KYBERNETIKA — том 15 (1979), выпуск 4

Некоторые обобщения результатов Эрдеша-Каца, связанных с усиленным законом больших чисел, и их приложения

М. У. Гафуров, С. Х. Сиражлинов

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,, \quad n \geqq 1\,.$$

Положим

$$\nu(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varepsilon)\,,$$

где $I_n(\varepsilon)$ — индикатор события $\{|S_n| > n\varepsilon\}$. Рассмотрены ряд задач, связанных с усиленным законом больших чисел в форме Эрдеша-Каца. Получены результаты описывающие моментные свойства $\nu(\varepsilon)$. Эти результаты являются уточнениями и обобщениями исследований авторов [1], [2], [5], [13], [16], [19].

1. ВВЕДЕНИЕ И КРАТКИЙ ОБЗОР

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$S_0 = 0\,, \quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,, \quad n \geqq 1\,.$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ положим

$$\nu(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varepsilon)\,,$$

где $I_n(\varepsilon)$ — индикатор события $\{|S_n| > n\varepsilon\}$. Нетрудно заметить, что конечность почти наверное величины $\nu(\varepsilon)$ влечет выполнение усиленного закона больших чисел для заданных случайных величин.

В [1] P. Erdös показал, что для $E\nu(\varepsilon) < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$. Результаты M. Katz [2], [3], F. Spitzer [4], L. E. Baum [5], C. C. Heyde [6] и т. д. являются обобщениями и дополнениями приведенной выше теоремы P. Erdös и в основе доказательства этих результатов лежит метод, разработанный P. Erdös в [1].

В работе одного из авторов [7] была доказана теорема P. Erdös с использованием одного вероятностного неравенства для больших уклонений, принадлежащего С. В. Нагаеву и Д. Х. Фуку [8].

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и $l \geqq 2$ положим

$$\tau_l(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} .$$

Очевидно, что $\tau_2(\varepsilon) = E\nu(\varepsilon)$.

Продолжая исследования P. Erdös [1], Hsu и H. Robbins [9], M. Katz [3] показал, что неравенство $\tau_l(\varepsilon) < \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $EX_1 = 0$, $E|X_1|^l < \infty$. Утверждение Теоремы 2.1 настоящей работы является уточнением упомянутых выше результатов P. Erdös и M. Katz и доказывается способом, отличным чем у них.

Далее в работах T. Slivka, N. C. Severo [10], H. Stratton [11], T. L. Lai, K. K. Lan [12] исследованы вопросы существования моментов величины $\nu(\varepsilon)$. Наиболее законченными результатами в этом направлении являются, по-видимому, результаты T. L. Lai и K. K. Lan [12], из которых, в частности, следует, что условие $E|X_1|^l < \infty$, $l \geqq 2$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $E\nu^{l-1}(\varepsilon) < \infty$. Отметим, что доказательство этого утверждения основывается на вышеупомянутой теореме M. Katz [3].

В § 2 данной работы приводится неравенство для моментов высших порядков величины $\nu(\varepsilon)$. При этом использованы оценки для $\tau_l(\varepsilon)$.

Результаты §3 посвящены оценкам скорости сходимости больших уклонений величины $\nu(\varepsilon)$. Далее легко понять, что если $\varepsilon \to 0$, то $\tau_l(\varepsilon) \to \infty$ и, следовательно, представляет интерес поведение $\tau_l(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Отметим, что задача в такой постановке при $l = 2$ изучалась T. Slivka, N. C. Severo [10], когда X_i, $i = 1, \ldots, n$ распределены по нормальному закону; и C. C. Heyde [13], А. В. Нагаевым [14] для произвольной последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными вторыми моментами. Наиболее общий результат в этом направлении, по-видимому, принадлежит А. В. Нагаеву [14], который рассмотрел случай, когда $l = 2$ и случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принимают значения из Эвклидова пространства R^d, $d \geqq 1$. В § 4 продолжаются исследования вышеупомянутых авторов.

В [15] H. Rubin и J. Saturaman при соответствующих моментных условиях на X_1 исследовали асимптотику вероятностей умеренных уклонений, т.е. $P\{|S_n| > \varepsilon\sqrt{(n \ln n)}\}$ при $n \to \infty$. Нетрудно удостовериться в том, что если $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$, то в силу центральной предельной теоремы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\{|S_n| > \varepsilon\sqrt{(n \ln n)}\} \to 0. \tag{1}$$

Исследования J. Davis [16] посвящены оценкам скорости сходимости в соотношении (1).

Сравнение результатов P. Erdös [1] и J. Davis [16] показывает, что следующие три утверждения

а) $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$;

б) $\tau_2(\varepsilon) < \infty$;

в) $d(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} P\{|S_n| > \varepsilon\sqrt{(n \ln n)}\} < \infty$

эквивалентны.

В § 5 устанавливается соотношение между $d(\varepsilon)$ и $\tau_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и приведен более упрощенный вариант доказательства соответствующей теоремы J. Davis [16]. Доказательству аналога Теоремы 4.1 для процессов восстановления посвящен § 6.

Отметим, что некоторые результаты настоящей работы были обобщены на суммы случайного числа случайных слагаемых, когда число слагаемых произвольным образом зависит от исходных величин в [17].

Результаты § 1 – § 4 являются совместными, остальные результаты принадлежат М. У. Гафурову.

2. НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ МОМЕНТОВ ВЕЛИЧИНЫ $\nu(\varepsilon)$

Приводимая ниже Теорема 2.1 по существу является уточнением соответствующих теорем P. Erdös [1] и M. Katz [3].

