KYBERNETIKA — TOM *13* (1977), ВЫПУСК 3

Структурные свойства линейных регуляторов в стационарных системах управления

Михаил М. Константинов, Симеон П. Патарински, Петко Хр. Петков, Николай Д. Христов

В работе находятся необходимые и достаточные условия совпадения траекторий двух линейных стационарных систем, порожденные начальным условием из некоторого подпространства пространства состояний. Таким образом решается вопрос о существовании неоптимального регулятора, для которого траектория системы, исходящая из некоторого подпространства, совпадает с оптимальной траекторией. Указан явный вид регулятора, для которого это явление имеет место. Изучены также некоторые новые свойства решений матричных уравнений Риккати и Ляпунова и найдены условия инвариантности критерия качества в линейно-квадратичных задачах.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящей работе рассматриваются свойства линейных стационарных систем управления, связанные с неединственностью структуры линейного оптимального регулятора на некотором множестве траекторий. Изучается класс n-мерных систем управления $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ с критерием качества $J \to \min$. Допустимыми управлениями являются все линейные по $\boldsymbol{x}(t)$ m-мерные ($m \leqq n$) функции $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{K} = \text{const}$. При достаточно общих предположениях относительно J задача оптимального управления этих систем допускает единственное решение $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{u}}(t) = -{}^{-}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)$. Так как критерий J зависит вообще и от начального условия: $J = J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_0)$, то единственность следует понимать в следующем смысле: 1) для каждого $\boldsymbol{x}_0$ оптимальное управление $\bar{\boldsymbol{u}}$ и соответствующая ему оптимальная траектория $\bar{\boldsymbol{x}}$ единственны как функции (как „программы") – $\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}}(t)$, $\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}(t)$; 2) существует единственная матрица ${}^{-}\boldsymbol{K}$, такая что управление $\bar{\boldsymbol{x}} = -{}^{-}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ минимизирует J при всех $\boldsymbol{x}_0$.

Отметим, что если 2) не имеет место, т. е. если существует $\boldsymbol{K}^* \neq {}^{-}\boldsymbol{K}$, такая что $J(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{x}_0) = J(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{x}$, при всех $\boldsymbol{x}_0$, то единственность в смысле условия 2) сохраняется в разбиении множества допустимых управлений на классы эквивалентности „по модулю J“.

В то же время оказывается, что существует подпространство $\mathscr{D}^N$ ($N = \dim \mathscr{D}^N \leqq n - 1$) пространства состояний $\mathscr{E}^n$, такое что $J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_0) = J(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, для всех $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{D}^N$. При этом $\boldsymbol{K} \neq {}^-\boldsymbol{K}$, хотя согласно свойству 1) по траекториям системы, порожденные начальным условием $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{D}^N$, выполнено $\boldsymbol{u}(t) \equiv \bar{\boldsymbol{u}}(t)$, $\boldsymbol{x}(t) \equiv \bar{\boldsymbol{x}}(t)$.

В настоящей работе найдены условия существования подпространства $\mathscr{D}^N \subset \mathscr{E}^n$ с заданной размерностью $N \leqq n - 1$, такое что $\boldsymbol{x}(t) \equiv \bar{\boldsymbol{x}}(t)$ для каждого $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{D}^N$, где

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 ; \quad \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = {}^-\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{x}} , \quad \bar{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0 ,$$

при произвольных $\boldsymbol{G} \neq {}^-\boldsymbol{G}$ и в частности при $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$, ${}^-\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\,{}^-\boldsymbol{K}$; $\boldsymbol{K} \neq {}^-\boldsymbol{K}$. При этом для каждых ${}^-\boldsymbol{K}$ и N указан явный вид матрицы $\boldsymbol{K}$ и подпространства $\mathscr{D}^N$, такие что $\boldsymbol{x}(t) \equiv \bar{\boldsymbol{x}}(t)$ при всех $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{D}^N$.

Случай, когда J является функционалом квадратического типа, рассмотрен для иллюстрации полученных результатов. В связи с этом изучены некоторые свойства матричных уравнений Риккати и Ляпунова. Получены также условия инвариантности квадратического критерия на многопараметрическом семействе неоптимальных управлений.

Отметим что вопрос о неединственности матрицы обратной связи для управлений, минимизирующих J на некотором множестве оптимальных траекторий, рассматривался прежде в [2].

