$\tilde{f}_i = f_i \circ \Pi \quad \forall i : i \in \boldsymbol{N}$$

2) $$\forall x_i^0 \in \boldsymbol{X}_i \quad \exists \tilde{x}_i^0 \in \tilde{\boldsymbol{X}}_i : \forall \tilde{x}_j \in \tilde{\boldsymbol{X}}_j : j \neq i \quad \Pi_i(\tilde{x}_i^0, \tilde{\boldsymbol{x}}_{N \setminus i}) = x_i^0$$

(Π_i-композиция оператора Π с проекцией на множество $\boldsymbol{X}_i$).

Пусть $\boldsymbol{T}_1 \subseteq \boldsymbol{T}_2$, тогда имеют место следующие простые свойства:

$$\mathsf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}) \supseteq \Pi(\mathsf{C}_\alpha(\tilde{\Gamma}, \boldsymbol{T})), \quad \Pi(\mathsf{S}(\tilde{\Gamma}, \boldsymbol{T})) \subseteq \mathsf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}),$$

$$\mathsf{C}_\beta(\Gamma, \boldsymbol{T}) \subseteq \Pi(\mathsf{C}_\beta(\tilde{\Gamma}, \boldsymbol{T})), \quad \mathsf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}_1) \supseteq \mathsf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}_2),$$

$$\mathsf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}) \supseteq \mathsf{C}_\beta(\Gamma, \boldsymbol{T}), \qquad \mathsf{S}(\Gamma, \boldsymbol{T}_1) \supseteq \mathsf{S}(\Gamma, \boldsymbol{T}_2).$$

Целью настоящей работы согласовать в рамках класса информационных расширений некоторые из принципов рационального выбора стратегии. Попытки такого же рода проводились в [2], [4], [5].

Все теоремы, доказаные ниже справедливы в случае, когда множества стратегии $\boldsymbol{X}_i$, выпуклые компактные подмножества некоторых нормированых пространств. Они могут быть доказаны и в случае метрических компактов с непрерывной метрикой Хаусдорфа.

В дальнейшем через f_i и $f_i(x)$ будем обозначать функцию, и через $f[x]$ ее значение в точке $\boldsymbol{x}$.

Под записью $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Argmax}_{y \in A} M(y)$ будем понимать любой элемент

$$\bar{x} : M[\bar{x}] = \max_{y \in A} M(y) \quad \text{и} \quad \bar{x} \in A.$$

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ИГРЫ Γ И МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИГР С ПОМОЩЬЮ ДИАГРАМОВ

Для более коротких и наглядных определений простых специальных информационных расширений будем в дальнейшем использовать метод диаграмов.

Рассмотрим следующие элементарные информационные расширения игр

$$\Gamma_1 = \langle X_1, X_2, f_1, f_2 \rangle\,, \quad \Gamma_2 = \langle X_i, f_i : i = 1, 2, 3 \rangle\,.$$

I. Первый этап: второй игрок выбирает произвольное $x_2^* \in X_2$ и φ_2:

$$X_1 \to S(x_2^*, k) = \{x_2 \in X_2 : \|x_2 - x_2^*\| \leqq k\}$$

и сообщает свой выбор первому игроку.

Второй этап: Первый, зная пару (x_2^*, φ_2) выбирает $x_1 \in X_1$ и собщает его второму игроку.

Третий этап: Второй игрок выбирает $x_2 \in X_2$, так, чтобы $x_2 = \varphi_2[x_1]$.

II. Первый этап: Второй игрок выбирает x_2, x_2^*, так, чтобы $\|x_2 - x_2^*\| \leqq k$ первый выбор x_2, настоящую свою стратегию, сообщает первому игроку и „блеф", выбор x_2^* третьему.

Второй этап: Первый и третий игроки, зная x_2 и x_2^* соответствено выбирают x_1 и x_3.

Предполагается, что параметр k известен всем игрокам. Выше приведеные игры имеют смысл для любых $k : 0 \leqq k \leqq \tilde{R}$ где $\tilde{R} = \operatorname{diam} X_2$. Диаграмы этих игр представлены на Рис. 1.

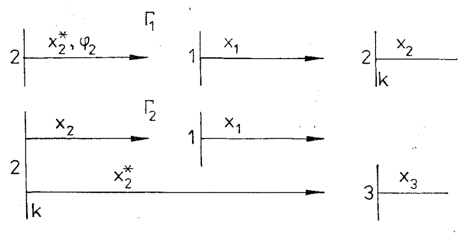

Рис. 1.

Определим некоторые игры, которые будем использовать в дальнейшем (рис. 2).

В дальнейшем будем использовать также мета-игры ${}^{i}_{j}\Gamma$, которые определены в [4]. В такой игре игрок i выбирает стратегию x_i в игре Γ и сообщает ее игроку j, который выбирает $x_j = \varphi_j[x_i]$.