Теорема 2.1. Если $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ и $E|X_1|^l < \infty$, $l \geqq 2$, то для любых $\varepsilon > 0$, $\Delta > 1 - \varepsilon$ и $0 < \gamma < 1/(2(l-1))$ имеют место неравенства:

$$\frac{E|X_1|^l}{2^{2l+1} l(l+\Delta)^l} \leqq \tau_l(\varepsilon) \leqq$$

$$\leqq \left\{\frac{2^l}{l\gamma^l} + 2\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2\gamma} \frac{1 - 2\gamma(l-2)}{1 - 2\gamma(l-1)} + 4\Gamma(l-1)(8e^2)^{l-1} + 1\right\} \frac{E|X_1|^l}{\varepsilon^{1/\gamma}}.$$

С помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорэна получаем

$$A_2 \leqq 2\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2\gamma} \frac{1-2\gamma(l-2)}{1-2\gamma(l-1)}\,\varepsilon^{-1/\gamma}. \tag{2.4}$$

Нетрудно заметить, что

$$A_3 \leqq 4\left(\frac{8e^2}{\varepsilon^2}\right)^{l-1} \Gamma(l-1)+1. \tag{2.5}$$

Оценка сверху для величины $\tau_l(\varepsilon)$ следует из (2.1), (2.3)–(2.5).

При оценке снизу для $\tau_l(\varepsilon)$ будем пользоваться Леммой 2 и неравенством (2.2). Выбирая $\Delta > 1-\varepsilon$, имеем

$$\tau_l(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{|S_n| > n(\varepsilon+\Delta)\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} k^{l-1}\Big) P\{2n(\varepsilon+\Delta) < |X_1| \leqq 2(n+1)(\varepsilon+\Delta)\} \geqq$$

$$\geqq \frac{E|X_1|^l}{2^{2l+1} l(\varepsilon+\Delta)^l}.$$

Теорема 2.1 доказана полностью.

Замечание. В нижней оценке для $\tau_l(\varepsilon)$ параметр Δ введен для сохранения произвольности ε. На самом деле в качестве нижней оценки можно было предложить выражение

$$(2^{2l+1} l\varepsilon^l)^{-1} \int_{|x| > 2\varepsilon[4/\varepsilon^2]} |x|^l \, dP\{X_1 < x\}.$$

Следующее предложение представляет собой уточнение одной теоремы T. L. Lai и K. K. Lan [12] о существовании моментов величины $\nu(\varepsilon)$.

Теорема 2.2. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, $E|X_1|^l < \infty$, $l \geqq 2$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и $0 < \gamma < 1/(2(l-1))$ справедлива оценка

$$E\nu^{l-1}(\varepsilon) \leqq 2\left[\frac{2^l}{l\gamma^l} + 2\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2\gamma} \frac{1-2\gamma(l-2)}{1-2\gamma(l-1)} + 4\,\Gamma(l-1)\,(8e^2)^{l-1} + 1\right] \frac{E|X_1|^l}{\varepsilon^{1/\gamma}}.$$

Доказательство. Положим

$$\nu_N(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} I_n(\varepsilon), \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Пользуясь элементарным соотношением

$$\max_{0 \leqq x \leqq n-1} \left[(x+1)^h - x^h\right] = n^h - (n-1)^h, \quad h \geqq 1,$$

получаем

$$E\, v_N^{l-1}(\varepsilon) = E \sum_{n=1}^{N} \left[v_n^{l-1}(\varepsilon) - v_{n-1}^{l-1}(\varepsilon)\right] = \sum_{n=1}^{N} E\left[(v_{n-1}(\varepsilon) + I_n(\varepsilon))^{l-1} - v_{n-1}^{l-1}(\varepsilon)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} E\left[\left[(v_{n-1}(\varepsilon) + I_n(\varepsilon))^{l-1} - v_{n-1}^{l-1}(\varepsilon)\right] / I_n(\varepsilon) = 1\right] \times P(I_n(\varepsilon) = 1) \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P(I_n(\varepsilon) = 1). \tag{2.6}$$

Поскольку $\{v_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ образует монотонную последовательность и по условию теоремы $\tau_l(\varepsilon) < \infty$, то согласно теореме о мажорируемой сходимости из неравенства (2.6) при $N \to \infty$ вытекает

$$E\, v_N^{l-1}(\varepsilon) \to E\, v^{l-1}(\varepsilon).$$

Учитывая это и Теорему 2.1 и переходя к пределу при $N \to \infty$ в неравенстве (2.6), приходим к доказательству утверждения Теоремы 2.2.

3. ОЦЕНКИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЕЛИЧИНЫ $v(\varepsilon)$

В этом параграфе сделаем одно замечание по поводу одной теоремы J. Slivka и N. C. Severo [10] утверждающей о том, что если $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = 1$, то для всех $n \geqq 1$ и любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$P\{v(\varepsilon) \geqq n\} \leqq \frac{2}{n\varepsilon^2}.$$

Положим $L(\varepsilon) = \sup\{k : |S_k| > k\varepsilon\}$. Легко понять, что $v(\varepsilon) \leqq L(\varepsilon)$.

В следующей теореме усиливается и обобщается приведенный результат J. Slivka и N. C. Severo [10].

Теорема 3.1. Пусть $EX_1 = 0$. Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и $l \geqq 2$ следующие три утверждения

a) $E|X_1|^l < \infty$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{\nu(\varepsilon) \geqq n\} < \infty;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{L(\varepsilon) \geqq n\} < \infty$

равносильны.

