KYBERNETIKA — ТОМ *16* (1980), ВЫПУСК 6

# Устойчивые компромиссы в одной арбитражной игре

Милан Берка

В настоящей статье рассмотрена одна игра с арбитром. Доказаны необходимые и достаточные условия существования ситуации равновесия для конкретного исхода игры. Показано также, что любой исход являющийся ситуацией равновесия оптимален по Парето. Доказано существование ситуации равновесия на достаточно широком классе множеств исходов.

К сожалению приходится констатировать, что принципы оптимальности по Парето и устойчивости решения в теории угр находятся в определенном противоречии. Примером тому может служить игра, известная под названием „дилемма заключенного“ [1]. Существуют в принципе два пути, как это противоречие устранить. Одним является введение в игру обмена информации [2], [3], другим путем является использование арбитра при выборе решения из переговорного множества [6].

В статье [4] была определена игра двух лиц с „подкупом“ арбитра, были доказаны необходимые и достаточные условия существования ситуации равновесия для конкретного исхода игры. Было доказано, что на множестве возможных ситуаций равновесия существует наилучшая, т. е. такая, которая дает наибольший выигрыш обоим игрокам.

В статье [5] было сделано обобщение на случай трех игроков. К сожалению оказалось, что эти замечательные свойства здесь уже не имеют места. Остался открытым и вопрос существования ситуации равновесия в произвольной игре.

Настоящая статья обобщает результаты [4] и [5] и приводит доказательство существования ситуации равновесия на достаточно широком классе множеств выборов.

Определим данную арбитражную игру:

Пусть задано компактное множество $\boldsymbol{P}$ в $n$-мерном пространстве с фиксированной системой координат. Каждый элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$ интерпретируется, как допустимый вектор выигрыша. Игрок „$i$“ при решении игры $\boldsymbol{x}$ получает $x_i$; условных единиц.

До выбора решения выбирает каждый игрок некоторую функцию от собственного выгрыша $\varphi_i(x_i)$ и эту предлагает арбитру в качестве вознаграждения. Арбитр максимимизирует свой выигрыш и выбирает

$$x \in \operatorname{Arg}\max_{P} \{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \} ,$$

где $y \in \operatorname{Arg}\max\limits_{M} F(x)$ тогда и только тогда, когда $F(y) = \max\limits_{M} F(x)$.

## 1. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНКРЕТНОГО ИСХОДА ИГРЫ

Будем предполагать, что $\varphi_i(x_i)$ определена для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$ и пусть кроме этого:

1A) $x_i \geqq \varphi_i(x_i) \geqq 0 \quad \forall x_i : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$

2A) если $x_i \geqq y_i$ то $\varphi_i(x_i) \geqq \varphi_i(y_i)$ и $\varphi_i(x_i)$ – полунепрерывная сверху функция. (Для функции одной переменной это значит, что точкой разрыва может быть лишь такая точка из области определения в которой $\max \{ \lim\limits_{x \to b+0} f(x), \lim\limits_{x \to b-0} f(x) \} = f(b)$.)

Заметим, что эти предположения вполне естественны.

**Определение 1.** Ситуацией равновесия будем называть набор $(\bar{x}, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$, для которого выполнено:

1) $$\sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(x) , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$$

2) $$\forall \varphi_k , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \operatorname{Arg}\max_{P} \{ \varphi_k(x_k) + \sum_{\substack{i \neq k \\ i=1}}^{n} \bar{\varphi}_i(x_i) \}$$

$$x_k - \varphi_k(x_k) \leqq \bar{x}_k - \bar{\varphi}_k(\bar{x}_k) , \quad \forall k = \overline{1, n}$$

**Определение 2.** Точкой равновесия будем называть вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$, для которого найдется набор $(\boldsymbol{x}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, который является ситуацией равновесия по Определению 1.

