KYBERNETIKA — VOLUME 15 (1979), NUMBER 1

Martingales et convergence étroite de mesures de probabilité

ROLANDO REBOLLEDO

Le présent article se propose de donner une vue d'ensemble sur la méthode de martingales dans l'étude de la convergence en loi de processus. Cette méthode a été développée par l'auteur dans plusiers travaux (c.f. [4], [5], [6], [7], [8], [9]) nous expliquons ci-dessous les principaux résultats.

Le point de départ est l'étude des relations existant entre la compacité étroite relative des lois d'une suite de martingales locales, localement de carré intégrable, et la compacité étroite relative des lois de la suite respective de processus croissants associés. Dans la plupart des cas il est plus facile d'étudier les lois des processus croissants associés. Aussi dans une deuxième étape on s'intéresse aux conditions suffisantes, sur le comportement des processus croissants associés, qui entraîneraient la convergence en loi de la suite de martingales locales. Ce dernier problème est lié à l'existence et unicité des solutions à certains „problèmes de martingales" (cf. III ci-dessous).

Cette méthode a permis d'obtenir un Théorème Central Limite assez général pour les martingales locales localement de carré intégrable (cf. [6]). Celui-ci a été appliqué à l'étude du comportement asymptotique des suites de processus ponctuels compensés ([8]). Elle a servi également à dégager des Principes d'Invariance assez généraux pour les martingales à temps discret (cf. [9]). La méthode a été également appliquée à l'étude de l'approximation des diffusions ([9]), en utilisant la présentation de Stroock et Varadhan de ces processus.

Nous commencerons par fixer quelques notations et ce faisant nous suivons [2] et [3] pour tout ce qui concerne la Théorie Générale de Processus et la Théorie de Martingales.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ un espace probabilisé complet. On considère une filtration $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t;\ t \in R_+)$ satisfaisant aux conditions habituelles de Dellacherie [2] et telle que $\mathscr{F} = \bigvee_{t \in R_+} \mathscr{F}_t$. $\mathfrak{p}(\mathbf{F})$ désigne la tribu prévisible relative à $\mathbf{F}$ sur $\Omega \times R_+$.

2. D désigne l'espace des fonctions définies sur R_+ à valeurs dans R, continues à droite et limitées à gauche sur $R_+ - \{0\}$, cintinues en 0, muni de la topologie de Skorokhod sur tout compact ([1], [10]). $\mathscr{B}^0$ denote sa tribu borélienne et si P est une probabilité sur $(D, \mathscr{B}^0)$, on note $\mathscr{B}(P)$ la tribu $\mathscr{B}^0$ complétée pour P.

Pour tout $(w, t) \in D \times R_+$ on définit $X(w, t) = w(t)$, lorsqu'il n'y aura pas danger de confusion on supprimera le w et on écrira $X = (X(t);\ t \in R_+)$. La notation $\mathbf{B}^0$ est réservée pour la filtration $(\mathscr{B}_t^0;\ t \in R_+)$ où $\mathscr{B}_t^0$ est la tribu engendrée par $(X(s);\ s \leqq t)$; $\mathbf{B}(P) = (\mathscr{B}_t(P);\ t \in R_+)$ est la plus petite filtration contenant $\mathbf{B}^0$ et vérifiant les conditions habituelles de Dellacherie par rapport à la probabilité P sur $(D, \mathscr{B}^0)$ (i.e. chaque $\mathscr{B}_t(P)$ est complète pour P et $\mathbf{B}(P)$ est continue à droite).

C désigne le sous-espace de D constitué par les fonctions continues de R_+ dans R.

3. Pour simplifier les notations, nous ferons la convention suivante pour l'écriture des suites: $(a_n,\ n \in N)$ s'écrira en supprimant l'indice n et en ajoutant une parenthèse, c'est-à-dire $((a))$ (lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion!).

Soit $((P))$ une suite de probabilités sur $(D, \mathscr{B}^0)$. D'après le théorème de Prokhorov, $((P))$ est étroitement relativement compacte si et seulement si $(P))$ est D-tendue. Si $((P))$ est D-tendue et tout point d'adhérence est porté par C nous dirons que $((P))$ est C-tendue.

4. Un processus est une application mesurable d'un espace mesurable quelconque dans $(D, \mathscr{B}^0)$. Si Y est un processus défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, nous désignons par $\mathscr{L}(Y)$ sa loi sur $(D, \mathscr{B}^0)$. Si $((Y))$ est une suite de processus sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ nous dirons que $((Y))$ est D-tendue (resp. C-tendue) si la suite $((\mathscr{L}(Y)))$ est D-tendue (resp. C-tendue).

