

Zur Genauigkeit und Ausgabewerteverlauf im Wurzelmodellieren

KAREL BENEŠ

Beim Analogrechner steht die Genauigkeit der Berechnung im Vordergrund. Während sich lineare Operationen relativ genau modellieren lassen, können die nichtlinearen mittels des Diodenfunktionsgenerators oder des Diodenmultiplikators nur mit kleinerer Genauigkeit modelliert werden. Die vorliegende Arbeit behandelt die Frage der Genauigkeit und des Verlaufes im Wurzelmodellieren.

EINLEITUNG

Die Wurzel $y = \sqrt{x}$ wird durch Auflösung impliziter Gleichung $F(z, x) \equiv -x + z^2 = 0$ modelliert aber gewisse dem Diodenmultiplikator zuzählende Ungenauigkeit entsteht. Das Diodenmultiplikator arbeitet auf Grund der Beziehung $uv = [(u+v)/2]^2 - [(u-v)/2]^2$, wo quadratische Abhängigkeiten durch gewisse Anzahl von n linearen Segmenten approximiert werden.

TEORETISCHER TEIL

Zur Feststellung der Genauigkeit und des Verlaufes von y im Koppelplan laut Abb. 1 suchen wir den Verlauf von y in der Abhängigkeit vom Werte x . Dabei wird im Ergebnisse das Vorzeichenwechsel vorausgesetzt. Der Ungenauigkeit des Multipliziergerätes wegen gilt für den Ausgabewert y des Implikators die Beziehung

$$(1) \quad y \doteq \sqrt{x}$$

Zur Befriedigung der Bedingung, daß die Spannung am Eingang des Implikators beinahe gleich Null ist, muß für den Ausgabewert des Multipliziergerätes (bei ge-

nügender vom Verstärker abhängender Genauigkeit)

(2)

$$u_0 = x$$

gelten.

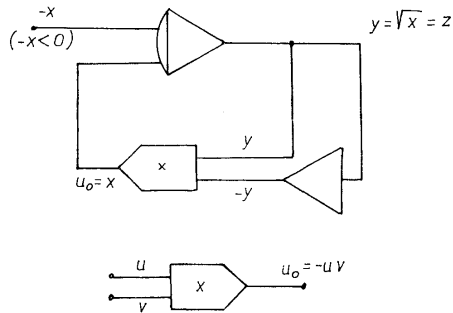


Abb. 1.

Vom bekannten Übertrag des Multipliziergerätes für einzelne Werte der Eingangsgrößen u und v bestimmen wir beim bekannten Wert u den zweiten Eingabewert aus der obigen Bedingung (2). Das Multipliziergerät vermittelt das Produkt aufgrund der Beziehung

$$uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2,$$

wo quadratische Abhängigkeiten durch lineare Abhängigkeiten approximiert werden. Dann ist der Ausgabewert u_0 des Multipliziergerätes unter gleichzeitigen Vorzeichenwechsel gegeben als

$$(3) \quad u_0 = - \left(g_k \left(\frac{u+v}{2} \right) - g_l \left(\frac{u-v}{2} \right) \right),$$

wo g_k und g_l lineare die quadratische Abhängigkeit im k und l Abschnitten approximierende Funktionen. Betrachten wir Approximation einer quadratischen Abhängigkeit durch gebrochene Linie, wo die Brechungspunkte auf dem Graph der approximierten Funktion liegen und die Anzahl von Abschnitten n ist. (Siehe Abb. 2.)

Zur Erfüllung der besten gleichmäßigen Approximation von der quadratischen Abhängigkeit durch gebrochene Linie ist die Brechungspunkte – Verteilung an der Argumentasche äquidistant. (Siehe Abb. 2.)