Введем следующие обозначения:

$(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ – упорядоченная по возрастанию последовательность индексов;

$$f_i(\bar{x}_{i_1 l_1}, \ldots, \bar{x}_{i_{n-1} l_{n-1}}) = \max_{\substack{x_{i_m} \geqq \bar{x}_{i_m l_m} \\ m = \overline{1, n-1}}} x_i , \quad 0 < i_m \leqq n , \quad 0 \leqq l_m \leqq n ,$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} x_i^* , \quad x_i^* = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) , \quad \bar{x}_{kk} = \bar{x}_k , \quad x_{i0}^* = \bar{x}_{i0} = 0 ;$$

$$\Lambda = \{((i_m, l_m), m = \overline{1, n-1})\} ,$$

каждый конкретный набор из $\Lambda$ будем обозначать через $\lambda_p$. Положим $\max\limits_{\emptyset} A = -\infty$, через $\boldsymbol{P}_k$ будем обозначать проекцию множества $\boldsymbol{P}$ на гиперплоскость $x_k = 0$.

Определим множество

$$\Theta = \{((\bar{x}_{i_1k}, \ldots, \bar{x}_{i_{n-1}k}) \in \boldsymbol{P}_k, (x_{i_1k}^*, \ldots, x_{i_{n-1}k}^*)) : k = \overline{1, n};\ i_m \neq k\}$$

пусть для его элементов выполнены следующие условия

1) $\sum\limits_{m=1}^{n-1} x_{i_mk}^* = D , \quad 0 \leqq x_{i_mk}^* \leqq \bar{x}_{i_mk} ;$

2) если $\bar{x}_{ki_m} \leqq \bar{x}_{ki_n}$ то $x_{ki_m}^* \leqq x_{ki_n}^*$ $\forall k, i_m, i_n$.

**Определение 3.** Пусть набор $(\boldsymbol{x}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ является ситуацией равновесия и для $\Theta$ выполнены условия 1), 2) из Определения 2 и для $i_n, i_m = k$ и кроме этого

3) Если $f_i(\bar{x}_{i_1l_1}, \ldots, x_{i_{n-1}l_{n-1}}) \geqq x_{i_nl_n}$ то $\sum\limits_{p=1}^{n} x_{i_pl_p}^* \leqq D$ ;

4) $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} x_k^* \geqq \max\limits_{\lambda_p \in \Lambda} \{f_i(\bar{x}_{i_1l_1}, \ldots, \bar{x}_{i_{n-1}l_{n-1}} + \sum\limits_{\lambda_p} x_{i_ml_m}^*\} - \bar{x}_i$ ;

тогда элементы множества $\Theta$ будем называть наказанием и вектор $(x_{i_1k}, \ldots$ $\ldots, x_{i_{n-1}k}, x_k) \in \boldsymbol{P}$ точкой наказания.

**Теорема 1.1.** Пусть задан набор $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^*)$, такой, что $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$ и для любого $i : 0 \leqq x_i^* \leqq \bar{x}_i$. Функции $\bar{\varphi}_i$, удовлетвопяющие условиям 1А) 2А) и такие, что $x_i^* = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i)$ и набор $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ является ситуацей равновесия по Определению 1, существуют тогда и только тогда, когда существует множество $\Theta$, для которого выполнены условия 1) – 4) из Определения 3.

Доказательство. *1) Необходимость.*

а) Пусть $\bar{\varphi}_i(x_i)$ искомые функции удовлетворяющие Определению 1. Обозначим $D^* = \max\limits_{P} \{\sum\limits_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(x_i)\}$. Если $D^* > D$, то $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ не является ситуацией равновесия, ибо не выполнено условие 1) Определения 1. Если $D^* < D$ и $x_1^* > 0$, то можно ввести функцию

$$\tilde{\varphi}_1(x_1) = \begin{cases} 0 , & x_1 < \bar{x}_1 \\ \bar{\varphi}_1(x_1) - \varepsilon , & x_1 \geqq \bar{x}_1 \end{cases} , \qquad \varepsilon < \min\{D - D^*, x_1^*\} , \quad \varepsilon > 0 ,$$

Здесь $x \in \operatorname*{Argmax}_{P} \{\tilde{\varphi}_1(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(x_i)\}$ и $\tilde{x}_1 - \tilde{\varphi}_1(\tilde{x}_1) > \bar{x}_1 - \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1)$ это противоречие с условием 2) Определения 1. В случае $D^* < D$ и $x_1^* = 0$, $D^* \geqq \sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) = D$ и не может быть $D^* < D$. Значит $D^* = D$.