Доказательство. Покажем, что $a) \Leftrightarrow b)$. Легко видеть, что

$$P\{\nu(\varepsilon) \geqq n\} = P\{\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\varepsilon) \geqq n\} \leqq P\{\sum_{k>n} I_n(\varepsilon) > 0\} = \tag{3.1}$$

$$= P\{I_k(\varepsilon) = 1 \quad \text{хотя бы при одном} \quad k > n\} = P\left\{\sup_{k>n} \left|\frac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right\}.$$

Отсюда,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{\nu(\varepsilon) \geqq n\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\left\{\sup_{k \geqq n} \left|\frac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right\}.$$

В силу теоремы M. Katz [3] ряд, стоящий в правой части последнего неравенства, сходится, если $E|X_1|^l < \infty$. Предположим в) имеет место. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{\nu(\varepsilon) \geqq n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{n \leqq \nu(\varepsilon) < n+1\} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{l-2}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2^{l-1}(l-1)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^l P\{n \leqq \nu(\varepsilon) < n+1\} \geqq \frac{E\,\nu^{l-1}(\varepsilon)}{(l-1)\,2^{l-1}}. \tag{3.2}$$

Далее, так как в силу теоремы T. L. Lai и K. K. Lan [12]

$$E\,\nu^{l-1}(\varepsilon) < \infty \Leftrightarrow E|X_1|^l < \infty \Leftrightarrow E\,L^{l-1}(\varepsilon) < \infty, \tag{3.3}$$

то из неравенства (3.2), импликаций (3.3) следует, что $E|X_1|^l < \infty$. Поступая аналогичным образом, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{L(\varepsilon) > n\} < \infty \Leftrightarrow E\,L^{l-1}(\varepsilon) < \infty.$$

Отсюда и из соотношений (3.3) следует доказательство Теоремы 3.1.

Замечание. Если $EX_1 = 0$, $E|X_1|^l < \infty$, $l > 1$, то в силу соотношения (3.1) и [23] при $n \to \infty$ имеем

$$P\{\nu(\varepsilon) > n\} = o\left(\frac{1}{n^{l-1}}\right).$$

Этот результат улучшает упомянутую оценку J. Slivka и N. C. Severo.

Заметим, что из Теоремы 2.1 следует, что

$$\tau_l(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-1/\gamma}) .$$

Первая работа, посвященная изучению роста $\tau_l(\varepsilon)$, принадлежит J. Slivka и N. C. Severo [10]. Ими доказано, что если $l = 2$ и случайные величины X_1, $X_2, \ldots, X_n$ независимы и распределены по нормальному закону с $(0, 1)$, то при всех $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon^{-2} - 1 \leqq E\,\nu(\varepsilon) = \tau_2(\varepsilon) \leqq \varepsilon^{-2} .$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$\varepsilon^2\,\tau_2(\varepsilon) = 1 + o(1) . \tag{4.1}$$

Далее установлено, что соотношение (4.1) остается справедливым и для более широкого класса случайных величин, обладающих первыми двумя конечными моментами [13], [14].

Для случая, когда величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют различные распределения при довольно жёстких ограничениях подобные результаты были получены R. Chen [20].

Для произвольных $l \geqq 2$ имеет место приводимая ниже теорема, которая обобщает известные результаты о поведении $\tau_l(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Добавим также, что метод доказательства этой теоремы отличен от метода, который использовали C. C. Heyde [13], R. Chen [20] и т. д.

Теорема 4.1. В условиях Теоремы 2.2 при $\varepsilon \to 0$ имеет место равенство

$$\tau_l(\varepsilon) = \frac{2^{l-1}}{(l-1)\sqrt{\pi}}\,\Gamma(l - \tfrac{1}{2})\,\varepsilon^{-2(l-1)}(1 + o(1)) .$$

В качестве применения Теоремы 4.1 приведем результат, который интуитивно понятен.

Теорема 4.2. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$. Тогда имеет место соотношение

$$\tau_2(\varepsilon) = 2\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > n\varepsilon\}\,(1 + o(1)) .$$

Замечание. Здесь следует отметить одну работу В. В. Петрова [18], из которой следует, что если $EX_1 = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > n\varepsilon\} < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} x^2 \, P\{X_1 < \mathrm{d}x\} < \infty .$$

Далее Теорема 4.1 может быть обобщена и на случай, когда случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принимают значения из Эвклидова пространства R^d, $d \geqq 1$.

Обозначим через $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ и B вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу X_1 вектора соответственно.

Положим

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n , \quad n \geqq 1 ,$$

$$\chi_n(\varepsilon) = \begin{cases} 1 , & \left|\dfrac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon \\ 0 , & \text{в остальных случаях} . \end{cases}$$

(Здесь $|\cdot|$ означает обычную Эвклидову норму)

$$\zeta(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\varepsilon) .$$

Тогда многомерный аналог Теоремы 4.1 выглядит так.

Теорема 4.1. а) Если $E|X_1|^l < \infty$, $l \geqq 2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} \, P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} = \varepsilon^{-2(l-1)} \int_0^{\infty} x^{l-2} \, P\{|\xi| > \sqrt{x}\} \, \mathrm{d}x (1 + o(1)) .$$

в)

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2l-2} E \, \xi^{l-1}(\varepsilon) \leqq \mathrm{const} ,$$

где ξ d-мерный нормальный случайный вектор с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей B.

Доказательство Теорем 4.1 и 4.2. Обозначим через η и $\Phi(x)$ нормальную случайную величину с $(0, 1)$ и её функцию распределения соответственно. Буквой δ будем обозначать положительную постоянную, величина которой по необходимости выбирается произвольно малой.

Пусть $R(x)$ любая величина, у которой

$$\lim_{x\to 0} R(x) = 0\,.$$

Представим величину $\tau_l(\varepsilon)$ в виде

$$\tau_l(\varepsilon) = \sum_{n\varepsilon^2 \leqq \delta} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} + \sum_{\delta < n\varepsilon^2 \leqq 1/\delta} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} +$$

$$+ \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3\,. \tag{4.1}$$

Приступим к оценке сумм Ω_i, $i = 1, 2, 3$.

