

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ВИЛЬЯМ В. КАЗАКЕВИЧ, ИВАН А. МОЧАЛОВ

Синтезируются адаптивные алгоритмы поиска экстремума инерционного объекта с последовательным накоплением. Для уменьшения инерционности применяется ускоренный метод прогнозирования установившегося значения выхода. Анализируется сравнительная эффективность разработанных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Точность работы импульсного экстремального регулятора (ИЭР) зависит от уровня помех в канале измерения выхода объекта. Эффективным способом борьбы с ними при экстремальном регулировании инерционного объекта является применение метода накопления измерений его выхода за время протекания переходного процесса с последующей обработкой их по методу наименьших квадратов, предложенным Казакевичем [1]. Большой интерес представляет применение последовательного анализа, разработанного Вальдом [2], для фильтрации помех, так как заданная вероятность правильного решения о направлении поискового смещения достигается с наименьшим в среднем числе измерений.

В настоящей работе исследуются последовательные алгоритмы с прогнозированием по методу наименьших квадратов (МНК) установившегося значения выхода инерционного объекта оптимизации и анализируется их сравнительная эффективность.

СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Пусть объект можно представить в виде эквивалентной нелинейной части со статической характеристикой

$$y^* = f(x)$$

и эквивалентной линейной части, описываемой дифференциальным уравнением

$$T\dot{y}_{\text{ист}} + y_{\text{ист}} = f(x),$$

где $y_{\text{ист}}$ — истинное значение выходной величины (выход); x — входная величина (вход) объекта регулирования; T — постоянная времени объекта, которая предполагается известной величиной. Относительно помехи $\varphi(t)$, действующей на выходе, предполагается, что она является аддитивным стационарным случайным процессом с математическим ожиданием

$$E\{\varphi(t)\} = 0$$

и известной дисперсией

$$D\{\varphi(t)\} = \sigma^2 < \infty.$$

Будем рассматривать импульсный способ регулирования с разнесением во времени рабочими Δx_i и пробными Δ поисковыми смещениями; здесь

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad |\Delta x_i| = \text{const}, \quad \Delta = \text{const}; \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Рассмотрим промежуток времени $[t_{00}, t_{01}]$ — (нулевой такт нулевого цикла работы ИЭР),

$$t_{01} = t_{00} + (2n - 1)\tau,$$

где $\tau > \tau_k$ — время корреляции помехи. Если состояние объекта в момент

$$t = t_{00} = 0$$

характеризовалось величинами $x_0, y_0 \neq f(x_0)$ и в этот момент было произведено нулевое мгновенное пробное поисковое смещение Δ , то с учетом $\varphi(t)$ при $t \geq 0$ динамика объекта описывается уравнением

$$E\{y_{00}/\bar{t}_{00}\} = f_0(x_0) - a_{00} \exp(-\bar{t}_{00}/T),$$

где $\bar{t}_{00} = t - t_{00}$; $E\{y_{00}/\bar{t}_{00}\}$ — условное математическое ожидание отклика

$$y_{00}(t) = y_{00\text{ист}}(t) + \varphi(t);$$

$$a_{00} = f_0(x_0) - y_0.$$

Если в момент t_{01} произвести первое пробное смещение

$$\Delta - 2\Delta = -\Delta,$$

то в промежутке времени $[t_{01}, t_{02}]$ — (первый такт нулевого цикла работы ИЭР) с учетом $\varphi(t)$ на выходе появится отклик $E\{y_{01}/\bar{t}_{01}\}$, где $\bar{t}_{01} = t - t_{01}$ и т.д. Рассмотрим промежуток времени $[t_{0j}, t_{0j+1}]$ — (j -й такт нулевого цикла),

$$t_{0j+1} = t_{0j} + (2n - 1)\tau.$$

Если в момент t_{0j} было произведено j -е пробное поисковое смещение

$$x_0 + (-1)^j \Delta,$$

то с учетом $\varphi(t)$ на выходе появится j -й отклик

$$(1) \quad E\{y_{0j}/\bar{t}_{0j}\} = f_0[x_0 + (-1)^j \Delta] - a_{0j} \exp(-\bar{t}_{0j}/T),$$