Der Ausgabewert des Multipliziergerätes darf die Maschineneinheit nicht über-
 treten. Es gilt daher $|u| \leq 1$; $|v| \leq 1$. Nach Abb. 2 nehmen die Funktionen g_k
 $\cdot [(u+v)/2]$, wo $k = 1, 2, \dots, n$ folgende Form an:

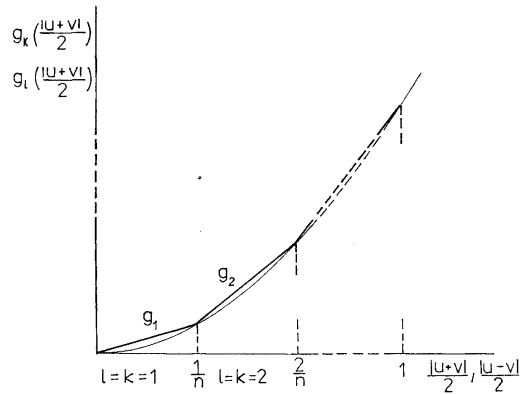


Abb. 2.

$$(4) \quad \begin{aligned} g_1\left(\frac{|u+v|}{2}\right) &= \frac{1}{n} \frac{|u+v|}{2} \\ g_2\left(\frac{|u+v|}{2}\right) &= g_1\left(\frac{|u+v|}{2}\right) + \frac{2}{n} \left(\frac{|u+v|}{2} - \frac{1}{n}\right) \\ g_3\left(\frac{|u+v|}{2}\right) &= g_2\left(\frac{|u+v|}{2}\right) + \frac{2}{n} \left(\frac{|u+v|}{2} - \frac{2}{n}\right) \\ &\vdots \\ g_n\left(\frac{|u+v|}{2}\right) &= g_{n-1}\left(\frac{|u+v|}{2}\right) + \frac{2}{n} \left(\frac{|u+v|}{2} - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich im allgemeinen

$$(5) \quad g_k\left(\frac{|u+v|}{2}\right) = \frac{1}{n} (2k-1) \frac{|u+v|}{2} - \frac{1}{n^2} k(k-1).$$

Der Index k wird durch die Beziehung

$$(6) \quad \frac{j-1}{n} \leq \frac{|u+v|}{2} \leq \frac{j}{n}, \quad k=j, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

bestimmt.

Nach (6) zwei Werte in den Brechungspunkten genügen dem Index k ; der entsprechende Brechungspunkt ist ein gemeinsamer Punkt von den Funktionen

$$g_k\left(\frac{|u+v|}{2}\right) \quad \text{und} \quad g_{k+1}\left(\frac{|u+v|}{2}\right).$$

Nach Abb. 2 erhalten wir ähnlich eine allgemeine Präzisierung

$$(7) \quad g_l\left(\frac{|u-v|}{2}\right) = \frac{1}{n}(2l-1)\frac{|u-v|}{2} - \frac{1}{n^2}l(l-1),$$

$$(8) \quad \frac{j-1}{n} \leq \frac{|u-v|}{2} \leq \frac{j}{n}, \quad l=j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Wiederum gibt es in den Brechungspunkten zwei dem Index l genügende Werte. Nach (3) ist also der Ausgabewert u_0 des Multipliziergerätes gegeben als

$$(9) \quad u_0 = - \left[\frac{1}{n}(2k-1)\frac{|u+v|}{2} - \frac{1}{n^2}k(k-1) - \frac{1}{n}(2l-1)\frac{|u-v|}{2} + \frac{1}{n^2}l(l-1) \right].$$

Nach Abb. 1 gilt im vorliegenden Fall $u = y \geq 0$, $v = -y$, und nach Abb. 2 $g_k(0) = 0$. Danach ist der Ausgabewert u_0 durch die Beziehung

$$(10) \quad u_0 = \frac{1}{n}(2l-1)y - \frac{1}{n^2}l(l-1)$$

gegeben.

Einsetzen von (10) in die Gleichung (2) ergibt

$$(11) \quad x = \frac{1}{n}(2l-1)y - \frac{1}{n^2}l(l-1).$$

Hieraus bestimmt man die Abhängigkeit des Implikator-Ausgabewertes y vom Eingabewert $-x$, d.h.

$$(12) \quad y = \frac{nx}{2l-1} + \frac{l(l-1)}{n(2l-1)}.$$

472 Durch Vergleich von (11) mit (12) ersicht man sofort, daß die Funktion aus (11)

$$(13) \quad Y = \frac{1}{n}(2l-1)x - \frac{1}{n^2}l(l-1)$$

zur Funktion $y = f(x)$ aus (12) invers ist.