5. Si $\mathscr{Z}$ est une classe de processus définis sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathsf{P})$, $\mathscr{Z}^{\mathrm{loc}}$ (resp. $\mathscr{Z}_0$, resp. $\mathscr{Z}_c$) désigne la classe des processus Z pour lesquels il existe une suite $((T))$ de temps d'arrêt de $\mathbf{F}$ tels que $T_n \uparrow \infty$ P-p.s. et $Z^{T_n} \in \mathscr{Z}$ pour tout $n \in N$ — où $Z^T(t) = Z(t \wedge T)$ pour tout temps d'arrêt T de $\mathbf{F}$, $t \in R_+$ — (resp. des processus Z tels que $Z(0) = 0$ P-p.s., resp. des processus Z indistinguables d'un processus continu et nul à l'origine P-p.s.).

$\mathscr{V}_+[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$ est l'ensemble des processus croissants A, $\mathbf{F}$-adaptés, P-p.s. nuls à l'origine et tels que $\mathsf{E}(A(\infty)) < +\infty$ (d'après notre convention, A est à trajectoires dans D). $\mathscr{V}_+[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$ est appellé *l'ensemble des processus croissants intégrables.*

$\mathscr{V}[\mathbf{F}, \mathsf{P}] = \mathscr{V}_+[\mathbf{F}, \mathsf{P}] - \mathscr{V}_+[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$ est appellé *l'ensemble des processus à variation intégrable.*

$\mathcal{M}[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$ désigne l'ensemble des martingales uniformément intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathsf{P})$.

$\mathcal{M}^2[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$ désigne l'ensemble des martingales M sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathsf{P})$ vérifiant $\sup_{t \in R_+} \mathsf{E}(M^2(t)) < \infty$.

Pour tout élément M de $\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$, $[M] = [M, M]$ désigne le second processus croissant associé à M (cf. [3]); si $M \in \mathcal{M}^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$, $\langle M \rangle = \langle M, M \rangle$ désigne le processus croissant prévisible associé à M (qui est la projection duale prévisible de $[M]$).

6. Nous appellerons D_0^+ l'espace des éléments de D qui sont croissants et nuls à l'origine, muni de la topologie vague sur tout compact de R_+.

II. CRITERES DE COMPACITE ETROITE RELATIVE

Nous considérons un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ et une suite $((\mathbf{F}))$ de filtrations satisfaisant aux conditions habituelles.

1. Théorème. Soit $((M)) \in \prod_N \mathcal{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$*). Si $((\langle M \rangle))$ est C-tendue, alors $((M))$ et $(([M]))$ sont D-tendues.

Ce théorème a été partiellement annoncé dans [7]. Une démonstration détaillée se trouve dans [9]. Dans [4], [5] nous avons présenté des cas particuliers de ce théorème.

On montre facilement que si $M \in \mathcal{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$ et $\varepsilon > 0$ alors le *processus croissant* $M^\varepsilon = (M^\varepsilon(t);\, t \in R_+)$ défini par:

$$M^\varepsilon(t) \doteq \sum_{s \leq t} (\Delta M(s))^2 \, I_{[|\Delta M(s)| > \varepsilon]}, \quad (t \in R_+)^{**)}$$

est un élément de $\mathcal{V}_+^{\mathrm{loc}}[\mathbf{F}, \mathsf{P}]$. Nous désignons par $\overline{M}^\varepsilon$ son compensateur prévisible (ou projection duale prévisible, cf. [2], [3]).

2. Définition. Soit $((M)) \in \prod_N \mathcal{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$. Nous dirons que $((M))$ *vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts (condition R.A.S.)* si pour tous $\varepsilon > 0$, $t \in R_+$, la suite $((\overline{M}^\varepsilon(t)))$ converge vers zéro en probabilité.

3. Théorème. Soit $((M)) \in \prod_N \mathcal{M}_0^{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{F}_n, \mathsf{P})$. Supposons que $((M))$ vérifie la con-

*) Cette notation signifie que pour tout $n \in N$, $M_n \in \mathcal{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$.

**) Comme il est habituel, la notation $\Delta M(t)$ signifie $\Delta M(t) = M(t) - M(t-)$ c'est le saut au point t de M.

 dition R.A.S. Si l'une des suites $((M))$, $((\langle M\rangle))$ ou $(([M]))$ est C-tendue alors toutes les trois suites sont C-tendues.

Ce théorème est une conséquence directe de la Proposition II. 3.8, du Lemme II. 3.11 et du théorème II. 3.13 de [9]. La théorème précédent admet le corollaire suivant pour les martingales continues.

4. Corollaire. Soit $((M)) \in \prod_N \mathscr{M}_c^{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}, \mathrm{P})$. $((M))$ est C-tendue si et seulement si $((\langle M\rangle))$ est C-tendue.