где

$$j = 1, 2, \dots, m; \quad \bar{t}_{0j} = t - t_{0j};$$

$$a_{0j} = f_0[x_0 + (-1)^j \Delta] - y_{0j-1}^*;$$

y_{0j-1}^* — значение отклика

$$E\{y_{0j-1}/\bar{t}_{0j-1}\} \quad \text{в момент времени} \quad \bar{t}_{0j-1} = (2n - 1) \tau.$$

Если в j -м такте нулевого цикла в моменты времени

$$\bar{t}_{0j} = 0, \bar{t}_{0j} = \tau, \dots, \bar{t}_{0j} = (2n - 1) \tau$$

произвести $n > 2$ измерений отклика y_{0j} , то с помощью МНК можно найти две оценки

$$\hat{f}_0^{1,2}[x_0 + (-1)^j \Delta] = \hat{f}_{0j}^{1,2}$$

неизвестного параметра

$$f_0[x_0 + (-1)^j \Delta]$$

уравнения регрессии (1). Так как при $n > 2$ определитель информационной матрицы Фишера строго больше нуля, то получим соответствующие пропорциональные величины

$$\bar{f}_{0j}^{1,2} = d \cdot \hat{f}_{0j}^{1,2}.$$

Таким образом, на каждое пробное поисковое смещение входа по результатам измерений соответствующих откликов по МНК определяются величины

$$\bar{f}_{01}^{1,2}, \bar{f}_{02}^{1,2}, \dots, \bar{f}_{0j}^{1,2}, \dots, \bar{f}_{0m}^{1,2}.$$

Здесь \bar{f}_{0j}^1 получена по четным замерам, а \bar{f}_{0j}^2 по нечетным.

Рассмотрим случайную величину W_{0j}

$$(2) \quad W_{0j} = \begin{cases} 1, & \text{если } (-1)^{j+1} (\bar{f}_{0j}^2 - \bar{f}_{0j+1}^1) > 0, \\ 0, & \text{если } (-1)^{j+1} (\bar{f}_{0j}^2 - \bar{f}_{0j+1}^1) \leq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Тогда получится последовательность случайных величин

$$W_0 = \{W_{0j}\},$$

в которой W_{0j} принимает значение 1 и 0 с вероятностями p соответственно, величины которых не изменяются при изменении индекса j . Поэтому W_0 имеет биномиальное распределение. Для определения направления рабочего поиско-

вого смещения ИЭР производит статистический анализ последовательности W_0 . С этой целью используется последовательный критерий отношения вероятностей для проверки сложных конкурирующих гипотез H_0, H_1 о величине неизвестного параметра p биномиального распределения

$$H_0 : p \leq p_0 ; \quad H_1 : p > p_1 ,$$

где p_0, p_1 — заданные числа;

$$p_0 + p_1 = 1 ; \quad p_0 < p_1 .$$

Пусть характеристика

$$y^* = f(x)$$

является унимодальной зависимостью, имеющей максимум; ИЭР совершает смещения входа относительно рабочей точки x_n по закону

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} |A| , \quad n = 1, \dots, m ,$$