Also, die Funktion $z = \sqrt{x}$ ist wieder approximiert durch gebrochene Linie laut (12). Die Brechungspunkte der gebrochenen Linie sind symmetrisch konjugiert längs der Achse, welche den 1. und 3. Quadrant halbiert. (Siehe Abb. 3.)

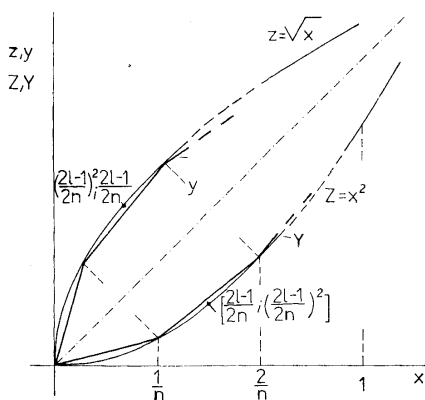


Abb. 3.

Die Brechungspunkte der gebrochenen Linie aus (13) approximieren die quadratische Abhängigkeit $Z = x^2$. Auch hier ist die Funktion $Z = x^2$ zur Funktion $z = \sqrt{x}$ invers. Die Koordinaten von Brechungspunkten der gebrochenen Linie laut Gleichung (12) bestimmen wir dann durch Koordinatenvertauschung von x und y der gebrochenen Linie laut Gleichung (13), welche die Funktion $Z = x^2$ approximiert.

Bei polynomialer Approximation der Funktion $f(x)$ durch die Funktion $g(x)$ im Approximationsintervall $\langle a; b \rangle$ ist die Ungenauigkeit der Approximation durch den Ausdruck

$$(14) \quad \varepsilon(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_m),$$

gegeben, wo x_0, x_1, \dots, x_n die Knoten der Approximation, ζ einen gewissen Punkt im Intervall $\langle a; b \rangle$, und m einen Grad des approximierten Polynoms darstellen. Der maximale absolute Approximationsfehler erfüllt dann die Beziehung

$$(15) \quad |e(x)|_{\max} \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot \varphi(x, x_0, x_1, \dots, x_m),$$

wo $M_{m+1} = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f^{(m+1)}(x)|$, $\varphi(x, x_0, x_1, \dots, x_m) = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)|$.

Bei der Approximation der Funktion durch lineare Abschnitte ist der Fehler laut (14) durch den Ausdruck

$$(16) \quad e(x) = \frac{f''(\zeta)}{2!} (x - x_{l-1})(x - x_l),$$

$$\zeta \in \langle x_{l-1}; x_l \rangle; \quad l = 1, 2, \dots, n$$

gegeben.

Der Ausdruck $(x - x_{l-1})(x - x_l)$ nimmt sein Maximum im Punkt $x = \frac{1}{2}(x_{l-1} + x_l)$ an, so daß laut (15) für den maximalen absoluten Fehlerwert

$$(17) \quad |e(x)|_{\max} \leq \frac{M_2}{2!} \left(\frac{x_l - x_{l-1}}{2} \right)^2,$$

wo $M_2 = \max_{x \in \langle x_{l-1}; x_l \rangle} f''(x)$ gilt.

Wegen dem Vorkommen der zweiten Ableitung der approximierten Funktion in (16) und (17) ist es besser den Approximationsfehler der Funktion $f(x) = Z(x) = x^2$ durch die Funktionen Y_l als den Approximationsfehler der Funktion $z(x) = \sqrt{x}$ durch die Funktionen y_l zu untersuchen. (Siehe Abb. 3). Nun nutzen wir die Tatsache aus, daß die Funktionen $z(x) = \sqrt{x}$ und $Z(x) = x^2$ und die Funktionen $y(x)$ und $Y(x)$ aus (12) und (13) invers sind. Der maximale absolute Approximationsfehler der Funktion $Z(x) = x^2$ durch die Funktionen Y_l lautet nach (16) und (17)

$$(18) \quad |e_{Y_l}(x)|_{\max} = \frac{2}{2!} \left(\frac{x_l - x_{l-1}}{2} \right)^2.$$

Bei der Approximation der besten gleichmäßigen Approximation

$$|e_{Y_1}(x)|_{\max} = |e_{Y_2}(x)|_{\max} = \dots = |e_{Y_n}(x)|_{\max},$$

wird es laut (18) nötig $x_l - x_{l-1} = \text{konst} = 1/n$ zu wählen, wo die Anzahl von linearen Abschnitten darstellt.