б) Выберем $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \operatorname*{Argmax}_{P} \{\sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(x_i)\}$. Положим $\bar{x}_{i1} = \tilde{x}_i$, $x_{i1}^* = \bar{\varphi}_i(\tilde{x}_i)$ $\forall i = \overline{2, n}$ и аналогично можно поступать и в остальных случаях. Выполнение условий 1) – 2) Теоремы 1.1. Вытекает из построения системы $\Theta$.

в) Пусть нарушается условие 4) Теоремы 1.1. и пусть набор $(l_1^0, \dots, l_{n-1}^0)$ такой, для которого максимальная правая часть неравенства 4). Без ограничения общности будем предполагать, что $i = 1$. Тогда

$$\sum_{i=2} x_i^* < f_1(\bar{x}_{2l_1^0}, \dots, \bar{x}_{nl_{n-1}^0}) + \sum_{i=2}^{n} x_{il_{i-1}^0}^* - \bar{x}_1$$

$$\bar{x}_1 - x_1^* < \max \quad x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_{il_{i-1}^0}^* - D$$

где max берется для $x_{il_{i-1}^0}$ и $i = \overline{2, n}$.

Положим

$$\varepsilon = f_1(\bar{x}_{2l_1^0}, \dots, \bar{x}_{nl_{n-1}^0}) + \sum_{i=2}^{n} x_{il_{i-1}^0}^* - D - \bar{x}_1 + x_1^* > 0$$

пусть $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{Argmax} x_1$ для $x_i \geqq \bar{x}_{il_{i-1}^0}$ и $i = \overline{2, n}$ и положим

$$\varphi_1(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 < \tilde{x}_1 \\ D - \sum_{i=2}^{n} x_{il_{i-1}^0}^* + \varepsilon/2, & x_1 \geqq \tilde{x}_1 \end{cases}$$

в этом случае

$$\tilde{x}_1 - \varphi_1(\tilde{x}_1) > \bar{x}_1 - \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) \quad \text{и} \quad \varphi_1(\tilde{x}) + \sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(\tilde{x}_i) = \max_{P} \{\varphi_1(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(x_i)\}$$

и это противоречит условию 1) Определения 1.

г) Пусть нарушается условие 3) Теоремы 1.1. Неравенство $f_n(\bar{x}_{1l_1}, \dots, \bar{x}_{n-1 l_{n-1}}) \geqq \bar{x}_{nl_n}$ обозначает, что существует такая точка $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{P}$, для которой $\tilde{x}_i \geqq \bar{x}_{il_i}$ и $\sum_{i=1}^{n} x_{il_i}^* > D$, но тогда $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\tilde{x}_i) > D = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$ и не выполняетця условие 1) Определения 1.

*2) Достаточность.*

Предположим, что выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда можно построить стратегии игроков следующим образом:

$$\bar{\varphi}_i(x_i) = \max_{j: x_i \geqq \bar{x}_{ij}} x_{ij}^*$$

Докажем, что набор $(\bar{x}, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ является ситуацией равновесия. 

а) Предположим, что существует точка $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ такая, что $\sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) > D$. Пусть

$$0 \leqq x_{il_i} \leqq \bar{x}_i\,, \quad i = \overline{1, n-1}\,, \quad l_i \in \operatorname{Argmax} j \quad \text{для} \quad j : \bar{x}_{ij} \leqq \bar{x}_i\,,$$

в этом случае $\bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) = x^*_{il_i}$. По нашему предположению существует $\bar{x}$ : $: \bar{\varphi}_n(\bar{x}_n) > D - \sum_{i=1}^{n-1} x_{il_i}$, потому, что $\varphi_i$ – ступенчатые, полунепрерывные сверху функции, найдется номер $l_n : x^*_{nl_n} > D - \sum_{i=1}^{n-1} x^*_{il_i}$, но тогда не выполнено условие 3) Теоремы 1.1.

б) Предположим, что существует точка $\bar{\bar{x}} \in \boldsymbol{P}$ такая, что

$$\sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) + \tilde{\varphi}_1(\bar{x}_1) \geqq \max_{P} \left\{ \sum_{i=2}^{n} \bar{\varphi}_i(x_i) + \tilde{\varphi}_i(x_1) \right\} \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 - \tilde{\varphi}_1(\bar{x}_1) > \bar{x}_1 - x^*_1$$

В общем случае $0 \leqq x_{i_{l_i}} \leqq \bar{x}_i$, если $l_i \in \operatorname*{Argmax}_{j : \bar{x}_{ij} \leqq \bar{x}_i} j$ то $\varphi_i(\bar{x}_i) = x^*_{il_i}$.