Дальше будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathscr{E}^{n.m}$ – пространство ($n \times m$)-матриц ($\mathscr{E}^{n.1} = \mathscr{E}^n$) над полем вещественных или комплексных чисел: $\mathscr{E} = \mathscr{R}$ или $\mathscr{E} = \mathscr{C}$; $\boldsymbol{I}_n$ – единичная ($n \times n$)-матрица; $\boldsymbol{A}'$ – матрица, транспонированная к $\boldsymbol{A}$; $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \lambda_n(\boldsymbol{A})\}$-спектр матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathscr{E}^{n.n}$; $S_f \subset \mathscr{R}^{n.n}$-множество симметричных положительно полуопределенных матриц $\boldsymbol{P} \geqq \boldsymbol{0}$ ранга f; $\Pi_n \subset \mathscr{R}^{n.n}$ – множество матриц, неимеющих собственные (одномерные) инвариантные подпространства в $\mathscr{R}^n$. Для $k = 1, 2, \ldots$ имеем $\Pi_{2k-1} = \emptyset$ и

$$\Pi_{2k} = \{\boldsymbol{A} : \sigma(\boldsymbol{A}) \cap \mathscr{R} = \emptyset\} .$$

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$(\text{Л}) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} , \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 ; \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} ,$$

где $\boldsymbol{x}(t) \in \mathscr{E}^n$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathscr{E}^r$, $\boldsymbol{A} \in \mathscr{E}^{n.n}$, $\boldsymbol{C} \in \mathscr{E}^{r.n}$.

Через $\omega(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}) \in \mathscr{E}^{rn.n}$ будем обозначать матрицу наблюдаемости системы (Л):

$$\omega'(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}) \triangleq [\boldsymbol{C}'\ \boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'\ \ldots\ \boldsymbol{A}'^{n-1}\boldsymbol{C}'] \in \mathscr{E}^{n.rn} ,$$

а через $\langle C, A\rangle \triangleq \operatorname{Ker} \omega(C, A)$ – нуль-пространство матрицы $\omega(C, A)$:

$$\langle C, A\rangle = \bigcap_{k=0}^{n-1} \operatorname{Ker} CA^k = \operatorname{Ker} \sum_{k=0}^{n-1} A'^k C' C A^k .$$

2. СОВПАДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим две стационарные системы в $\mathscr{E}^n$:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 , \quad x_1(0) = x_0 , \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 , \quad x_2(0) = x_0 , \tag{2}$$

где $A_1 \neq A_2$. Для любых A_1, A_2 имеем

$$\Omega(A_1, A_2) \triangleq \bigcap_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(A_1^k - A_2^k) =$$
$$= \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{Ker}(A_1 - A_2) A_1^k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{Ker}(A_1 - A_2) A_2^k ,$$

откуда в силу теоремы Гамильтона-Кэли следует

$$\Omega(A_1, A_2) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \operatorname{Ker}(A_1 - A_2) A_1^k = \bigcap_{k=0}^{n-1} \operatorname{Ker}(A_1 - A_2) A_2^k ,$$

т. е.

$$\Omega(A_1, A_2) = \langle A_1 - A_2, A_1\rangle = \langle A_1 - A_2, A_2\rangle . \tag{3}$$

Обозначим через A какую-нибудь из матриц A_1 или A_2.

Теорема 1. Для выполнения тождества $x_1(t) \equiv x_2(t)$ по траекториям систем (1) и (2) необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in \mathscr{D}^N = \langle A_1 - A_2, A\rangle$, где $N = n\text{-rank}\, \omega(A_1 - A_2, A)$.

Доказательство. Имеем

$$x_1(t) - x_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A_1^k - A_2^k)\right] x_0 \equiv 0 ,$$

т. е. $x_0 \in \Omega(A_1, A_2)$. Теперь утверждение теоремы следует из (3).

Теорему 1 можно доказать и на основе следующего утверждения: система (Л) имеет решение $x(t)$, такое что $y(t) \equiv 0$, тогда и только тогда, когда $x_0 \in \langle C, A\rangle$ (см. также [5], [6]).

Следствие 1. Если $N \geqq 1$, то система $\dot{x} = Ax$, $y = (A_1 - A_2)\,x$, не является полностью наблюдаемой.

Следствие 2. Пусть $A_1A_2 = A_2A_1$. Тогда $\mathscr{D}^N = \operatorname{Ker}(A_1 - A_2)$, $N = n - \operatorname{rank}(A_1 - A_2)$.

Действительно, если A_1 и A_2 коммутируют, то $\Omega(A_1, A_2) = \operatorname{Ker}(A_1 - A_2)$.

Рассмотрим вопрос о размерности N и структуры подпространства $\mathscr{D}^N$.