Da der Ausdruck $(x - x_{l-1})(x - x_l)$ in (16) sein im Punkt

$$(19) \quad x = \frac{x_{l-1} + x_l}{2} = \frac{2l-1}{2n},$$

annimmt, wird das Maximum des Approximationsfehlers inmittendes betreffenden Abschnittes und der Fehlerwert laut (18) wird

$$(19a) \quad |e_{y_l}(x)|_{\max} = \frac{1}{4n^2} = \varepsilon.$$

Der Approximationsfehler von z durch die Funktionen y_l wird mittels (12) durch die Beziehung

$$(20) \quad e_{y_l}(x) = \sqrt{x} - \frac{nx}{2l-1} - \frac{l(l-1)}{n(2l-1)}$$

gegeben.

Aus der Bedingung $de_{y_l}/dx = 0$ bestimmen wir die x -te Koordinate vom Punkte, in welchem der größte Approximationsfehler eintritt, d.h.

$$(21) \quad x = \left(\frac{2l-1}{2n}\right)^2.$$

Nach (19) und (21) sind die Punkte des maximalen Approximationsfehler im betreffenden Abschnitte auch längs der Axis konjugiert, welche den 1. und 3. Quadrant halbiert. (Siehe Abb. 3.)

Der maximale Fehlerwert im l -ten Abschnitte wird durch die Beziehung

$$(22) \quad (\varepsilon_{y_l})_{\max} = z \left(\frac{2l-1}{2n}\right)^2 - y \left(\frac{2l-1}{2n}\right) = \frac{2l-1}{2n} - n \left(\frac{2l-1}{2n}\right)^2 \\ = \frac{1}{2l-1} - \frac{l(l-1)}{n(2l-1)} = \frac{1}{n} \left(\frac{2l-1}{4} - \frac{l^2-1}{2l-1}\right).$$

gegeben.

Den Verlauf des Approximationsfehlers in Abhängigkeit von der Ordnungszahl des Abschnittes l bestimmen wir vermöge der 1. Ableitung vom Fehler ε_y , nach l , d.h.

$$(23) \quad \frac{d\varepsilon_y}{dl} = \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{2} + \frac{2l(l-1)}{(2l-1)^2} \right].$$

Da für alle $l \in \langle 1; \infty \rangle$

$$(24) \quad \frac{2l(l-1)}{(2l-1)^2} < \frac{1}{2}$$

gilt und daher $d\varepsilon_y/dl < 0$ ist, der Fehler mit wachsendem l nimmt ab.

Häufig ist auch die Approximation der quadratischen Abhängigkeiten beim Multiplizieren nach Abb. 4, wobei die quadratischen Abhängigkeiten mit dem Fehler $\pm \epsilon/2$ approximiert werden.

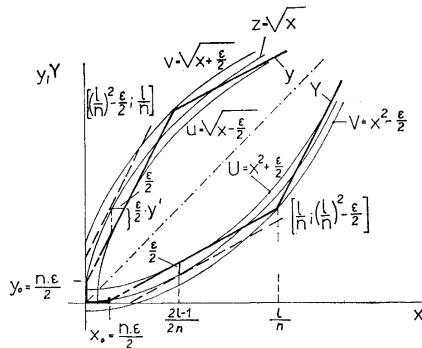


Abb. 4.

In diesem Falle gilt wieder nach Abb. 1 $u = y \geq 0$, $v = -y$,

$$(25) \quad g_k \left(\frac{u+v}{2} \right) = g_k(0) = 0,$$

$$(26) \quad g_l \left(\frac{u-v}{2} \right) = g_l(y) = \frac{1}{n} (2l-1)y - \frac{1}{n^2} l(l-1) - \frac{\epsilon}{2}$$

für $y \geq n(\epsilon/2)$.