По предположению если

$$\tilde{\varphi}_1(\bar{x}_1) + \sum_{i=2}^{n} x^*_{il_i} \geqq D \quad \text{то} \quad \tilde{\varphi}_1(\bar{x}_1) \geqq D - \sum_{i=2}^{n} x^*_{il_i} \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 \leqq f_1(\bar{x}_{2l_2}, \ldots, \bar{x}_{nl_n})$$

и отсюда (в силу условия 3) Теоремы 1.1) вытекает

$$\bar{x}_1 - D + \sum_{i=2}^{n} x^*_{il_i} > \bar{x}_1 - x^*_1 \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=2}^{n} x^*_i < \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} x^*_{il_i} - \bar{x}_1 \leqq \max_{\lambda_p \in \Lambda} \left\{ f_1(\bar{x}_{i_1 l_1}, \ldots, \bar{x}_{i_{n-1} l_{n-1}}) + \sum_{m=1}^{n-1} x^*_{i_m l_m} \right\} - \bar{x}_1$$

и это противоречие с условием 4) Теоремы 1.1. На этом доказательство теоремы завершено.

**Замечание 1.** Нетрудно сформулировать теоремы, содержащие отдельно необходимые и достаточные условия без помощи множества $\Theta$. Такие теоремы попроще и лучше их можно использовать в тех случаях, когда ситуация явно равновесна или нет. Они формулируются аналогично замечанию 1 в [5].

**Теорема 1.2.** Точки равновесия (если существуют) всегда оптимальны по Парето.

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда существует $\bar{\bar{x}} : \bar{x}_i \leqq \bar{\bar{x}}_i \wedge \exists j : \bar{x}_j < \bar{\bar{x}}_j$. Положим $\varepsilon = \bar{\bar{x}}_j - \bar{x}_j > 0$ и

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} \bar{\varphi}_j(x_j)\,, & x_j < \bar{\bar{x}}_j \\ \bar{\varphi}_j(x_j) + \varepsilon/2\,, & x_j \geqq \bar{\bar{x}}_j \end{cases}$$

 Из монотонности функции $\bar{\varphi}_i$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) < \varphi_j(\bar{\bar{x}}_j) + \sum_{i \neq j} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) \quad \text{и} \quad \bar{\bar{x}}_j - \varphi_j(\bar{\bar{x}}_j) > \bar{x}_j - \bar{\varphi}_j(\bar{x}_j)$$

и это противоречит Определению 1. В данном случае несуществует в точке $\bar{x}$ никакая ситуация равновесия и это противоречит нашему предположению.

**Теорема 1.3.**

$$D \leqq \min_{k=1,n} \max_{P} \{ \sum_{\substack{i \neq k \\ i=1}}^{n} x_i \}$$

Доказательство. Если предположить обратное неравенство, то заведомо не существует такое множество $\Theta$, чтобы $\sum_{i=1, i \neq k}^{n} x_{ik}^* = D$ для любого $k$. Это противоречие и теорема доказана.

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОМПАКТНЫМ МНОЖЕСТВОМ $P$

Доказательство можно провести в общем случае, но поскольку ограничена длина статьи и следует иметь в виду и наглядность изложения проведем доказательство при некоторых ограничениях.

1В) Пусть $n = 3$.

2В) Пусть $\operatorname{Argmax}_{P} x_i = (0, x_i^m, 0)$.

3В) Пусть $\operatorname{Argmax}_{P} \{ \sum_{\substack{i \neq k \\ i=1}}^{3} x_i \} = \{ x \in P : x_k = 0 \} = A_k$.

Обозначим

$$\bar{x} \in \operatorname{Argmax}_{P} \{ \sum_{i=1}^{3} x_i \}, \quad x^k = (x_{ik}, x_{jk}, 0) \in A_k,$$

$$m_k = x_{ik} + x_{jk}, \quad M = \max_{P} \{ \sum_{i=1}^{3} x_i \}.$$

Введем следующие системы неравенств.