Пусть $F \in \mathscr{E}^{n,n}$, $h \in \mathscr{E}^n$.

Определение. Число

$$\nu(F) = \nu(F') = \min\{\operatorname{rank}\omega(h', F) : h \neq 0\}$$

назовем индексом ацикличности матрицы F.

Теорема 2. Индекс ацикличности матрицы $F \in \mathscr{E}^{n,n}$ определяется из

$$\nu(F) = \begin{cases} 1, & F \mathrel{\bar{\in}} \Pi_n\,, \\ 2, & F \in \Pi_n\,. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно $\nu(F) \geqq 1$. Если $F \mathrel{\bar{\in}} \Pi_n$ (т. е. $\mathscr{E} = \mathscr{C}$ или $\mathscr{E} = \mathscr{R}$ и $\sigma(F) \cap \mathscr{R} \neq \emptyset$), то матрица F имеет собственный вектор $a \in \mathscr{E}^n$. Тогда при $h = a$ получаем $\nu(F) = 1$. Пусть теперь $F \in \Pi_n$ (т. е. $n = 2k$, $\mathscr{E} = \mathscr{R}$ и $\sigma(F) \cap \mathscr{R} = \emptyset$). Тогда для каждого $h \in \mathscr{R}^{2k}$, $h \neq 0$, векторы h и Fh линейно независимы в силу определения матрицы F. Отсюда $\nu(F) \geqq 2$, $F \in \Pi_{2k}$. Покажем, что для каждой $F \in \Pi_{2k}$ существует вектор $h \in \mathscr{R}^{2k}$, такой, что $\operatorname{rank}\omega(h', F) = 2$. Случай $k = 1$ тривиален: для каждого $h \neq 0$ выполнено $\operatorname{rank}\omega(h', F) = 2$. Пусть $k \geqq 2$. Без ограничения общности можно считать, что F – циклическая матрица, так как это не уменьшает $\nu(F)$. Следовательно $\sigma(F)$ состоится из k различных комплексно сопряженных пар $a_s \pm ib_s$; $s = 1, \ldots, k$. Пусть $\tilde{F} = TFT^{-1}$ ($T \in \mathscr{R}^{n,n}$, $\det T \neq 0$) – вещественная жорданова форма матрицы F. В силу совпадения минимального многочлена матрицы F с характеристическим, каждая пара $a_s \pm ib_s$ используется только в одной жордановой клетке размера 2×2:

$$\tilde{F} = \operatorname{diag}[J_1, \ldots, J_k]\,,$$

где

$$J_s = \begin{bmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{bmatrix}; \quad s = 1, \ldots, k\,.$$

Пусть $g = Th$, $g' = [g_1', \ldots g_k']$, $g_s' \in \mathscr{R}^2$; $s = 1, \ldots, k$.

Тогда $\omega'(\boldsymbol{h}', \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{T}^{-1}\, \omega'(\boldsymbol{g}', \tilde{\ }\boldsymbol{F})$ и

$$\omega'(\boldsymbol{g}', \tilde{\ }\boldsymbol{F}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{g}_1 & \dots & \boldsymbol{J}_k^{2k-1}\boldsymbol{g}_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \boldsymbol{g}_k & \boldsymbol{J}_k\boldsymbol{g}_k & \dots & \boldsymbol{J}_k^{2k-1}\boldsymbol{g}_k \end{bmatrix}.$$

Выберем $\boldsymbol{g}$ из условия $\boldsymbol{g}_s = 0$, $s \neq l$ и $\boldsymbol{g}_l \neq 0$ для некоторого $1 \leqq l \leqq k$. Тогда при $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{g}$ имеем

$$\operatorname{rank} \omega(\boldsymbol{h}', \boldsymbol{F}) = \operatorname{rank} \omega(\boldsymbol{g}', \tilde{\ }\boldsymbol{F}) = \operatorname{rank} [\boldsymbol{g}_l\, \boldsymbol{J}_l\boldsymbol{g}_l] = 2\,,$$

что завершает доказательство Теоремы 2.

Из Теоремы 2 получаем несколько неожиданное следствие:

Следствие 3. Пусть задана произвольная матрица $\boldsymbol{F} \in \mathscr{E}^{n,n}$, $n \geqq 2$. Тогда для того, чтобы каждый ненулевый вектор $\boldsymbol{h} \in \mathscr{E}^n$ являлся циклическим относительно $\boldsymbol{F}$ генератором для всего пространства $\mathscr{E}^n$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{E} = \mathscr{R}$, $n = 2$ и $\sigma(\boldsymbol{F}) \cap \mathscr{R} = \emptyset$ (т. е. чтобы $\boldsymbol{F} \in \Pi_2$).