$$(27) \quad g_l(y) = 0 \quad \text{für} \quad y < n \frac{\epsilon}{2}.$$

Durch Einsetzen der Beziehungen aus (25), (26) und (27) in Gleichung (3) ergibt sich für den Ausgabewert des Multipliziergerätes

$$(28) \quad u_0 = \frac{1}{n} (2l-1)y - \frac{1}{n^2} l(l-1) - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für} \quad y \geq n \frac{\epsilon}{2},$$

$$(29) \quad u_0 = 0 \quad \text{für} \quad y < n \frac{\epsilon}{2}.$$

476 Einsetzen in Gleichung (2) ergibt

$$(30) \quad x = \frac{1}{n} (2l - 1) y - \frac{1}{n^2} l(l - 1) - \frac{\varepsilon}{2},$$

so daß die Abhängigkeit des Implikator-Ausgabewert y vom Werte $-x$ lautet

$$(31) \quad y = \frac{nx}{2l - 1} + \frac{l(l - 1)}{n(2l - 1)} + \frac{n}{2(2l - 1)}.$$

Durch Vergleich der vorstehenden Beziehung mit (30) sehen wir daß die Funktion

$$(32) \quad Y = \frac{1}{n} (2l - 1) x - \frac{1}{n^2} l(l - 1) - \frac{\varepsilon}{2}$$

zur Funktion $y = f(x)$ invers ist. Die Funktion $z = \sqrt{x}$ ist also wieder durch die gebrochene Linie laut aus (31) approximiert. Die Brechungspunkte dieser gebrochene Linie sind symmetrisch konjugiert längs der den 1. und 3. Quadrant halbierenden Achse mit den Brechungspunkten der gebrochenen Linie aus (32).

Wenn die Funktion $Z = x^2$ durch die Funktion Y (siehe (32)) mit dem Fehler $\pm \varepsilon/2$ approximiert ist, so liegen die Brechungspunkte der Funktion Y auf dem Graph der Funktion U , wo

$$(33) \quad U(x) = x^2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

und der Graph der Funktion Y berührt den Graph der Funktion V , wo

$$(34) \quad V(x) = x^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

in den Punkten mit den Koordinaten $x = (2l - 1)/2n$, denn – wie bereits gezeigt – die maximalen Fehler bei der Approximation der quadratischen Abhängigkeit sind inmitten der benachbarten Brechungspunkte. Da die Funktionen Y und y zueinander invers sind, werden die Brechungspunkte der Funktion $y(x)$ auf dem Graph $v(x)$ liegen, wo

$$(35) \quad v(x) = \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

und der Graph der Funktion y wird den Graph der Funktion $u(x)$ berühren, wo

$$(36) \quad u(x) = \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad x \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ zu den Funktionen $U(x)$ und $V(x)$ invers sind. Der Approximationsfehler ε_y der Funktion $z(x) = \sqrt{x}$ durch die Funktion $y(x)$ wird dann in allen Abschnitten im Intervall

$$(37) \quad \varepsilon_y \in < \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)} - x; \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)} - \sqrt{x}$$

und der absolute Fehlerwert wird im Intervall

$$\varepsilon_y \in < \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)} - \sqrt{x}; \sqrt{x} - \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

für $x \geq \varepsilon/2$.

Da die Funktionen $\varphi_1(x) = \sqrt{x + \varepsilon/2} - \sqrt{x}$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x - \varepsilon/2}$ abnehmend sind ($d\varphi_1(x)/dx < 0$, $d\varphi_2(x)/dx < 0$), werden die maximale Approximationsfehler immer am Anfang jedes Abschnittes vorkommen (den 1. Abschnitt ausgenommen, dessen Analyse extra durchgeführt wird). Nach der Taylorreihenentwicklung von $\sqrt{x + \varepsilon/2}$ und $\sqrt{x - \varepsilon/2}$ in der Umgebung von $\varepsilon = 0$, erhalten wir

$$(38) \quad \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \sqrt{x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + Z_2,$$

wo

$$Z_2 = \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot 2!} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(x + \vartheta \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}}, \quad (0 \leq \vartheta \leq 1),$$

$$(39) \quad \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + Z'_2,$$

wo

$$Z'_2 = \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot 2!} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(x - \vartheta \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}}, \quad (0 \leq \vartheta \leq 1), \quad x > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit den vorstehenden Beziehungen bestimmen wir nun die wechselseitige gröÙe von $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$. Einsetzen der letzten Ausdrücke in $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ ergibt

$$(40) \quad \varphi_1(x) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\left(x + \vartheta \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}},$$

$$(41) \quad \varphi_2(x) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\left(x - \vartheta \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}}, \quad x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

478 Durch Vergleich von (40) mit (41) ersehen wir, daß für alle Werte ϑ , ($\vartheta \in (0; 1)$)

$$(42) \quad \varphi_2(x) < \varphi_1(x)$$

gilt.