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} \text{a)}\ x_1^* + x_2^* \geqq x_2^m - \bar{x}_3 & \text{d)}\ x_1^* + x_2^* \geqq x_{31} + x_{21}^* - \bar{x}_3 \\ \text{b)}\ x_2^* + x_3^* \geqq x_1^m - \bar{x}_1 & \text{e)}\ x_2^* + x_3^* \geqq x_{12} + x_{32}^* - \bar{x}_1 \\ \text{c)}\ x_1^* + x_3^* \geqq x_2^m - \bar{x}_2 & \text{f)}\ x_1^* + x_3^* \geqq x_{21} + x_{31}^* - \bar{x}_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{g)}\ x_1^* + x_2^* \geqq x_{32} + x_{12}^* - \bar{x}_3 \\ \text{h)}\ x_2^* + x_3^* \geqq x_{13} + x_{23}^* - \bar{x}_1 \\ \text{i)}\ x_1^* + x_3^* \geqq x_{23} + x_{13}^* - \bar{x}_2 \end{array}$$

$$j)\ x_i^* + x_j^* \geqq \max_{\substack{x_i \geqq x_{im} \\ x_j \geqq x_{jl}}} x_k + x_{lm}^* + x_{jl}^* - \bar{x}_k\,, \quad m = k, j; \quad l = k, i.$$



$$(2) \qquad \begin{aligned} &a)\ x_1^* \geqq x_{21} + x_{31} - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 = m_1 - M + \bar{x}_1 \geqq 0 \\ &b)\ x_2^* \geqq x_{12} + x_{32} - \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = m_2 - M + \bar{x}_2 \geqq 0 \\ &c)\ x_3^* \geqq x_{13} + x_{23} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = m_3 - M + \bar{x}_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

**Лемма 2.1.** Из системы (1d) – (1i) вытекает система неравенств (2).

Доказательцтво. Докажем это, например, для неравенства (2a), складывая (1d) и (1f) получаем

$$x_1^* + D \geqq x_{31} + x_{21} + x_{31}^* + x_{21}^* - \bar{x}_3 - \bar{x}_2\,, \quad x_1^* \geqq m_1 - M + \bar{x}_1\,.$$

Так, как $\bar{\mathbf{x}}$, $(0, x_{21}, x_{31})$ точки оптимальные по Парето, то $x_{31} + x_{21} \geqq \bar{x}_3 + \bar{x}_2$ и $m_1 - M + \bar{x}_1 \geqq 0$ и это все, что нужно было доказать.

**Лемма 2.2.** Выполнение неравенств типа

3) $x_i^* + x_j^* \geqq \max\limits_{x_i \geqq x_{im}} x_k + x_{im}^* - \bar{x}_k$ вытекает из системы неравенств (1d) – (1i) и (2).

Доказательство. Из

$$x_i^* + x_j^* \geqq \max_{x_i \geqq x_{im}} x_k + x_{im}^* - \bar{x}_k$$

и из (1d) – (1i) вытекает

$$x_j^* \geqq \max\left\{x_{ij} + x_{kj},\ \max_{x_k \geqq x_{kl}} x_i + x_{kl},\ \max_{x_i \geqq x_{im}} x_k + x_{im}\right\} - \bar{x}_i - \bar{x}_k =$$

$$= x_{ij} + x_{kj} - \bar{x}_i - \bar{x}_k = m_j - M + x_j$$

кроме этого очевидно, что: „Если $x_{im}^*$ удовлетворяет системе (1d) – (1i), то удовлетворяется и (3)“.

Если $m = i$, то $x_k^* \geqq \max\limits_{x_i \geqq \bar{x}_i} x_j - \bar{x}_j$ и с помощью 3В:

$$\max_{x_i \geqq \bar{x}_i} x_j \leqq x_{ij} + x_{kj} - \bar{x}_i$$

и отсюда, используя Лемму 2.1. получаем требуемое.

**Лемма 2.3.** Если выполнено условие 3В, то неравенства

$$x_i^* + x_j^* \geqq \max_{\substack{x_i \geqq x_{ik} \\ x_j \geqq x_{jk}}} x_k + x_{ik}^* + x_{jk}^* - \bar{x}_k$$

всегда выполняются.

Доказательство. $\bar{x}_k \geqq x_k^*$, $D - x_k^* \geqq D - \bar{x}_k$, $\max\limits_{x_i \geqq x_{ik}, x_j \geqq x_{jk}} x_k = 0$ и $x_{ik}^* + x_{jk}^* = D$ и дальше все очевидно.