По индукции можно строить более сложные игры такого типа.

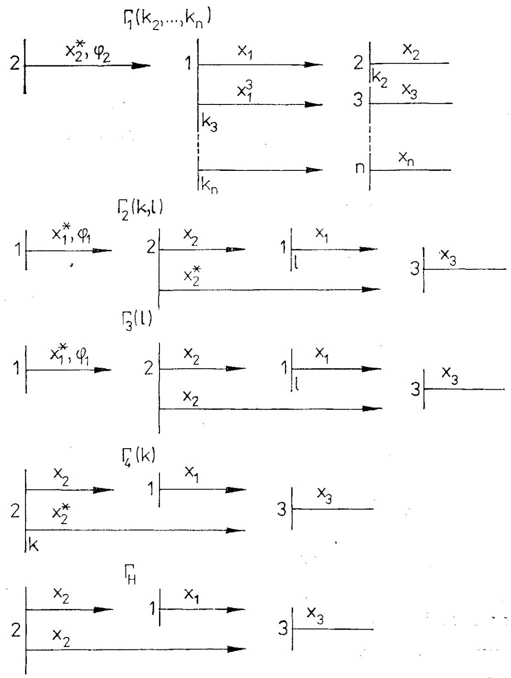

Рис. 2.

3. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПАРЕТО ИСХОДОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ИГР n-ЛИЦ И α-ЯДРО

Рассмотрим более подробно мета-игры $\Gamma(k_2, k_3, \ldots, k_n)$. Первый игрок имеет следующие множества стратегии

$$\Phi_1 = \{\varphi_1 : \Phi_2 \to X_1^*(k_3, \ldots, k_n)\}$$

где Φ_2 является множеством стратегии второго

$$\Phi_2 = \{(x_2^*, \varphi_2) : x_2^* \in X_2,\ \varphi_2 : X_1 \to \{x_2 \in X_2 : \|x_2 - x_2^*\| \leqq k_2\}\}$$

и

$$X_1^* = \{(x_1, x_1^3, \ldots, x_1^n) : x_1, x_1^i \in X_1 \wedge \|x_1 - x_1^i\| \leqq k_i, \quad \forall i = 3, \ldots, n\}.$$

Стратегии остальных игроков имеют вид $\Phi_i = \{\varphi_i : X_1 \to X_i\}$. Введем следующие функции $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_n$:

$$\varphi_1[y_2, \varphi_2] = (\omega_1[y_2, \varphi_2], \ \omega_3[y_2, \varphi_2], \ldots, \omega_n[y_2, \varphi_2]).$$

Если определены стратегии в игре $\Gamma(k_2, k_3, \ldots, k_n)$, тогда определен однозначно и исход в основной игре Γ.

$$\Pi(k_2, \ldots, k_n) \colon \ \times \prod_{i=1}^{n} \Phi_i \to \times \prod_{i=1}^{n} X_i,$$

где

$$\Pi(k_2, \ldots, k_n)\,[\varphi_1, (x_2^*, \varphi_2), \varphi_3, \ldots, \varphi_n] = (\omega_1[x_2^*, \varphi_2], \varphi_2[\omega_1], \ldots, \varphi_n[\omega_1]).$$

$$f_i^{k_2, \ldots, k_n}[\varphi_1, (x_2^*, \varphi_2), \varphi_3, \ldots, \varphi_n] = f_i[\omega_1[x_2^*, \varphi_2], \varphi_2[\omega_1], \ldots, \varphi_n[\omega_1]]$$

является определением функции выгрыша в игре $\Gamma(k_2, \ldots, k_n)$.

Для гарантированного результата имеют месло следующие оценки:

$$w_1 \geqq \min_{x_2^*} \max_{x_1} \min_{x_2 \in S(x_2^*, k_2)} \min_{X_N \setminus \{1,2\}} f_1(x) = W_1(k_2)$$

$$w_2 \geqq \max_{x_2^*} \min_{x_1} \max_{x_2 \in S(x_2^*, k_2)} \min_{X_N \setminus \{1,2\}} f_2(x) = W_2(k_2)$$

$$w_i \geqq \min_{x_1^i} \max_{x_i} \min_{x_1 \in S(x_1^i, k_i)} \min_{X_N \setminus \{1,i\}} f_i(x) = W_i(k_i)$$

Лемма. Функции $W_i(k)$ непрерывны по переменной k.

Доказательство. Доказательство проводится в полной аналогии с доказательством леммы 1 в [5].