Dans [7] nous avons annoncé un résultat complémentaire du Théorème 1 ci-dessus, la démonstration détaillée se trouve dans [9], voici son énoncé.

5. Théorème.. Soit $((M)) \in \prod_N \mathscr{M}^{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{F}, \mathrm{P})$. Supposons que pour tous $n \in N$, $t \in R_+$, on ait $|\Delta M_n(t)| \leqq c$ où c est une constante positive. Si $((M))$ est D-tendue, alors $((\langle M\rangle))$ et $(([M]))$ sont D_0^+-tendues.

III. CARACTERISATION DES POINTS D'ADHERENCE. PROBLEME DE MARTINGALES

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Nous rappellons qu'une *semi-martingale* relativement à $(\mathbf{F}, \mathrm{P})$ est un processus Z qui se décompose (de façon non unique) sous la forme

$$Z = Z(0) + M + V, \quad M \in \mathscr{M}_0^{\mathrm{loc}}[\mathbf{F}, \mathrm{P}], \quad V \in \mathscr{V}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{F}, \mathrm{P}].$$

Dans la suite nous considérerons une suite $((\mathbf{F}))$ de filtrations satisfaisant aux conditions habituelles.

1. Définitions.

1) Soit $\mathscr{A}^+$ l'esemble des processus croissant A définis sur $(D, \mathscr{B}^0)$, $\mathbf{B}^0$-adaptés, tels que l'application $w \to (w, A(w,.))$, de D dans l'espace de Skorokhod $D(R_+, R^2)$ soit continue. $\mathscr{A}$ désigne l'ensemble des $V = A_1 - A_2$, où $A_1, A_2 \in \mathscr{A}^+$ et tels que l'application $w \to (w, V(w,.))$ de D dans $D(R_+, R^2)$ soit continue. Soit A (resp. V) un élément $\mathbf{B}^0$-prévisible de $\mathscr{A}^+$ (resp. de $\mathscr{A}$). On note **Prob** (x, A, V), où $x \in R$, l'ensemble des probabilités P sur $(D, \mathscr{B}^0)$ pour lesquelles $A \in \mathscr{V}_+^{\mathrm{loc}}[\mathbf{B}(P), P]$, $V \in \mathscr{V}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{B}(P, P]$ et le processus canonique X est une $(\mathbf{B}(P), P)$-semi-martingale de décomposition $X = X(0) + M + V$ où $X(0) = x$, P-p.s.. $M \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{B}(P), P]$ et $\langle M, M\rangle = A$ (on dit que P est une *solution du „problème de martingales"* (x, A, V)).

2) Soit $((Y)), ((Z))$ deux suites de processus sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$. Nous dirons que $((Y))$ *et*

$((Z))$ *sont C-contigües* si pour tout $m \in N^*$, $\sup_{t \in [0,m]} |Y_n(t) - Z_n(t)|$ converge en probabilité vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

2. Théorème. Soient $A \in \mathscr{A}^+$, V un élément $\mathbf{B}^0$-prévisible de $\mathscr{A}$, $((X))$ une suite de processus sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ telle que pour tout $n \in N$, $X_n = X_n(0) + M_n + V_n$ avec $M_n \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$, $V_n \in \mathscr{V}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$ et $X_n(0) = x_n \in R$. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

(1) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in R_+$ la suite $((\overline{M}^\varepsilon(t)))$ converge en probabilité vers zéro;

(2) Il existe une fonction a croissante, continue à droite, de R_+ dans lui-même, telle que: $A(w, t) \leqq a(t)$ pour tout $(w, t) \in D \times R_+$;

(3) La suite $((A(X)))$ (resp. $((V(X))))$ est C-tendue (où $A(X_n) = (A(X_n, t);\ t \in R_+)$ et $A(X_n, t) = A(X_n(\omega, .), t)$, $\omega \in \Omega$, $n \in N$, $t \in R_+$);

(4) Les suites $((\langle M \rangle))$ et $((A(X)))$ (resp. $((V))$ et $((V(X))))$ sont C-contigües;

(5) La suite $((x))$ converge vers une limite x dans R.

Alors $((X))$ est D-tendue et tout point d'adhérence P de $((\mathscr{L}(X)))$ appartient à **Prob** (x, A, V). En outre $A \in \mathscr{V}_{+,\mathrm{c}}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{B}(P), P]$; le processus canonique X est une semimartingale spéciale (au sens de Meyer [3]) et la martingale locale M de sa décomposition (unique en ce cas) vérifie $\sup_{t \in R_+} |\Delta M(t)| \leqq 2\varepsilon$. (En particulier, si au lieu de (1) la condition R.A.S. est vérifiée, alors $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{B}(P), P]$.) Si en outre le problème de martingales (x, A, V) possède une solution unique, alors $((\mathscr{L}(X)))$ converge étroitement vers cette solution.