**Лемма 2.4.**

$$x_j^* \geqq \max_{\substack{x_i \geqq \bar{x}_i \\ x_j \geqq x_{jk}}} x_k + x_{jk}^* - \bar{x}_k$$

Доказательство.

$$\max_{\substack{x_i \geqq \bar{x}_i \\ x_j \geqq x_{jk}}} x_k \leqq \max_{x_j \geqq x_{jk}} x_k$$

это очевидно и остальное доказывается аналогично Лемме 2.2.

**Лемма 2.5.** Из условия 2В вытекают неравенства (1a) – (1c).

Доказательство тривиально.

**Теорема 2.6.** Система неравенств (1a) – (1j) является при условиях 1В) – 3В) эквивалентна условию 4) Теоремы 1.1.

Доказательство. Доказательство того, что из 4) вытекает (1) очевидно и состоит в явном определении $\lambda_p$, при которых 4) переходит в (1). Мы эти выкладки для краткости приводить не будем.

Доказательство обратного утверждения, т. е. что из (1) вытекает выполнение всех неравенств 4) Теоремы 1.1 проводится с использованием Лемм 2.1 – 2.5, которые исчерпывают все варианты неравенства 4).

**Теорема 2.7.** Если

$$m_i + m_j - M \geqq x_k^m \quad \forall i, j, k : i \neq j \neq k \neq i$$

то можно быбрать множество $\Theta$ и $x_i^*$ следующим образом

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}, x_{ij}^* = m_i - M + x_{ij}, \quad \forall i, j .$$

В этом случае вектор $\bar{x}$ является точкой равновесия по Определению 2.

Доказательство. Нетрудно проверить, что выполнены все условия Теоремы 2.6. Докажем, что выполняется условие 3) Теоремы 1.1.

$$D^* = x_{im}^* + x_{jl}^* + x_k^* = m_1 + m_2 + m_3 - 2M + x_{im} + x_{jl} - \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

$$D = m_1 + m_2 + m_3 - 2M .$$

Предположим: $f_k(x_{im}, x_{jl}) \geqq \bar{x}_k$ если $x_{im} + x_{jl} \leqq \bar{x}_i + \bar{x}_j$, тогда все в порядке потому, что $D^* \leqq D$. Если $x_{im} + x_{jl} > \bar{x}_i + \bar{x}_j$ то $M$ не максимум и это противоречие.

Выполняются и все неравенства $\bar{x}_{ij} \geqq x_{ij}^* \geqq 0$ и $\bar{x}_i \geqq x_i^* \geqq 0$. Несовсем очевидно лишь $x_{ij}^* \geqq 0$, докажем это неравенство. 

Из условии теоремы $m_i + m_j - M \geqq x_k^m \geqq x_{kj}$ отсюда $x_{ij} + m_i - M \geqq 0$ и $x_{ij}^* = x_{ij} + m_i - M \geqq 0$. Очевидно также, что

$$\sum_{i:i \neq j} x_{ij}^* = D = \sum_{i,j:i \neq j} x_{ij} - 2M$$

Докажем выполнение условия 2) Теоремы 1.1.

а) Если $x_{ij} \geqq x_{ik}$, то $x_{ij}^* = x_{ij} + m_i - M \geqq x_{ik} + m_i - M = x_{ik}^*$

б) Если $x_{ij} \geqq \bar{x}_i$, то аналогично $x_{ij}^* \geqq x_i^*$

Сейчас для завершения доказательства можно использовать Теорему 1.1, которая была доказана в § 1. Этим шагом мы завершили доказательство Теоремы 2.7.

**Теорема 2.8.** Если

$$m_i + m_j - M \leqq x_k^m \quad \forall i, j, k : i \neq j \neq k \neq i$$

то можно построить множество $\Theta$ так, чтобы

$$\Theta = \{((x_1^m, 0)\,, \quad (x_2^m, 0)\,, \quad (x_3^m, 0)\,; \quad (x_i^m)^* = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i^m - M))\}$$

и тогда в точке $\bar{x} \in \boldsymbol{P}$ существует ситуация равновесия и

$$x_i^* = \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3} x_i^m - M) - (x_i^m - \bar{x}_i)\,.$$