Для ситуации равновесия информированность игроков в $\Gamma(k_2, \ldots, k_n)$ является недостаточной. Построим игру $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma} = {}^{1\ n\ \ldots n\,1\,n\,n-1 \ldots 3 \ldots 3\,1\,3\,2 \ldots 2\,1}_{2\,n-1 \ldots 2\,n\,1\ n\ \ldots n \ldots 2\,3\,1\,n \ldots 3\,2}\Gamma(k_2, \ldots, k_n).$$

Построим множества стратегии в этой игре

$$\begin{array}{ll}
\Psi_1^1 = \Phi_1 & \Psi_1^2 = \{\psi_1^2 : \Psi_3^1 \to \Psi_1^1\} \\
\Psi_2^1 = \{\psi_2^1 : \Phi_1 \to \Phi_2\} & \Psi_3^2 = \{\psi_3^2 : \Psi_1^2 \to \Psi_3^1\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_n^1 = \{\psi_n^1 : \Phi_2 \to \Phi_n\} & \Psi_i^2 = \{\psi_i^2 : \Psi_3^2 \to \Psi_i^1\}, \quad i = 2, 4, \ldots, n
\end{array}$$

и аналогично с помошью схемы обмена информации дальше. В конце положим:

$$\Psi_2^n = \{\psi_2^n : \Psi_1^{n-1} \to \Psi_2^{n-1}\} \quad \text{и} \quad \Psi_i^n = \Psi_i^{n-1} \quad \text{для} \quad i \neq 2.$$

Стратегиями игроков в игре $\tilde{\Gamma}$ являются функции ψ_i^n. Определим следующие отображения:

$$\Pi^0 : \prod_{i=1}^{n} \Psi_i^n \to \times \prod_{i=1}^{n} \Phi_i \quad \text{и} \quad \Pi : \times \prod_{i=1}^{n} \Psi_i^n \to \times \prod_{i=1}^{n} X_i \,.$$

Очевидно эти отображения удовлетворяют требованиям определения 4 и такая игра является квазиинформационным расширением игры Γ. При этом

$$\Pi = \Pi^0 \circ \Pi(k_2, \ldots, k_n) \,.$$

Функции выигрыша в игре $\tilde{\Gamma}$ определяются аналогично, как $f_i^{k_2 \ldots k_n}(\boldsymbol{x})$.

Теорема 1. Любая ситуация из α-ядра игры Γ, исход которой оптимален по Парето, может быть представлена как образ ситуации равновесия в специальном информационном расширений $\tilde{\Gamma}$, значит

$$\forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}_0) \cap \mathbf{P}(\Gamma) \quad \exists \tilde{\Gamma} : \boldsymbol{x}^0 \in \Pi(\mathbf{E}(\Gamma)) \,,$$

где $\boldsymbol{T}_0 = \{\{i\}\}_{i \in \boldsymbol{N}}$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Первый — если $f_i[\boldsymbol{x}^0] \geqq \min\limits_{x_j} \max\limits_{x_i} \min\limits_{x_{N \setminus \{i,j\}}} f_i(\boldsymbol{x})$, то как показано в [4], такая игра существует.

Второй — если $\forall_{i,j}\, f_i[\boldsymbol{x}^0] < \min\limits_{x_j} \max\limits_{x_i} \min\limits_{x_{N \setminus \{i,j\}}} f(\boldsymbol{x})$, то по лемме найдутся такие числа $k_2, \ldots, k_n$, для которых справедливо $W_i[k_i] = f_i[\boldsymbol{x}^0]$, $i \neq 2$. В этом случае докажем, что $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}$. Рассмотрим возможности наказания первого игрока. Пусть

$$u(x_2') = \max_{x_1} \min_{x_2 \in \boldsymbol{S}(x_2', k_2)} \min_{x_{N \setminus \{1,2\}}} f_1(\boldsymbol{x}) \,,$$

$$z_{21} \in \operatorname{Arg} \min_{x_2' \in \boldsymbol{X}_2} u(x_2') \,.$$

Введем следующие отображения

$$\beta_{21} = (z_{21}, g(x_1)) \in \Phi_2 : g(x_1) = \min_{x_2 \in \boldsymbol{S}(z_{21}, k_2)} \min_{x_{N \setminus \{1,2\}}} f_1(\boldsymbol{x}) \,.$$

Сейчас построим параметрическое семейство операторов от переменной φ_1:

$$A(\varphi_1, \eta) \in \Psi_1^2 : A(\varphi_1, \eta) = \begin{cases} \beta_{21}, & \varphi_1 = \eta \,; \\ (y_2, \varphi_2), & \varphi_1 \neq \eta \end{cases} \quad \eta \in \Phi_1 \,.$$

где (y_2, φ_2) является доопределением оператора на множестве $\Phi_1 \setminus \{\eta\}$. Второй игрок знает рекурсивные соотношения:

$$\psi_1^{n-2} = \psi_1^n[\psi_n^{n-1}(\psi_1^n)] \,, \quad \psi_1^{n-3} = \psi_1^{n-2}[\psi_1^{n-2}(\psi_1^{n-2})], \; \ldots \,,$$
$$\eta \quad = \psi_1^2[\psi_3^2(\psi_1^2)] \,,$$

и информирован о стратегиях остальных игроков т.е. эти формулы дают возможность второму игроку вычислить параметр η.