анализируется накопленная статистика и по результатам анализа принимается решение о направлении очередного рабочего смещения и т.д. В i -м цикле алгоритм работы управляющей части ИЭР получается по общей методике последовательной проверки статистических гипотез, примененной к частному случаю: задаче о проверке среднего значения биномиального распределения, рассмотренной Вальдом [2]. Вычисляя по этой методике отношение вероятностей, преобразовывая его с учетом

$$p_0 + p_1 = 1 ,$$

получим алгоритм работы ИЭР в виде

$$(3) \quad \Delta x_i = C \operatorname{sign} V_i ,$$

где C — некоторая константа, причем $C > 0$, если

$$y^* = f(x)$$

имеет максимум;

$$V_i = \begin{cases} 1, & \text{если } 2h - m + 1 \geq A \\ 0, & \text{если } B < 2h - m + 1 < A \\ -1, & \text{если } 2h - m + 1 \leq B \end{cases}$$

$$A = \frac{\ln [(1 - \beta)/\alpha]}{\ln (p_1/p_0)} ; \quad B = \frac{\ln [\beta/(1 - \alpha)]}{\ln (p_1/p_0)} ;$$

α, β — вероятности ошибок I и II рода соответственно (в данном случае вероятность ложного рабочего поискового смещения); h — количество единиц в W_i .

Выбор четырех величин: p_0, p_1, α, β определяется из практических соображений.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Представляет интерес сравнение (3) – последовательного алгоритма с прогнозированием по МНК установившегося значения выхода (Алгоритм 1) с последовательным алгоритмом, в котором в каждом такте производится 4 измерения соответствующего отклика, т.е. без использования накоплений и последующей обработки их по МНК (Алгоритм 2). Пусть

$$y^* = |x - a|, \quad a > 0,$$

тогда в качестве критерия сравнения используем величину среднего времени поиска на одно рабочее поисковое смещение \hat{T}_0^* . Если поиск начинается на левой ветви характеристики, то величина

$$(4) \quad \hat{T}_0^* = \frac{\hat{T}_0}{N_0 T} = \frac{2\tau n \hat{m}}{T[1 - 2L(p)]},$$

где \hat{T}_0 – среднее время поиска; N_0 – число рабочих поисковых смещений от начального состояния до окрестности экстремума; n – число измерений в каждом такте; \hat{m} – среднее число тактов (пробных поисковых смещений); $L(p)$ – оперативная характеристика.

Для зависимости

$$y^* = |x - a|$$

можно положить

$$\alpha = \beta.$$

В работе Вальда [2] получены выражения для величин $L(p)$, \hat{m} . После их преобразования с учетом

$$\alpha = \beta$$

соответственно получим

$$(5) \quad L(p) = \left[1 + \left(\frac{p}{1-p} \right)^A \right]^{-1};$$

$$(6) \quad A = \frac{1 - 2L(p)}{2p - 1} + 1.$$

После подстановки (5), (6) в (4) и преобразований получим при $p = p_1$

$$(7) \quad \hat{T}_0^* = \frac{2\tau}{T} n \left[\frac{A}{2p_1 - 1} + \frac{\exp [A \ln p_1 (1 - p_1)] + 1}{\exp [A \ln p_1 (1 - p_1)] - 1} \right].$$

Предположим, что помеха $\varphi(t)$ имеет нормальное распределение:

$$\varphi(t) \sim N(0, \sigma^2),$$

где σ^2 является известной величиной, тогда согласно работе Казакевича [1] имеем

$$(8) \quad p_1 = p\{W_{ij} = 1\} = 1 - \Phi^*(U),$$

где $\Phi^*(U)$ — интеграл вероятности;

$$U = \frac{f(x_i + \Delta) - f(x_i - \Delta)}{2^{1/2}\sigma}$$

$$\left\{ n - \frac{[1 - \exp(-n\tau/T)][1 + \exp(-\tau/T)]}{[1 + \exp(-n\tau/T)][1 - \exp(-\tau/T)]} \right\}^{1/2}$$

При расчетах по (7), (8) выбирались следующие исходные данные: $\Delta = 0,5$; $\tau/T = 0,01$; $\sigma = 0,5$; $1,0$; ...; $2,5$. Для примера зависимость $\hat{T}_0^*(n, \sigma)$ изображена на Рис. 1. Анализ результатов расчетов показал преимущество Алгоритма 1 перед Алгоритмом 2. Действительно Алгоритму 2 соответствуют те точки кривых Рис. 1, которые получаются при $n = 2$. Из представленных кривых видно, что во всех случаях можно указать такое n , при котором Алгоритм 1 дает меньшую величину среднего времени поиска \hat{T}_0^* на одно рабочее поисковое смещение.