Доказательство. Аналогично как в случае доказательства Теоремы 2.7. можно проверить правильность условия Теоремы 2.6 и это значит, что в этом случае выполнено условие 4) Теоремы 1.1. Очевидно выполнено и условие 2). Неочевидны лишь неравенства

$$x_i^m \geqq (x_i^m)^* \geqq 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_i \geqq x_i^* \geqq 0$$

Докажем их:

а) $\sum_{i=1}^{3} x_i^m - M \leqq x_1^m + m_2 + m_3 - M \leqq 2x_1^m$ (Это вытекает из предположения $m_2 + m_3 - M \leqq x_1^m$) и следовательно $x_1^m \geqq \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3} x_i^m - M)$.

б) Неравенство $(x_i^m)^* \geqq 0$ вытекает из допущения о множестве $\boldsymbol{P}$.

в) Если использовать результат пункта а), то

$$x_i^* = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i^m - M\Big) - x_i^m + \bar{x}_i \leqq \bar{x}_i$$

$$\tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i^m - M\Big) = D \geqq x_j^* + x_k^* \geqq x_i^m - \bar{x}_i$$

и отсюда $x_i^* \geqq 0$ и это все, что было необходимо доказать.

В проверке условия 3) Теоремы 1.1 нет необходимости, так как его выполнение очевидно, также как и выполнение условия 2).

Сейчас можно использовать Теорему 1.1, которая доказывает наше утверждение.

**Теорема 2.9.** Если

$$m_i + m_j - M \leqq x_k^m, \quad m_j + m_k - M \geqq x_i^m, \quad m_i + m_k - M \geqq x_j^m$$

то можно построить множество $\Theta$ так, что точками наказания являются точки

$$(x_k^m, 0), \quad (x_{ik}, x_{jk}), \quad (x_{ji}, x_{ki}) \quad \text{и} \quad x_{ik}^* = x_k^m - m_j + x_{ik},$$

$$x_{jk}^* = x_{jk} + m_j - M, \quad x_{ij}^* = x_k^m - x_{kj}, \quad x_{kj}^* = x_{kj} + m_k - M,$$

$$(x_k^m)^* = x_k^m + m_k - M$$

и в точке $\bar{x} \in \boldsymbol{P}$ существует ситуация равновесия.

$$(x_i^* = x_k^m - m_j + \bar{x}_i, \quad x_j^* = m_j - \bar{x}_k - x_i, \quad x_k^* = m_k - \bar{x}_i - \bar{x}_j)$$

Доказательство. В этом случае необходимо отдельно рассмотреть неравенство (1j). Проведем этот шаг для $i = 1$, $k = 3$, $j = 2$. Рассмотрим неравенство:

$$x_1^* + x_2^* < \max_{\substack{x_1 \geqq \bar{x}_{1m} \\ x_2 \geqq \bar{x}_{2n}}} x_3 + x_{1m}^* + x_{2n}^* - \bar{x}_3$$

и отсюда

$$0 < \max_{\substack{x_1 \geqq \bar{x}_{1m} \\ x_2 \geqq \bar{x}_{2n}}} x_3 + \bar{x}_{1m} + \bar{x}_{2n} - M$$

и это противоречие с тем, что максимум суммы в точке $\bar{x}$. Аналогично поступаем и в случае остальных возможных индексов. Если $m_2 + m_1 - M \leqq x_3^m$ то $x_3^m - \bar{x}_{21} - \bar{x}_{31} + \bar{x}_2 \geqq m_2 - M + \bar{x}_2 \geqq 0$ и очевидно, что $\bar{x}_i \geqq x_i^* \geqq 0$. Также, очевидно, справедливо и $x_k^m \geqq (x_k^m)^* \geqq 0$.

Условие 3) Теоремы 1.1 проверяется аналогично, как в случае Теоремы 2.7. Докажем условие 2) Теоремы 1.1.

$$x_{ik} \leqq x_{ij} \Rightarrow x_{ik}^* = x_k^m - m_j + x_{ik} \leqq x_k^m - m_j + x_{ij} = x_{ij}^*$$

$$\bar{x}_j \geqq x_{jk} \Rightarrow x_j^* = m_j - M + \bar{x}_j \geqq m_j - M + x_{jk} = x_{jk}^*$$

Условие 1) очевидно выполнено и доказательство справедливости условия 4) Теоремы 1.1 доказывается, как и в предыдущих случаях при помощи Теоремы 2.6.