Семейство операторов A играет роль сообщения, для остальных, стратегий φ_1 до ее выбора в игре, так как, зная φ_1 (β_{21}) может каждый игрок определить $\tilde{x}_1 = \omega_1[\beta_{21}]$, и все игроки, кроме первого и второго могут выбрать исход из множества:

$$M_1(\tilde{x}_1) = \{(z_{31}, \ldots, z_{n1}) \in \operatorname{Arg} \min_{x_{N\setminus\{1,2\}}} f_1(\tilde{x}_1, g(\tilde{x}_1), x_{N\setminus\{1,2\}}\} .$$

Для $k = 3, \ldots, n$ построим функции

$$A_k = \begin{cases} z_{k1}, & \psi_2^1 = A \\ x_k, & \psi_2^1 \neq A . \end{cases}$$

Положим $\psi_2^n = A$ и $\psi_k^n = A_{k1}$, тогда имеем

$$f_1[\psi_1^n, \ldots, \psi_n^n] \leqq W_1[k_2] \quad \forall \psi_1^n .$$

Так как стратегии наказания второго игрока нам в дальнейшем не понадобятся, то мы перейдем к рассмотрению наказания третьего и остальных игроков.

Пусть

$$u(x_1') = \max_{x_3} \min_{x_1 \in S(x_1', k_3)} \min_{x_{N\{1,3\}}} f_3(x) ,$$

$$y_{13} \in \operatorname{Arg} \min_{x_1} u(x_1) .$$

Построим для любого $x_3 \in X_3$ следующее множество

$$M_3(x_3) = \{(\tilde{x}_{23}(x_3), \ldots, \tilde{x}_{n3}(x_3)) : f_3(\tilde{x}_{23}, \ldots, \tilde{x}_{n3}) = \min_{x_1 \in S(y_{13}, k_3)} \min_{x_{N\{1,3\}}} f_3(x)\} .$$

По предположению X_1 содержит хотя-бы два различных элемента, обозначим их x_1^m и x_1^M. Построим двух параметрическое семейство функции

$$\alpha_{13}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_2) = \begin{cases} \tilde{x}_1, & x_2 = \tilde{x}_2 \\ x_1^m, & x_2 \neq \tilde{x}_2 \text{ и } x_1^m \neq \tilde{x}_1 \\ x_1^M, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Если определены $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ то $\tilde{\alpha}_{13}(y_2, \varphi_2) = (\alpha_{13}, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, и $\tilde{\alpha}_{13} \in \Phi_1$. Построим оператор $B_{23} \in \Psi_2^1$:

$$B_{23}(\varphi_1) = \begin{cases} (\tilde{x}_2, \tilde{x}_2) , & \varphi_1 = \tilde{\alpha}_{13} \\ (x_2, \varphi_2) , & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

каждому игроку известны правила игры т.е. следующие рекурсивные соотношения: $\psi_3^2[\hat{\alpha}_{13}] = \psi_3^1$, $\hat{\alpha}_{13}(\psi_3^1) = \hat{\alpha}(x_1[\psi_3^1(B_{23})]$, $x_2[\psi_3^1(B_{23}), x_2)$, $\psi_3^1[B_{23}] = \tilde{x}_3$, $\tilde{\alpha}_{13} \in \Psi_1^2$.

Таким образом, если задано α_{13} и B_{23} все игроки могут вычислить $\tilde{x}_3$ до его выбора и поэтому могут выбрать окончательный исход так, чтобы принадлежал множеству $\boldsymbol{M}_3[\tilde{x}_3]$. Операторы остальных $B_{k3} \in \Psi_k^1$ должны обладать свойством $B_{k3}[B_{23}] = x_{k3}$. Полагая $\psi_1^n = \alpha_{13}$, $\psi_k^n = B_{k3}$ мы для любого ψ_3^n имеем

$$\tilde{f}_3[\psi_1^n, \ldots, \psi_n^n] \leqq W_3[k_3] \quad \forall \psi_3^n .$$

Совершено аналогично строится наказание остальных игроков. Построим сейчас для каждого игрока i, за исключением второго, i-рациональую стратегию, т.е. стратегию, обеспечивающую достижение гарантированного результата.

$$\bar{\varphi}_1(x_2, \varphi_2) = (\bar{\omega}_1, x_1^k : k = 3, \ldots, n) ,$$