Легко видеть, что

$$\Omega_1 = \sum_{n\varepsilon^2 \leqq \delta} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} \leqq \frac{\delta^{l-1}}{\varepsilon^{2l-2}} = \varepsilon^{-2(l-1)} R(\delta)\,. \tag{4.2}$$

Далее при достаточно больших n и малых ε в силу центральной предельной теоремы получаем

$$\Omega_2 = \sum_{\delta < n\varepsilon^2 \leqq 1/\delta} n^{l-2} P\left\{\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right\} = \tag{4.3}$$

$$\sum_{\delta < n\varepsilon^2 \leqq 1/\delta} n^{l-2} P\{|\eta| > \varepsilon\sqrt{n}\}\,(1 + o(1)) =$$

$$= \varepsilon^{-2(l-1)} \sum_{\delta < n\varepsilon^2 \leqq 1/\delta} \varepsilon^2(\varepsilon^2 n)^{l-2} P\{|\eta| > \varepsilon\sqrt{n}\}\,(1 + o(1)) =$$

$$= \varepsilon^{-2(l-1)} \int_\delta^{1/\delta} y^{l-2} P\{|\eta| > \sqrt{y}\}\,\mathrm{d}y(1 + o(1)) =$$

$$= 2\varepsilon^{-2(l-1)} \int_\delta^{1/\delta} y^{l-2}\,\Phi(-\sqrt{y})\,\mathrm{d}y(1 + o(1))\,.$$

При оценке Ω_3 будем пользоваться неравенством, которое следует из Леммы 1: для любого $x > 0$ и $\gamma > 0$

$$P\{|S_n| > x\} \leqq n\,P\{|X_1| > \gamma x\} + C_\gamma \left(\frac{n}{x^2}\right)^{1/2\gamma}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

где C_γ – постоянное, зависящее только от γ. Считая $0 < \gamma < 1/(2(l-1))$, в силу (4.4) имеем

$$\Omega_3 = \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} n^{l-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} \leqq \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} n^{l-1} P\{|X_1| > \gamma\varepsilon n\} + \tag{4.5}$$

$$+ C_\gamma \varepsilon^{-1/\gamma} \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} n^{-(1/2\gamma - l + 2)} = \Omega_3' + \Omega_3''\,.$$

Оценка

$$(4.6) \qquad \Omega_3' = \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} n^{l-1} P\{|X_1| > n\varepsilon\gamma\} \leqq \sum_{n\varepsilon > 1/\delta} n^{l-1} P\{|X_1| > n\varepsilon\gamma\} = $$
$$= \frac{1}{\gamma^l \varepsilon^l} \sum_{n\varepsilon > 1/\delta} (n\varepsilon\gamma)^{l-1} \varepsilon\gamma\, P\{|X_1| > n\varepsilon\gamma\}$$

очевидна.

Далее, так как при достаточно больших n и малых ε

$$(4.7) \qquad \sum_{n\varepsilon > 1/\delta} \varepsilon\gamma(n\varepsilon\gamma)^{l-1} P\{|X_1| > n\varepsilon\gamma\} = \int_{|y| > \gamma/\delta} y^l P\{|X_1| > y\}\, \mathrm{d}y (1 + o(1)),$$

то из (4.6), (4.7) получаем

$$(4.8) \qquad \Omega_3' \leqq \varepsilon^{-l} R(\delta).$$

Продолжим доказательство Теоремы 4.1. Нетрудно проверить, что для достаточно больших n и малых ε

$$(4.9) \qquad \Omega_3'' = C_\gamma \varepsilon^{-1/\gamma} \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} n^{-(1/\gamma - l + 2)} = C_\gamma \varepsilon^{-2(l-1)} \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} \varepsilon^2 (n\varepsilon^2)^{-(1/2\gamma - l + 2)} \leqq$$
$$\leqq 2C_\gamma \varepsilon^{-2(l-1)} \int_{1/\delta}^{\infty} x^{-(1/2\gamma - l + 2)}\, \mathrm{d}x = \varepsilon^{-2(l-1)} R(\delta).$$

В силу оценок (4.5), (4.8) и (4.9) имеем

$$(4.10) \qquad \Omega_3 \leqq \varepsilon^{-2(l-1)} R(\delta).$$

Объединяя неравенства (4.1)–(4.3) и (4.10), находим

$$\tau_l(\varepsilon) = 2\varepsilon^{-2(l-1)} \int_{\delta}^{1/\delta} y^{l-2} \Phi(-\sqrt{y})\, \mathrm{d}y + \varepsilon^{-2(l-1)} R(\delta) + o(\varepsilon^{-(l-1)}).$$

Отсюда в силу равенства

$$\int_0^{\infty} y^{l-2} \Phi(-\sqrt{y})\, \mathrm{d}y = \frac{2^{l-2}}{(l-1)\sqrt{\pi}} \Gamma(l - \tfrac{1}{2})$$

и произвольности δ вытекает доказательство утверждения Теоремы 4.1.

Доказательство Теоремы 4.2 опирается на асимптотику величины $\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > n\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Повторяя рассуждения, которые проводились при доказательстве Теоремы 4.1, получаем

$$\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > n\varepsilon\} = \tfrac{1}{2} + o(1).$$

Отсюда и из Теоремы 4.1 приходим к доказательству Теоремы 4.2.

В заключении этого параграфа отметим, что метод применяемый при доказательстве теоремы 4.1 также позволяет изучать асимптотику ряда следующего вида: $\sum_{n=1}^{\infty} n^a P\{|S_n| > \varepsilon n^b\}$, где a и b заданные параметры.

5. ЗАМЕЧАНИЕ О ВЕРОЯТНОСТЯХ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ $d(\varepsilon)$ И $\tau_2(\varepsilon)$

В настоящем параграфе сделаем одно замечание по поводу одной теоремы J. Davis [16] о скорости сходимости вероятностей умеренных уклонений и укажем связь между $d(\varepsilon)$ и $\tau_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Как было упомянуто во введении, следующие три утверждения

a) $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$;

b) $\tau_2(\varepsilon) < \infty$;

c) $d(\varepsilon) < \infty$;

эквивалентны.

Отметим, что метод доказательства соотношения $d(\varepsilon) < \infty$ основывается на методе усечений и связан с большими техническими трудностями.