Folglich gilt für den maximalen absoluten Approximationsfehler im l -ten Abschnitte

$$(43) \quad |\varepsilon_{y_l}|_{\max} \leq \sqrt{x_{l-1}} - \sqrt{\left(x_{l-1} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad l = 2, 3, \dots, n,$$

d.h.

$$|\varepsilon_{y_l}|_{\max} \leq \sqrt{\left(\left(\frac{l-1}{n}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} - \sqrt{\left(\left(\frac{l-1}{n}\right)^2 - \varepsilon\right)}.$$

Wie schon vorher gezeigt, nimmt der Ausdruck $\varphi_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{(x - \varepsilon/2)}$ seinen maximalen Wert immer am Anfang eines bestimmten Abschnittes an.

Die Fehlerabschätzung von (43) läßt sich weiter präzisieren. Nach Abb. 4 befindet sich der Fehler im Brechungspunkte am Anfang des l -ten Abschnittes (am Ende des $l-1$ -ten Abschnittes)

$$(44) \quad \varepsilon_{y_l}(x_{l-1}) = \varphi_1(x_{l-1}) = \frac{l-1}{n} - \sqrt{\left(\left(\frac{l-1}{n}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

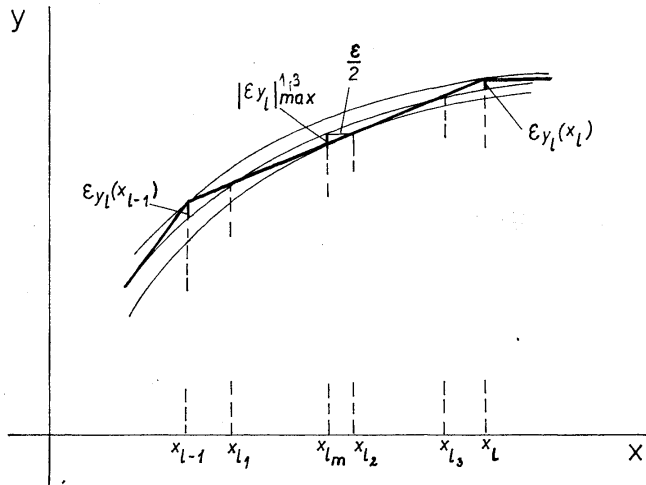


Abb. 5.

und der maximale absolute Approximationsfehler $|e_{y_l}|_{\max}^{1;3}$ im Abschnitte $\langle x_{l1}; x_{l3} \rangle$ ist nach Abb. 5 und (19a) gegeben durch die Beziehung

$$(45) \quad |e_{y_l}|_{\max}^{1;3} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{n}{2l-1},$$

wo $n/(2l-1)$ den Richtungskoeffizienten der gebrochenen Linie y im l -ten Abschnitte darstellt.

Die Taylorreihenentwicklung von $\sqrt{((l-1/n)^2 - (\varepsilon/2))}$ in der Umgebung von $\varepsilon = 0$ ergibt

$$(46) \quad \sqrt{\left(\left(\frac{l-1}{n}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{l-1}{n} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{l-1} + Z_2'',$$

wo

$$Z_2'' = -\frac{\varepsilon^2}{4 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{l-1}{n}\right)^2 - 9 \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1, \quad l \neq 1.$$

Unter Benutzung von (19a) und durch Einsetzen von (46) in (44) erhalten wir für den Fehler im Brechungspunkte am Anfang des l -ten Abschnittes (bei genügend kleinem ε – um den Rest der Entwicklung vernachlässigen zu können)

$$(47) \quad \varepsilon_{y_l}(x_{l-1}) \cong \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n}{2(l-1)} = \frac{1}{16n(l-1)}.$$