где

$$\bar{\omega}_1(x_2, \varphi_2) = \bar{\omega}_1(x_2) \in \{g : g(x_2') = \max_{x_1} \min_{x_2 \in \boldsymbol{S}(x_2', k_2)} \min_{\boldsymbol{x}_{N\{1,2\}}} f_1(\boldsymbol{x})\}$$

и

$$\bar{\varphi}_e(x_1) \in \{g : g(x_1') = \max_{x_e} \min_{x_1 \in \boldsymbol{S}(x_1', k_e)} \min_{\boldsymbol{x}_{N\{1,2\}}} f_e(\boldsymbol{x})\} .$$

Сейчас нам необходимо определить следующие множества стратегии:

$$\Psi_1^{1,0} = \{\psi_1^{1,0} \in \Psi_1^1 : \psi_1^{1,0}[x_2^0, \varphi_2^0] = (x_1^0, x_1^3, \ldots, x_1^n)\} , \quad \text{где} \quad \varphi_2^0 \equiv x_2^0$$

$$\Psi_2^{1,0} = \{\psi_2^{1,0} \in \Psi_2^1 : \psi_2^{1,0}[\varphi_1^0] = (x_2^0, \varphi_2^0)\} \quad \forall \varphi_1^0 \in \Psi_1^{1,0} .$$

и так далее.

Построим равновесные стратегии в игре $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\varphi}_1(x_2, \varphi_2) = \begin{cases} \varphi_1^0, & (x_2, \varphi_2) = (x_2^0, \varphi_2^0) ; \\ \bar{\varphi}_1, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad \tilde{\psi}_2^1(\varphi_1) = \begin{cases} (x_2^0, \varphi_2^0) , & \varphi_1 \in \Psi_1^{1,0} \\ \beta_{21}, & \varphi_1 \notin \Psi_1^{1,0} ; \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_k^1(\psi_2^1) = \begin{cases} \varphi_k^0, & \psi_2^1 \in \Psi_2^{1,0} \\ \bar{\varphi}_k, & \psi_2^1 \notin \Psi_2^{1,0} \end{cases} \quad \tilde{\psi}_1^2(\psi_3^1) = \begin{cases} \bar{\varphi}_1, & \psi_3^1 \in \Psi_3^{1,0} \\ \tilde{\alpha}_{13}, & \psi_3^1 \notin \Psi_3^{1,0} . \end{cases}$$

и так далее.

В итоге мы получаем набор стратегии, обладающий следующими свойствами:

1) $$\Pi[\tilde{\psi}_1^n, \ldots, \tilde{\psi}_n^n] = \boldsymbol{x}^0 .$$

2) Если отклоняется какой-то игрок, за исключением второго, то все остальные игроки придерживаются стратегии наказания и отклонившийся игрок получает не больше своего гарантированного результата.

3) Если отклоняется второй игрок, то остальные придерживаясь i-рациональной стратегии, гарантируют себе не меньше гарантированного результата и в силу оптимальности по Парето исхода $\boldsymbol{x}^0$ второй получает не больше, чем $f_2[\boldsymbol{x}^0]$ следовательно исход $\boldsymbol{x}^0$ является образом ситуации равновесия, что и требовалось доказать.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПАРЕТО ОПТИМАЛЬНЫХ ИСХОДОВ В НЕПРЕРЫВНЫХ ИГРАХ ТРЕХ ЛИЦ

В этой части работы мы рассмотрим возможности применения выше описанных схем в случае наборов коалиции, на примерах покажем, что такой метод не всегда дает столь же сильные результаты, как в предыдущей части.

Рассмотрим два набора допустимых коалиций

$$\boldsymbol{T}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{i, j\}\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{T}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} .$$

Определим следующие постоянные:

$$\overline{w}_i = \min_{x_{N/(i)}} \max_{x_i} f_i(\boldsymbol{x}) , \quad \overline{\overline{w}}_i = \max_{x_i} \min_{x_{N/(i)}} f_i(\boldsymbol{x}) ,$$
$$w_i^{jk} = \min_{x_j} \max_{x_i} \min_{x_k} f_i(\boldsymbol{x}) .$$

Теорема 2.

$$\forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{C}_\alpha(\Gamma, \boldsymbol{T}_1) \cap \mathbf{P}(\Gamma) \quad \exists \bar{\Gamma} : \boldsymbol{x}^0 \in \pi(\mathbf{S}(\bar{\Gamma}, \boldsymbol{T}_1)) .$$