Прежде чем сформулировать основной результат данного параграфа, попутно предложим более простой на наш взгляд способ доказательства неравенства $d(\varepsilon) < \infty$, основанный на оценке (4.4). Применяя неравенство (4.4) и при этом считая $\gamma = {}^1/_6$, получаем

$$(5.1) \quad d(\varepsilon) \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \, P\left\{|X_1| > \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(n \ln n)}\right\} + \frac{192(9 + 16e^6)}{\varepsilon^6} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Нетрудно проверить, что первое слагаемое правой части (5.1) преобразуется к виду

$$(5.2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \sum_{j=n}^{\infty} P\left\{\frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(j \ln j)} < |X_1| \leqq \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{[(j+1)\ln(j+1)]}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(n \ln n)} < |X_1| \leqq \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{[(n+1)\ln(n+1)]}\right\} \sum_{j=1}^{n} \ln j.$$

Поскольку $\sum_{j=1}^{n} \ln j \sim n \ln n$, то в силу $EX_1^2 < \infty$ выражение, стоящее в правой части (5.2) не превосходит $16\, EX_1^2 \varepsilon^{-2}$. Отсюда в силу (5.1) следует, что $d(\varepsilon) < \infty$ (ср. с Теоремой 1 [16]).

Следующая теорема устанавливает связь между $d(\varepsilon)$ и $\tau_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 5.1. Если $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, то справедливо соотношение: при $\varepsilon \to 0$

$$d(\varepsilon) = \tfrac{3}{2}\varepsilon^{-2}\, \tau_2(\varepsilon)\,(1 + o(1)).$$

Так как согласно Теореме 4.1 $\varepsilon^2 \tau_2(\varepsilon) = 1 + o(1)$; то достаточно показать, что

$$\varepsilon^4 d(\varepsilon) = \tfrac{3}{2} + o(1)\,.$$

Это соотношение вытекает из следующих вспомогательных утверждений с учетом неравенства треугольника.

Положим

$$N(\varepsilon) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\, \Phi[-\varepsilon \sqrt{(\ln n)}]\,.$$

Лемма 3. В условиях Теоремы 5.1 при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^4[d(\varepsilon) - N(\varepsilon)] = o(1)\,.$$

Отсюда следует, что достаточно исследовать поведение величины $N(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. В связи с этим имеет место

Лемма 4.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^4 N(\varepsilon) = \tfrac{3}{2}\,.$$

Доказательство Леммы 3. Пусть $k > 0$ — фиксированное, достаточно большое число. Имеем

$$(5.3)\qquad d(\varepsilon) - N(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\,[P\{|S_n| > \varepsilon \sqrt{(n \ln n)}\} - 2\Phi(-\varepsilon \sqrt{\ln n})] =$$

$$= \sum_{1 \leqq n \leqq \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{\ln n}{n}\,[P\{|S_n| > \varepsilon \sqrt{(n \ln n)}\} - 2\Phi(-\varepsilon \sqrt{\ln n})] +$$

$$+ \sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{\ln n}{n}\,[P\{|S_n| > \varepsilon \sqrt{(n \ln n)}\} - 2\Phi(-\varepsilon \sqrt{\ln n})] =$$

$$= \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon)\,.$$

Выберем $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы $n_0 \to \infty$, $\varepsilon^2 \ln n_0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Легко видеть, что

$$\Delta_1(\varepsilon) \leqq 2 \sum_{1 \leqq n \leqq n_0} \frac{\ln n}{n} \sup_x |P(S_n < x\sqrt{n}) - \Phi(x)| +$$

$$+ 2 \sum_{n_0 < n \leqq \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{\ln n}{n} \sup_x |P\{S_n < x\sqrt{n}\} - \Phi(x)| \leqq$$

$$\leqq 2 \max_{1 \leqq n \leqq n_0} \alpha_n \sum_{1 \leqq n \leqq n_0} \frac{\ln n}{n} + 2 \max_{n_0 \leqq n \leqq \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \alpha_n \sum_{n_0 < n \leqq \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{\ln n}{n} \sim$$

$$\sim \ln^2 n_0 \max_{1 \leqq n \leqq n_0} \alpha_n + \max_{n_0 < n \leqq \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \alpha_n [\ln^2 \exp\{\sqrt{(k)}\,\varepsilon^{-2}\} - \ln^2 n_0]\,,$$

где положено

$$\alpha_n = \sup_x \left|P(S_n < x\sqrt{n}) - \Phi(x)\right| .$$

Отсюда, в силу определения n_0 следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \Delta_1(\varepsilon) = 0 . \tag{5.4}$$

Далее имеем

$$\Delta_2(\varepsilon) \leqq \sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{\ln n}{n} P\{|S_n| > \varepsilon\sqrt{(n \ln n)}\} + \tag{5.5}$$

$$+ 2 \sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{\ln n}{n} \Phi(-\varepsilon\sqrt{\ln n}) = \Delta_2'(\varepsilon) + \Delta_2''(\varepsilon) .$$

Для доказательства соотношения

$$\varepsilon^4 \Delta_2(\varepsilon) = o(1)$$

нам достаточно показать, что

$$\varepsilon^4 \Delta_2'(\varepsilon) = o(1) \tag{5.6}$$

поскольку соотношение $\varepsilon^4 \Delta_2''(\varepsilon) = o(1)$ следует из (5.6). Пользуясь неравенством (4.4) и при этом полагая $\gamma = {}^1/_6$, имеем

$$\Delta_2'(\varepsilon) \leqq \sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \ln n \, P\left\{|X_1| > \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(\ln n)}\right\} + \tag{5.7}$$

$$+ 129(9 + 16e^6)\,\varepsilon^{-6} \sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \frac{1}{n \ln^2 n} .$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \ln n \, P\left\{|X_1| > \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(\ln n)}\right\} = \tag{5.8}$$

$$= \sum_{n > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} \ln n \sum_{j=n}^{\infty} P\left\{\frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(j \ln j)} < |X_1| \leqq \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{((j+1)\ln(j+1))}\right\} =$$

$$= \sum_{j > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} P\left\{\frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(j \ln j)} < |X_1| \leqq \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{[(j+1)\ln(j+1)]}\right\} \sum_{n=1} \ln n \sim$$

$$\sim \sum_{j > \exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} j \ln j \, P\left\{\frac{\varepsilon}{6}\sqrt{(j \ln j)} < |X_1| \leqq \frac{\varepsilon}{6}\sqrt{((j+1)\ln(j+1))}\right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{36}{\varepsilon^2} \int_{x > k^{1/4}\exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}/2\}/6} x^2 P\{|X_1| < x\}\,dx .$$