Ce résultat est établi dans [9]. Nous allons voir maintenant quelques applications.

3. Soient a et b deux fonctions réelles continues et bornées, $a(x) > 0$ pour tout $x \in R$. On considère l'opérateur différentiel

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}\, a(x) \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) + b(x) \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \quad (x \in R)$$

défini sur les fonctions réelles f indéfiniment dérivables à support compact.

Suivant la présentation classique de Stroock et Varadhan [11], une diffusion partant de x associée à L est une solution P du problème de martingales (x, A, V) où

$$A(w, t) = \int_0^t a(w(s))\, \mathrm{d}s\,, \tag{1}$$

$$V(w, t) = \int_0^t b(w(s))\, \mathrm{d}s\,, \quad (w, t) \in D \times R_+ \tag{2}$$

et telle que $P(C) = 1$.

Dans [11] Stroock et Varadhan ont montré l'unicité de la solution du problème de martingales (x, A, V) avec les hypothèses faites ci-dessus sur a et b. Nous avons ainsi le corollaire suivant.

4. Corollaire. Soit $((X))$ une suite de processus telle que pour tout $n \in N$, $X_n = X_n(0) + M_n + V_n$ avec $M_n \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$, $V_n \in \mathscr{V}^{\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$ et $X_n(0) = x_n \in R$. Soient A et V définis par 3. (1) et 3. (2) et supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites:

(1) $((M))$ vérifie la condition R.A.S.;

(2) les suites $((\langle M\rangle))$ et $((A(X)))$ (resp. $((V))$ et $((V(X))))$ sont C-contigües;

(3) la suite $((x))$ converge vers une limite x dans R.

Alors $((\mathscr{L}(X)))$ converge étroitement vers la solution du problème de martingales (x, A, V).

Nous pouvons également obtenir un Théorème Central Limite pour les martingales locales, à partir du Théorème 2 ci-dessus, en utilisant la caractérisation des martingales gaussiennes continues en fonction de leur processus croissant associé.

5. Corollaire. Soit $((M)) \in \prod_N \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbf{F}_n, \mathsf{P}]$. Soit A une fonction croissante et continue de R_+ dans lui-même. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

(1) $((M))$ satisfait la condition R.A.S.;

(2) pour tout $t \in R_+$, la suite $((\langle M\rangle(t)))$ converge en probabilité vers $A(t)$.

Alors $((\mathscr{L}(M)))$ converge étroitement vers une loi gaussienne centrée P, de covariance $K(s, t) = A(s \wedge t)$ $((s, t) \in R_+^2)$, telle que $P(C) = 1$. C'est la loi d'une martingale continue de processus croissant associé A, nulle à l'origine.

Ce corollaire a été présenté dans [6] avec une démonstration succinte. Une démonstration plus détaillée se trouve dans [9]. Une version multidimensionnelle de ce résultat est parue dans [8] où on l'applique à l'étude statistique d'une famille de processus ponctuels.

(Reçu le 15 Avril 1978.)

REFERENCES

[1] P. Billingsley: Convergence of Probability Measures. John Wiley, 1968.

[2] C. Dellacherie: Capacités et Processus Stochastiques. Springer-Verlag, 1972.

[3] P. A. Meyer: Un cours sur l'Intégrale Stochastique. Sem. de Proba. X. Lecture Notes in Math. 511 (1974/1975).

[4] R. Rebolledo: Convergence en loi des martingales continues. C. R. Acad. Sci. Paris *282*, série A, (1976), 483—485.

[5] R. Rebolledo: Remarques sur la convergence en loi des martingales vers des martingales continues. C. R. Acad. Sci. Paris *285*, série A, (1977), 465—468.

[6] R. Rebolledo: Remarques sur la convergence en loi des martingales vers des martingales continues, ($2^{\text{ème}}$ partie). C.R. Acad. Sci. Paris *285*, série A, (1977), 517—520.

[7] R. Rebolledo: Convergence en loi de martingales locales discontinues. C. R. Acad. Sci. Paris à paraître.

[8] R. Rebolledo: Sur les applications de la théorie des martingales à l'étude statistique d'une famille de processus ponctuels. Proceedings du Colloque de Statistique de Grenoble. Lectures Notes in Math. 636 (1978), 27—70.

[9] R. Rebolledo: La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus. A paraître.

[10] C. Stone: Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite intervals. Proc. A. M. S. *14* (1964) pp. 694 sg.

[11] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan: Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure Appl. Math. *22* (1969), 345—400 et 479—530.

Prof. Rolando Rebolledo, Laboratoire de Probabilité Associé au C. N. R. S. N° 244, Université Pierre & Marie Curie, 75230 Paris Cedex 05. France.