Доказательство. Неограничивая общность наших рассуждений мы будем считать, что $i = 1$, $j = 2$ и рассмотрим следующие случаи:

$$1) \; \begin{array}{l} f_1[\boldsymbol{x}^0] \leqq w_1^{23} \\ f_3[\boldsymbol{x}^0] \leqq w_3^{12} \end{array} \qquad 2) \; \begin{array}{l} f_1[\boldsymbol{x}^0] \leqq w_1^{23} \\ w_3^{12} \leqq f_3[\boldsymbol{x}^0] \leqq \overline{w}_3 \end{array} \qquad 3) \; \begin{array}{l} f_1[\boldsymbol{x}^0] \leqq w_1^{23} \\ f_3[\boldsymbol{x}^0] \geqq \overline{w}_3 \end{array}$$

$$4) \; \begin{array}{l} w_1^{23} \leqq f_1[\boldsymbol{x}^0] \leqq \overline{w}_1 \\ w_3^{12} \leqq f_3[\boldsymbol{x}^0] \leqq \overline{w}_3 \end{array} \qquad 5) \; \begin{array}{l} f_1[\boldsymbol{x}^0] \geqq \omega_1^{23} \\ f_3[\boldsymbol{x}^0] \geqq \overline{w}_3 \end{array}$$

Остальные части α-ядра можно получить из указанных выше перестановкой индексов. Рассмотрим отдельно все случаи.

1. В первом случае можно использовать игру $\tilde{\Gamma}$ определенную в доказательстве теоремы 1 и построить над ней игру $\bar{\Gamma} = {}^{2}_{3}\tilde{\Gamma}$.

Определим стратегию третьего игрока $\tilde{\psi}_3^4$:

$$\tilde{\psi}_3^4(\psi_2^3) = \begin{cases} \tilde{\psi}_3^3, & \psi_2^3 \in \Psi_2^{3,0}; \\ \overline{\psi}_3^3, & \psi_2^3 \notin \Psi_2^{3,0}; \end{cases} \quad \overline{\psi}_3^3(\psi_1^3) = \begin{cases} \tilde{\psi}_3^2, & \psi_1^3 \in \Psi_1^{3,0} \\ \overline{\varphi}_3, & \psi_1^3 \notin \Psi_1^{3,0} \end{cases}$$

Очевидно, что если отклонится только один игрок, то устойчивость прообраза $\boldsymbol{x}^0$ вытекает из теоремы 1. Если отклонится коалиция $\{1, 2\}$, то третий игрок может используя i-рациональную стратегию добиться в силу оптимальности по Парето исходя $\boldsymbol{x}^0$, того, что хотя-бы один из игроков $\{1, 2\}$ получит не больше, таким образом $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{S}(\bar{\Gamma}, \boldsymbol{T}_1)$.

2. Во втором случае мы воспользуемся игрой $\Gamma_2(k, l)$ и построим следующим образом игру $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{\Gamma} = {}^{112233}_{323121}\Gamma_2(k, l) .$$

Числа k, l можно найти, решая уравнение $W_1(l) = f_1[\boldsymbol{x}^0]$ и $W_3(k) = f_3[\boldsymbol{x}^0]$. Построим стратегии наказания и i-рациональные стратегии первого и третьего игроков:

$$u(x_2, x_1^*) = \max_{x_1 \in S(x_1^*, k)} \min_{x_3} f_1(\boldsymbol{x}),$$

$$\forall x_1^* \ \varphi_2[x_1^*] \in \operatorname{Arg}\min_{x_2} u(x_2, x_1^*),$$

$$\varphi_{31}(x_1, x_2) \in \{g : \forall x_1, x_2 \ g[x_1, x_2] = \min_{x_3} f_1(\boldsymbol{x})\},$$

$$u(x_1) = \min_{x_2^*} \max_{x_3} \min_{x_2 \in S(x_2^*, l)} f_3(\boldsymbol{x}),$$

$$x_{13} \in \operatorname{Arg}\min_{x_1} u(x_1),$$

$$u(x_2^*) = \max_{x_3} \min_{x_2 \in S(x_2^*, l)} f_3(x_{13}, x_2, x_3);$$

$$x_{23}^* \in \operatorname{Arg}\min_{x_2^*} u(x_2^*);$$

$$\psi_{23}(\varphi_3) \in \{g : g[\varphi_3] = \min_{x_2 \in S(x_{23}^*, l)} f_3(x_{13}, x_2, \varphi_3[x_{13}, x_{23}^*])\};$$

$$\bar{\varphi}_3(x_1, x_2) \in \{g : g[x_1, x_2'] = \max_{x_3} \min_{x_2 \in S(x_2', l)} f_3(\boldsymbol{x})\};$$

$$(\bar{x}_1, \bar{\varphi}_1(x_2)) \colon u(x_1^*) = \min_{x_2} \max_{x_1 \in S(x_1^*, k)} \min_{x_3} f_1(\boldsymbol{x}),$$

$$\bar{x}_1 \in \operatorname{Arg}\max_{x_1^*} u(x_1^*)$$

$$\bar{\varphi}_1(x_2) \in \{g : \forall x_2 \ g[x_2] = \max_{x_1 \in S(\bar{x}_1, k)} \min_{x_3} f_1(\boldsymbol{x})\}$$