 Поскольку при достаточно малых ε

$$(5.9)\qquad \sum_{n>\exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^{-2}\}} (n \ln^2 n)^{-1} \sim \int_{\exp\{\sqrt{(k)}\varepsilon^2\}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{k}},$$

то в силу $EX_1^2 < \infty$ и из определения k, соотношений (5.7)–(5.9) получаем

$$\varepsilon^4 \Delta_2'(\varepsilon) = o(1).$$

Отсюда и из (5.5) вытекает

$$\varepsilon^4 \Delta_2(\varepsilon) = o(1).$$

Последнее сотношение вместе с (5.4) заверашет доказательство утверждения леммы 3.

Доказательство Леммы 4. Используя формулу суммирования Эйлера-Маклорэна, имеем

$$(5.10)\qquad N(\varepsilon) = 2\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \Phi(-\varepsilon\sqrt{\ln x})\,\mathrm{d}x - 2\int_1^{\infty} P(x)\left\{\frac{1-\ln x}{x^2}\Phi(-\varepsilon\sqrt{\ln x}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{(2\pi)}} \cdot \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2} \mathrm{e}^{-\varepsilon^2 \ln x/2}\right\}\mathrm{d}x, \quad \text{где} \quad |P(x)| \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Легко подсчитать, что

$$(5.11)\qquad \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \Phi(-\varepsilon\sqrt{\ln x})\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4\varepsilon^4}.$$

Далее нетрудно заметить, что

$$\left|\int_1^{\infty} P(x) \frac{1-\ln x}{x^2} \Phi(-\varepsilon\sqrt{\ln x})\,\mathrm{d}x\right| \leqq 1 - \Phi(-\varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\varepsilon\mathrm{e}},$$

$$(5.12)\qquad \left|\int_1^{\infty} P(x) \frac{\sqrt{(\ln x)}}{x^2} \mathrm{e}^{-\varepsilon^2 \ln x/2}\,\mathrm{d}x\right| \leqq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$$

Доказательство утверждения Леммы 4 следует из соотношений (5.10)–(5.12).

6. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ 4.1 ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределенные положительные случайные величины

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n \geqq 1.$$

Положим

$$N(t) = \sup\{n; S_n \leqq t\}.$$

В работе M. Mejima [22] доказаны ряд теорем о скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для процессов восстановления. Из его результатов в частности следует, что если $l \geqq 2$, то следующие четыре утверждения эквивалентны:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\{|S_n - n\mu| > n\varepsilon\} < \infty$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\left\{\left|N(n) - \frac{n}{\mu}\right| > n\varepsilon\right\} < \infty$;

c) $\int_1^{\infty} t^{l-2} P\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mu}\right| > t\varepsilon\right\} dt < \infty$;

d) $EX_1 = \mu$, $EX_1^l < \infty$.

В данном параграфе нас будет интересовать аналог Теоремы 4.1 для величин

$$R_l(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-2} P\left\{\left|N(n) - \frac{n}{\mu}\right| > n\varepsilon\right\},$$

$$\lambda_l(\varepsilon) = \int_1^{\infty} t^{l-2} P\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mu}\right| > t\varepsilon\right\} \mathrm{d}t.$$

Теорема 6.1. Пусть $EX_1 = \mu$, $E(X_1 - \mu)^2 = \sigma^2$, $EX_1^l < \infty$, $l \geqq 2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеют место следующие равенства

$$R_l(\varepsilon) = \left(\frac{\sigma^2}{\mu^3}\right)^{l-1} \frac{2^{l-1}}{(l-1)\sqrt{\pi}} \Gamma(l - \tfrac{1}{2})\, \varepsilon^{-2(l-1)} (1 + o(1)),$$

$$\lambda_l(\varepsilon) = \left(\frac{\sigma^2}{\mu^3}\right)^{l-1} \frac{2^{l-1}}{(l-1)\sqrt{\pi}} \Gamma(l - \tfrac{1}{2})\, \varepsilon^{-2(l-1)} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Ввиду аналогичности рассуждений ограничимся исследованием асимптотики величины $\lambda_l(\varepsilon)$. Имеем

(6.1) $$\lambda_l(\varepsilon) = \lambda_l^{(1)}(\varepsilon) + \lambda_l^{(2)}(\varepsilon) + \lambda_l^{(3)}(\varepsilon),$$

 где

$$\lambda_l^{(1)}(\varepsilon) = \int_1^{\delta/\varepsilon^2} t^{l-2} P\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mu}\right| > t\varepsilon\right\} \mathrm{d}t\,,$$

$$\lambda_l^{(2)}(\varepsilon) = \int_{\delta/\varepsilon^2}^{1/\delta\varepsilon^2} t^{l-2} P\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mu}\right| > t\varepsilon\right\} \mathrm{d}t\,;$$

$$\lambda_l^{(3)}(\varepsilon) = \int_{1/\delta\varepsilon^2}^{\infty} t^{l-2} P\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mu}\right| > t\varepsilon\right\} \mathrm{d}t\,,$$

$\delta > 0$ — любое фиксированное число.