Условие 3) проверяется аналогично, как в доказательстве Теоремы 2.8.

Таким образом все условия Теоремы 1.1 выполнены и применяя ее, мы доказываем наше утверждение.

**Теорема 2.10.** Если

$$m_i + m_j - M \leqq x_k^m, \quad m_j + m_k - M \leqq x_i^m, \quad m_i + m_k - M \geqq x_j^m,$$

то можно построить множество $\Theta$ из точек $(x_k^m, 0)$, $(x_i^m, 0)$, $(x_{ij}, x_{kj})$ $(x_k^m)^*$, $(x_i^m)^*$, $(x_{ij}^*, x_{kj}^*)$ где:

$$x_{ij}^* = x_{ij} + x_k^m - m_j, \quad x_{kj}^* = x_{kj} + x_i^m - m_j, \quad (x_k^m)^* = (x_i^m)^* = x_i^m + x_k^m - m_j$$

такое, что в точке $\bar{x} \in \boldsymbol{P}$ существует ситуация равновесия.

$$(x_i^* = x_k^m - m_j + \bar{x}_i, \quad x_j^* = x_{ij} + x_{kj} - \bar{x}_i - \bar{x}_j, \quad x_k^* = x_i^m - m_j + \bar{x}_k)$$

Доказательство. Проверка всех условий Теоремы 1.1 с помощью Теоремы 2.6 в этом случае тривиальна. Теорема 1.1, как и раньше доказывает непосредственно Теоремы 2.10.

Сейчас мы можем сформулировать главную теорему данного параграфа.

**Теорема 2.11.** Пусть выполнены ограничения 1B) – 3B) на множество $\boldsymbol{P}$, тогда в точке $\bar{x} \in \operatorname{Argmax}_{\boldsymbol{P}} \{x_1 + x_2 + x_3\}$ всегда существует ситуация равновесия.

Доказательство. Доказательство состоит в разбитии задачи на четыре случая по возможным соотношениям между $m_i$, $M$, $x_i^m$. В каждом конкретном случае можно применить одну из Теорем 2.7–2.10.

**Замечание.** Приведенное выше доказательство является доказательством конструктивным — дает одновременно руководство для построения стратегии, обеспечивающих устойчивость исхода. Необходимо также заметить, что $\bar{x}$ наилучший в смысле минимума суммы $\bar{\varphi}_i(\bar{x}_i)$. В общем случае доказательства необходимо рассмотреть больше вариант, но можно поступать по той же схеме.

## 3. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ НАШЕЙ ИГРЫ

Необходимо заметить, что наша игра является некоторой крайностью реально существующих ситуаций. Хорошо ее можно применить в условиях капиталистической экономики. Примером может служить распределение ресурсов капиталиста между мелких производителей.

В социалистической экономике можно привести пример распределения ресурсов между предприятием некоторым координирующим центром, который улучшает и усиливает свое руководящее положение по принципу максимальной прибыли и определенной взаимной выгодности для всех. Возможна также интерпретация в виде международного банка, который распределяет капитал между государствами при некоторых ограничениях на возможности этого распределения. Ограничением может быть существование договоров, которые не все распределения разрешают.

(Поступило в редакцию 28 декабря 1979.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Б. Гермейер: Введение в исследование операции. Изд. Наука, Москва 1974.
[2] Howard N.: The Mathematics of Meta-Games. General Systems. Philadelphia, 1966.
[3] А. А. Васин, В. А. Гурбич: Коалиционные ситуации равновесия в мета-играх. Вестник МГУ серия мат. кибернетика (в печати).
[4] Н. С. Кукушкин: Устойчивые компромиссы при подкупе арбитра. В книге: Математические модели поведения. Меж. вуз. сборник исп. 4. Изд. Сарат. университета 1978.
[5] М. Берка: Устойчивые компромиссы при подкупе арбитра в играх трех лиц. Меж. вуз. сборник Сарат. университета 1979.
[6] Р. Д. Льюс, Г. Райфа: Игры и решения. Изд. Наука, Москва 1964, (перевод с Английского).

*Милан Берка, аспирант факультета ВМиК, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 123514, г. Москва, Туристская ул., д. 18, кв. 178. СССР.*