$$\sim$$

$$\varphi_1^0(x_2) = \begin{cases} x_1^0, \ x_2 = x_2^0; & \varphi_2^0(x_1) \equiv (x_2^0, x_2^0); \\ x_1, \ x_2 \neq x_2^0 & \varphi_3^0(x_1, x_2) \equiv x_3^0; \end{cases}$$

$$\psi_1^0(\varphi_3) = \begin{cases} (x_1^0, \varphi_1^0) \ \varphi_3 = \varphi_3^0; \\ (x_{13}, x_{13}) \ \varphi_2 \neq \varphi_3^0 \end{cases} \quad \psi_2^0(\varphi_3) = \begin{cases} \varphi_2^0, \ \varphi_3 = \varphi_3^0 \\ (x_{23}^+, \psi_{23}(\varphi_3)), \ \varphi_3 \neq \varphi_3^0 \end{cases}$$

$$\psi_1^{1,0}(\psi_2) = \begin{cases} \psi_1^0, \ \psi_2 = \psi_2^0 \\ \bar{\varphi}_1, \ \psi_2 \neq \psi_2^0 \end{cases} \qquad \psi_3^0(\psi_2) = \begin{cases} \varphi_3^0, \ \psi_2 = \psi_2^0 \\ \bar{\varphi}_3, \ \psi_2 \neq \psi_2^0 \end{cases}$$

и так далее.

Множество стратегии $(\psi_1^{1,0}, \psi_2^{1,0}, \psi_3^{1,0})$ является устойчивой ситуацией относительно данного набора коалиции.

3. Аналогично, как в предыдущем случае, мы будем строить игру $\bar{\Gamma}$ над игрой $\Gamma_3(l)$.

Число l вычисляется из уравнения $W_1(l) = f_1[\boldsymbol{x}^0]$. Если от равновесной стратегии, построенной аналогично, как в случае два, будет отклоняться первый игрок, то второй узнает x_1^*, третий x_1, x_2 и следовательно $f_1[\tilde{x}] \leqq W_1[l]$. Если второй игрок будет отклоняться и если

$$f_2[\boldsymbol{x}^0] \geqq \max_{x_1, x_2} \min_{x_3} f_2(\boldsymbol{x})$$

то третий его сможет наказать даже в коалиции с первым. Если

$$f_2[\boldsymbol{x}^0] < \max_{x_1, x_2} \min_{x_3} f_2(\boldsymbol{x}) , \quad \text{то} \quad f_1[\boldsymbol{x}^0] \geqq \max_{x_1, x_2} \min_{x_3} f_1(\boldsymbol{x})$$

и мы сможем получить предыдущий случай заменой первого на второго игрока. Если отклоняется третий игрок, то первый и третий выбирают в игре $\Gamma_3(l)$ стратегии $u(x_1, x_2) = \max_{x_3} f_3(\boldsymbol{x}), (x_{13}, x_{23}) \in \operatorname{Arg} \min_{x_1, x_2} u(x_1, x_2), f_3[\psi] \leqq \bar{w}_3 \leqq f_3[\boldsymbol{x}^0]$ т.е. $x^0 \in S(\bar{\Gamma}, \boldsymbol{T}_1)$.

Устойчивые стратегии в игре $\bar{\Gamma}$ строятся также, как и в предыдущем случае.

4. Сейчас воспользуемся мета-игрой $\Gamma_4(k)$ и аналогично как в случае два над ней построим игру $\bar{\Gamma}$. Вычислим k из уравнения $W_3(k) = f_3[\boldsymbol{x}^0]$. Если будет в $\bar{\Gamma}$ отклоняться первый игрок, то второй в игре $\Gamma_4(k)$ выберет стратегии:

$$x_{21} \in \operatorname{Arg} \min_{x_2} u(x_2) , \quad \text{где} \quad u(x_2) = \max_{x_1} \min_{x_3} f_1(\boldsymbol{x})$$

и третий игрок будет выбирать функцию:

$$\varphi_{31}(x_1) \in \{g : \forall x_1 \in \boldsymbol{X}_1 \ \ g[x_1] = \min_{x_3} f_1(x_1, x_{21}, x_3)\} .$$

Если отклоняется второй игрок, то третий до своего выбора будет знать его стратегию $\tilde{x}_2$. Построим множество для любого $x_2 \in \boldsymbol{X}_2$:

$$\boldsymbol{M}_2(x_2) = \{(\tilde{x}_1(x_2), \tilde{x}_3(x_2)) : f_2(\tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_3) = \min_{x_1, x_3} f_2(\boldsymbol{x})\} .$$