Очевидно, что

$$\lambda_l^{(1)}(\varepsilon) \leqq \frac{\delta^{l-1}}{\varepsilon^{2(l-1)}}\,. \tag{6.2}$$

При оценке $\lambda_l^{(2)}(\varepsilon)$ пользуемся центральной предельной теоремой для процессов восстановления: при $n \to \infty$

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{N(t) - t\mu^{-1}}{\sqrt{t}\,\sigma\mu^{-3/2}} < x\right\} - \Phi(x)\right| \to 0\,. \tag{6.3}$$

В силу (6.3) при достаточно больших t и малых ε получаем

$$\begin{aligned} \lambda_l^{(2)}(\varepsilon) &= \int_{\delta/\varepsilon^2}^{1/\delta\varepsilon^2} t^{l-2} P\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mu}\right| > t\varepsilon\right\} \mathrm{d}t = \\ &= \int_{\delta/\varepsilon^2}^{1/\delta\varepsilon^2} t^{l-2} P\left\{\left|\frac{N(t) - t\mu^{-1}}{\sqrt{t}\,\sigma\mu^{-3/2}}\right| > \frac{\sqrt{(t)}\,\varepsilon}{\sigma^2\mu^{-3/2}}\right\} \mathrm{d}t = \\ &= \int_{\delta/\varepsilon^2}^{1/\delta\varepsilon^2} t^{l-2} P\left\{|\eta| > \frac{\sqrt{t}\varepsilon}{\sigma\mu^{-3/2}}\right\} \mathrm{d}t(1 + o(1)) = \\ &= 2\varepsilon^{-2(l-1)}\left(\frac{\sigma^2}{\mu^3}\right)^{l-1} \int_{\delta\mu^3/\sigma^2}^{\mu^3/\sigma^2\delta} t^{l-2}\,\Phi(-\sqrt{t})\,\mathrm{d}t(1 - o(1))\,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь η нормальная случайная величина с $(0, 1)$. Далее запишем

$$\lambda_l^{(3)}(\varepsilon) = \int_{1/\delta\varepsilon^2}^{\infty} t^{l-2} P\{|N(t) - t\mu^{-1}| > t\varepsilon\}\,\mathrm{d}t = \tag{6.5}$$

$$= \int_{1/\delta\varepsilon^2}^{\infty} t^{l-2} P\{N(t) - t\mu^{-1} > t\varepsilon\}\,\mathrm{d}t + \int_{1/\delta\varepsilon^2}^{\infty} t^{l-2} P\{N(t) - t\mu^{-1} < -t\varepsilon\}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lambda_{l1}^{(3)}(\varepsilon) + \lambda_{l2}^{(3)}(\varepsilon)\,.$$

Нетрудно проверит, что

$$\lambda_{11}^{(3)}(\varepsilon) = \int_{1/\delta\varepsilon^2}^{\infty} t^{l-2} P\{N(t) - t\mu^{-1} > t\varepsilon\} \, dt \leqq \tag{6.6}$$

$$\leqq \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} \int_n^{n+1} t^{l-2} P\left\{N(t) - \frac{t}{\mu} > t\varepsilon\right\} dt \leqq$$

$$\leqq \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} (n+1)^{l-2} P\left\{N(n+1) - (n+1)\mu^{-1} > (n+1)\varepsilon \frac{n\varepsilon - \mu^{-1}}{(n+1)\varepsilon}\right\}.$$

Так как при $n \to \infty$

$$\frac{n\varepsilon - \mu^{-1}}{(n+1)\varepsilon} \to 1, \tag{6.7}$$

то выбирая ε достаточно малым из (6.6) и (6.7) получаем

$$\lambda_{11}^{(3)}(\varepsilon) \leqq \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} (n+1)^{l-2} P\left\{N(n+1) - (n+1)\mu^{-1} > \frac{n+1}{2}\varepsilon\right\}. \tag{6.8}$$

Оценим вероятность $P\{N(n) - n\mu^{-1} > (n/2)\varepsilon\}$. Пользуясь хорошо известным равенством $P(N(t) > n) = P(S_n \leqq t)$, получаем

$$P\left\{N(n) - n\mu^{-1} > \frac{n}{2}\varepsilon\right\} = \tag{6.9}$$

$$= P\left\{S_{[(\varepsilon/2+\mu^{-1})n]} - \mu\left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + \mu^{-1}\right)n\right] \leqq n\varepsilon\left(\frac{\mu[(\varepsilon/2 + \mu^{-1})\,n] - n}{n\varepsilon}\right)\right\}.$$

Поскольку при $n \to \infty$

$$\frac{\mu[(\varepsilon/2 + \mu^{-1})\,n] - n}{n\varepsilon} \to \frac{\mu}{2},$$

то существуют числа $N > 0$ и $c_1 > 0$ такие, что для всех $n > N$

$$\frac{\mu[(\varepsilon/2 - \mu^{-1})\,n] - n}{n\varepsilon} \geqq c_1 > 0. \tag{6.10}$$

Далее применяя неравенство (4.4) к правой части (6.9) и учитывая (6.10), получаем

$$P\left\{N(n) - n\mu^{-1} > \frac{n}{2}\varepsilon\right\} \leqq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \mu^{-1}\right) n\, P\{X_1 - \mu \leqq -c_1\gamma n\varepsilon\} + \tag{6.11}$$

$$+ \tilde{c}_\gamma(\varepsilon)\,\varepsilon^{-1/\gamma} n^{-1/2\gamma},$$

 где $\tilde{c}_\gamma(\varepsilon)$ постоянное, зависящее от γ и ε,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \tilde{c}_\gamma(\varepsilon) < \infty .$$

Следовательно, в силу неравенств (6.6) и (6.11) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$(6.12)\quad \lambda_{l1}^{(3)}(\varepsilon) \leqq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \mu^{-1}\right) \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} (n+1)^{l-1} P\{X_1 - \mu < -c_1\gamma(n+1)\,\varepsilon\} +$$
$$+ \tilde{c}_\gamma(\varepsilon)\,\varepsilon^{-1/\gamma} \sum_{n\varepsilon^2 > 1/\delta} (n+1)^{-(1/2\gamma - l + 2)} .$$