Der Vergleich von (45) mit (47) zeigt, daß der Fehler am Anfang des l -ten Abschnittes größer als der maximale Fehler innerhalb des gegebenen Abschnittes ist. Folglich gilt

$$(48) \quad \varphi_1(x_{l-1}) > \varphi_2(x_{lm}).$$

Dann gilt für den maximalen absoluten Fehler im l -ten Abschnitte

$$|e_{y_l}|_{\max} \cong \sqrt{\left(x_{l-1} + \frac{\varepsilon}{2}\right)} - \sqrt{x_{l-1}},$$

d.h.

$$(49) \quad |e_{y_l}|_{\max} \cong \frac{1}{16n(l-1)}, \quad l \neq 1.$$

Die Beziehung (49) ist für die Fehlergröße mehr präzise als die Beziehung (43).

Für $l = 1$ gilt nach Abb. 5:

$$(50) \quad |e_y|_{\max} \cong n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{8n}.$$

Bei Aufgabenlösungen in denen die Wurzel vorkommen ist es nötig wegen Genauigkeitserhöhung aufgrund von (22), (49) und (50) eine folgerechte Normalisierung des Ausdruckes unter dem Wurzelzeichen durchzuführen.

t	I			I	
	y _{tab}	y	δ(y)	y	δ(y)
0,1	0,002	0,001	-0,001	0,004	0,002
0,2	0,010	0,013	0,003	0,012	0,002
0,3	0,022	0,026	0,004	0,025	0,003
0,4	0,040	0,046	0,006	0,044	0,004
0,5	0,062	0,069	0,007	0,067	0,005
0,6	0,090	0,098	0,008	0,095	0,005
0,7	0,122	0,134	0,012	0,129	0,007
0,8	0,160	0,170	0,010	0,165	0,005
0,9	0,202	0,216	0,014	0,210	0,008
1,0	0,250	0,250	0,265	0,015	0,010

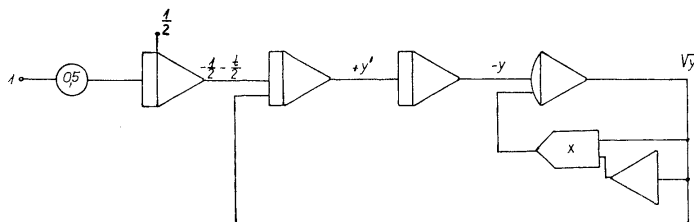


Abb. 6.

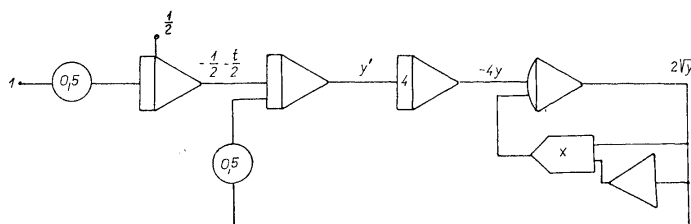


Abb. 7.

Beispielsweise, bei der Lösung von $y'' + \sqrt{y} = \frac{1}{2} + t/2$ mit den Anfangsbedingungen $y_{(0)} = y'_{(0)} = 0$ laut Schema der Abb. 6 erhalten wir in der Tabelle 1 (I) angegebene Werte y wird diese Gleichung laut Schema der Abb. 7 gelöst (wo y normalisiert ist) erhalten wir die Werte y laut Tabelle 1 (II). Das Lösung der Gleichung ist die Funktion $y = t^2/4$. Offensichtlich ist Lösung II mehr präzise. Bei der Berechnung wurde der Diodenmultiplikator des Analogrechners AP-S angewendet, wo die quadratischen Abhängigkeiten durch 5 lineare Segmente (d.h. $n = 5$) approximiert wurden.

(Eingegangen am 30. Januar 1978.)

REFERENCES

- [1] V. Borský, J. Matyáš: Technika použití elektronických analogových počítačů. SNTL, Praha 1963.
 [2] S. Fifer: Analogue Computation. McGraw-Hill Book Co., New York 1961.

Doc. ing. Karel Beneš, CSc., přírodovědecká fakulta University Palackého (Naturwissenschaftliche Fakultät der Palacky Universität), Leninova 26, 771 46 Olomouc, Czechoslovakia.