Первый игрок информирует третьего о стратегии $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1[\tilde{x}_2]$ и третий выбирает $\tilde{x}_3$ из множества $\boldsymbol{M}_2[\tilde{x}_2]$. Если третий игрок отклоняется, то первый и второй выбирают в $\Gamma_4(k)$ стратегии:

$$(x_{13}, x_{23}^*) \in \operatorname{Arg} \min_{x_1, x_2^*} u(x_1, x_2^*) , \quad u(x_1, x_2^*) = \max_{x_3} \min_{x_2 \in \boldsymbol{S}(x_2^*, k)} f_3(\boldsymbol{x}) .$$

Второй игрок знает $\varphi_3[x_{13}] = \tilde{x}_3$ и будет выбирать

$$x_{23} \in \operatorname{Arg} \min_{x_2 \in \boldsymbol{S}(x_{23}^*, k)} f_3(x_{13}, x_2, \tilde{x}_3)$$

но тогда третий игрок получит $\tilde{f}_3[\psi] \leqq W_3(k) = f_3[\boldsymbol{x}^0]$. Если отклонится коалиция $\{1, 2\}$, то третий игрок будет в игре $\Gamma_4(k)$ придерживаться i-рациональной стратегии.

5. В последнем случае мы можем воспользоваться мета-игрой H. Ховарда, как она определена в работе [6] — ${}_{12312}\Gamma_H$.

Доказательство теоремы полностью завершено.

К сожалению не для любого набора коалиции класс таких мета-игр дает столь сильные результаты. Рассмотрим, например, набор $T_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Пусть

$$x^0 \in \{x \in X : f_1[x] \geqq \bar{\bar{w}}_{2(2)}, f_2[x] \geqq \bar{\bar{w}}_{2(3)}, f_3[x] \geqq \bar{\bar{w}}_{3(1)}\} \subseteq$$

$$\subseteq \mathbf{C}_\alpha(\Gamma, T_2) \quad \text{и} \quad x^0 \notin \mathbf{C}_\beta(\Gamma, T_2)\,,$$

$$X = \times \prod_{i=1}^{3} X_i$$

где

$$\bar{\bar{w}}_{i(j)} = \max_{x_i, x_j} \min_{x_k} f_i(x)\,.$$

Заметим следующее:

1) В любой схеме двое не могут использовать против коалиции стратегию наказания. Для наказания игроки должны знать стратегию друг друга и это невозможно без помощи третьего игрока.

2) Следовательно двое игроков должны использовать i-рациональную стратегию и устойчивость должна получаться за счет оптимальности по Парето, но для произвольных непрерывных функций это невозможно, например, если:

$$\bar{w}_i < \bar{\bar{w}}_{i(j)} \leqq f_i[x^0]\,.$$

Проблема устойчивости исходов из α-ядра имеет большое практическое значение и направление „переговоров" или игр с обменом информации является наиболее перспективным, к сожалению существует различное понятие устойчивости в смысле выбора самого исхода x^0. Мы придерживаемся точки зрения, что, как-бы образуется первоначально коалиция всех игроков, которые принимают определенные правила игры, но вполне все-таки не доверяют друг другу.

Основным направлением в этой области наверное либо искать более общие информационные расширения (понятие к сожалению нигде точно не определено) или пытаться апроксимировать игры играми со специальной функцией выигрыша.

Неестественное ограничение множества стратегии или ввод нового игрока в игру, как предлагается в [2] не есть решение исходной проблемы.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Я очень признателен доценту В. В. Морозову, к.ф.м.н., за ценные советы и коментарии по поводу окончательной версии настоящей статьи. За существенные замечания я признателен и к.ф.м.н. М. Марэшу.

(Поступило в редакцию 27 января 1981.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. С. Кукушкин, В. В. Морозов: Теория неантагонистических игр. Издательство МГУ, Москва 1977.

[2] N. Howard: The core of a game is the set of strong metaequilibrium. Cahiers Centre Études Rech. Opér. *21* (1979), 1, 23—41.

[3] R. Aumann: The core of a cooperative game without side payment. Trans. Amer. Math. Soc. *98* (1961), 3, 539—552.

[4] А. А. Васин, В. А. Гурвич: Коалиционные ситуации равновесия в мета-играх. Вестник Московского гос. университета — часть мат.-кибернетика. Москва (1980), 3, 38—44.

[5] Н. С. Кукушкин: Равновесия по Нэшу и оптимальность по Парето в информационных расширениях непрерывных игр двух лиц. Издательство АН СССР — тех. кибернетика. Москва (в печати).

[6] N. Howard: General metagames: an extension of the metagame concept. In: Game Theory as a Theory of Conflict Resolution (Rapoport, ed.), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1974, 261—283.

Milan Berka, CSc., Zápotockého 1006, 708 00 Ostrava-Poruba. ЧССР.