Повторяя те же самые рассуждения, которые проводились при доказательстве Теоремы 4.1, из (6.12) получаем, что при $\varepsilon \to 0$

$$(6.13)\qquad \lambda_{l1}^{(3)}(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-2(l-1)}) .$$

Аналогично

$$(6.14)\qquad \lambda_{l2}^{(3)}(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-2(l-1)}) .$$

Из (6.5), (6.13) и (6.14) имеем

$$(6.15)\qquad \lambda_{l}^{(3)}(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-2(l-1)}) .$$

Объединяя оценки (6.2), (6.4) и (6.15), в силу произвольности δ из (6.1) приходим к доказательству теоремы 6.1. Теорема 6.1 доказана.

Положим

$$Z_\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \vartheta^{k-1} , \quad \vartheta \in (0, 1) .$$

Из результатов T. L. Lai [19] следует, что условия

a) $EX_1 = \mu < \infty$;

b) $\dfrac{S_n}{n} \to \mu$ п.н., $n \to \infty$;

c) $(1 - \vartheta)\, Z_\vartheta \to \mu$ п.н. при $\vartheta \to 1 - 0$.

эквивалентны.

Приводимая ниже теорема является аналогом одной теоремы В. В. Петрова [18] и Теоремы 4.1 для схемы суммирования случайных величин по Абелю и усиливает соотношение c).

Теорема 6.2. Пусть $EX_1 = \mu$, $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное число. Тогда следующие три утверждения

a') $\int_0^1 (1 - \vartheta)^{-2} P\{(1 - \vartheta) Z_\vartheta - \mu > \varepsilon\} \, d\vartheta < \infty$;

b') $\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n - n\mu > n\varepsilon\} < \infty$;

c') $EX_1^2 < \infty$;

эквивалентны.

d') Если $E(X_1 - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$, то при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^2 \int_0^1 (1 - \vartheta)^{-2} P\{(1 - \vartheta) Z_\vartheta - \mu > \varepsilon\} \, d\vartheta = \frac{\sigma^2}{2} + o(1) ,$$

$$\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n - n\mu > n\varepsilon) = \frac{\sigma^2}{2} + o(1) .$$

Доказательство импликаций a') $\Leftrightarrow$ b') $\Leftrightarrow$ c') приведено в работе [24], а доказательство утверждения d') повторяет те же самые рассуждения, что и в Теореме 4.1.

В заключение приведем результат, который интуитивно понятен.

Пусть

$$A_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{S_{N(n)}}{N(n)} - \mu\right| > \varepsilon\right\} ,$$

$$B_\varepsilon = \int_1^{\infty} P\left\{\left|\frac{S_{N(t)}}{N(t)} - \mu\right| > \varepsilon\right\} dt .$$

Теорема 6.3. 1. Для любого $\varepsilon > 0$ $A_\varepsilon < \infty \Leftrightarrow B_\varepsilon < \infty$.

2. Если $EX_1^2 < \infty$, то величины A_ε, B_ε конечны.

(Поступило в редакцию 16 сентрября 1978.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Erdös: Ann. Math. Stat. *20* (1949), 2, 286.
[2] M. Katz: Ann. Math. Stat. *34* (1963), 1, 312.
[3] M. Katz: Ann. Math. Stat. *39* (1968), 4, 1348.
[4] F. Spitzer: Trans. Amer. Math. Soc. *82* (1956), 2, 323.
[5] L. E. Baum, M. Katz: Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965), 1, 108.
[6] C. C. Heyde: Proc. Cambr. Phil. Soc. *63* (1967), 73.
[7] М. У. Гафуров: Proc. Int. Math. Banach Center. Warszawa 1978.
[8] С. В. Нагаев, Д. Х. Фук: Теория вероятностей и ее прим. *14* (1971), 4.

[9] Hsu, H. Robbins: Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A. *33* (1967), 2, 25.
[10] J. Slivka, N. C. Severo: Proc. Amer. Math. Soc. *24* (1970), 729.
[11] H. Stratton: Ann. Math. Stat. *43* (1972), 3, 1012.
[12] T. L. Lai, K. K. Lan: Z. Wahr. verw. Geb. *34* (1976), 59.
[13] C. C. Heyde: J. Appl. Prob. *12* (1975), 173.
[14] А. В. Нагаев: Тезисы III советско-японского симпозиума по теор. вер. и мат. статистике II, Ташкент 1975.
[15] H. Rubin, T. Saturaman: Sankhya, Ser. A. *27* (1965), 2—4, 325.
[16] J. Davis: Ann. Math. Stat. *39* (1968), 6, 2016.
[17] С. Х. Сираждинов, М. У. Гафуров, Б. Комеков: Изв. АН УзССР, сер. физ. мат. *4* (1978), 28.
[18] В. В. Петров: Вестник ЛГУ *7* (1974).
[19] T. L. Lai: Proc. Amer. Math. Soc. *45* (1974), 2.
[20] R. Chen: Proc. Amer. Math. Soc. *61* (1976), 1, 112.
[21] T. L. Lai, Y. S. Choy: Trans. Amer. Mat. Soc. *208* (1975), 51.
[22] M. Maejima: Rep. Stat. Appl. Res. JUSF, *22* (1975), 3.
[23] В. В. Петров: Суммы независимых случайных величин. ,,Наука", Москва 1972.
[24] М. У. Гафуров: ДАН УзССР 9 (1978).

М. У. Гафуров, кандидат физ.-мат. наук, Институт математики имени В. И. Романовского АН УзССР, ул. Астрономический тупик, 11, 700052. Ташкент. СССР.
Профессор С. Х. Сираждинов, академик АН УзССР, ГСП, ул. Гоголя, 70, 700000, Ташкент. СССР.