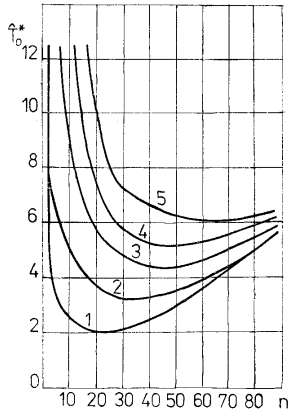


Рис. 1. Зависимость среднего времени поиска \hat{T}_0^* на одно рабочее поисковое смещение от количества измерений n в каждом такте при различных значениях σ : 1 — 0,5; 2 — 1,0; 3 — 1,5; 4 — 2,0; 5 — 2,5.

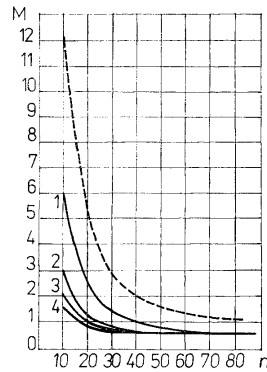


Рис. 2. Зависимость точности M поддержания экстремума от количества n измерений в каждом такте при $\tau/T = 0,01$; $\sigma = 1,5$. Кривые 1 — $A = 1$; 2 — $A = 2$; 3 — $A = 3$; 4 — $A = 4$. (— — —) Алгоритм 2, (—) Алгоритм 1.

В работе Казакевича [3] анализируется алгоритм, в котором установившееся значение определяется по МНК, без использования пробных поисковых смещений (Алгоритм 2). Сравним Алгоритм 1 (3) с Алгоритмом 2 по величине точности M , поддержания экстремума. Для (3) при $p = p_1$ величина M равняется

$$(9) \quad M = \Delta \left\{ 1 + \frac{0,5 L(p_1)}{1 - 3 L(p_1) + 2 L^2(p_1)} \right\}.$$

Для Алгоритма 2 M имеет вид

$$(10) \quad M = \Delta x_i \left\{ 1 + \frac{0,5(1 - p_1)}{1 - 3(1 - p_1) + 2(1 - p_1)^2} \right\}.$$

При расчетах по (9), (10) величины Δx_i и пробных Δ поисковых смещений определялись из условия равенства приращений качества в обоих алгоритмах. Это позволило поставить их в равные условия по размерам исследуемой области в окрестности рабочей точки — $\Delta x_i = 1$; $\Delta = 0,5$. На Рис. 2 представлена зависимость $M(n)$, которая показывает преимущество Алгоритма 1 перед Алгоритмом 2. С увеличением порога A это преимущество увеличивается.

(Поступило в редакцию 8 ноября 1978.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Казакевич, И. Мочалов: О количестве измерений при экстремальном управлении инерционными объектами первого порядка. Автоматика и телемеханика (1973), 10, 109—115.
 [2] А. Вальд: Последовательный анализ. Физматгиз, Москва 1960.
 [3] В. Казакевич, И. Мочалов: Статистическое исследование некоторых алгоритмов управления инерционными объектами оптимизации при наличии дрейфа. Автоматика и телемеханика (1974), 11, 49—56.

*Проф. В. В. Казакевич, д.т.н., Всесоюзный заочный машиностроительный институт Министерства Высшего образования РСФСР, Москва 5, ул. Бабьевская д. 3а, СССР.
 И. А. Мочалов, д.т.н., 113208 Москва М-208, Сумская ул., д. 6, корп. 2, кв. 241, СССР.*