Действительно, условия следствия 3 означают, что $\nu(\boldsymbol{F}) = n$.

Эквивалентная формулировка Следствия 3 состоится в следующем.

Следствие 4. Для того, чтобы система $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}^r$, $1 \leqq r < n$, была вполне наблюдаемой для каждой матрицы $\boldsymbol{H} \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{E} = \mathscr{R}$, $n = 2$ и $\boldsymbol{F} \in \Pi_2$.

Имеют место также

Следствие 5. В условиях теоремы 1 выполнено неравенство

$$N \leqq n - \max\{\nu(\boldsymbol{A}_1), \nu(\boldsymbol{A}_2)\}$$

и

Следствие 6. Для каждой $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_2)$ существует матрица A_2 (A_1), такая что $N = n - \nu(\boldsymbol{A}_1)$ $(N = n - \nu(\boldsymbol{A}_2))$.

Действительно, выберем $\boldsymbol{A}_2$ так, чтобы матрица $\boldsymbol{A}_1' - \boldsymbol{A}_2'$ имела единственный ненулевый столбец $\boldsymbol{a} \in \mathscr{E}^n$. Если $\boldsymbol{A}_1 \bar{\in} \Pi_n$, то есть $\nu(\boldsymbol{A}_1) = 1$, то пусть $\boldsymbol{a}$ – собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}_1'$. В случае $\boldsymbol{A}_1 \in \Pi_n$ алгоритм нахождения $\boldsymbol{a}$ описан в Теореме 2.

Следствие 7. Пусть $N \geqq 1$ и $\boldsymbol{A}_j$ – циклическая матрица, где $j = 1$ или $j = 2$. Тогда столбцы матрицы $\boldsymbol{A}_1' - \boldsymbol{A}_2'$ не принадлежат подпространству циклических генераторов матрицы $\boldsymbol{A}_j'$.

Следствие 8. Пусть $N \geqq 1$. Тогда $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \bar{\in} \Pi_2$.

Рассмотрим стабилизируемую систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad x(0) = x_0\,; \quad t \geqq 0\,, \tag{4}$$

с критерием качества

$$J = J(u, x_0) \to \min \tag{5}$$

и множеством допустимых управлений

$$U = \{u : u(t) = -K\,x(t),\ K = \text{const} \in \mathscr{E}^{m.n}\}\,, \tag{6}$$

где $x \in \mathscr{E}^n$, $u \in \mathscr{E}^m$, $A \in \mathscr{E}^{n.n}$, $B \in \mathscr{E}^{n.m}(m \leqq n,\ \text{rank}\,B = m,\ n \geqq 2)$.

Без ограничения общности будем считать, что $B = I_n$ при $m = n$ и $B' = [0\ I_m]$ при $m < n$, так как в силу условия $\text{rank}\,B = m$ матрица B всегда может быть приведена в этом виде.

Пусть оптимальная задача (4), (5), (6) имеет единственное стабилизирующее решение $\bar{u} = -{}^-Kx$, которое минимизирует (5) при всех $x_0 \in \mathscr{E}^n$. Замкнутая система, соответствующая управлению $\bar{u}$, есть

$$\dot{\bar{x}} = (A - B\,{}^-K)\,x \triangleq {}^-G\bar{x}\,, \quad \bar{x}(0) = x_0\,. \tag{7}$$

Вместе с $\bar{u}$ рассмотрим неоптимальное управление $u = -Kx$, $K \neq {}^-K$, при котором

$$\dot{x} = (A - BK)\,\bar{x} \triangleq Gx\,, \quad x(0) = x_0\,. \tag{8}$$

Отметим, что случай когда система (8) неустойчива не исключается.

Из Теоремы 1 и Следствий 5 и 6 получаем, что справедливы следующие две теоремы:

Теорема 3. Для выполнения тождества $x(t) \equiv \bar{x}(t)$ по траекториям систем (7) и (8) необходимо и достаточно, чтобы

$$x_0 \in \mathscr{D}^N = \langle K - {}^-K, {}^-G\rangle = \langle K - {}^-K, G\rangle\,,$$

где

$$N = n - \text{rank}\,\omega(K - {}^-K, {}^-G) = n - \text{rank}\,\omega(K - {}^-K, G) \leqq$$
$$\leqq n - \max\{\nu({}^-G),\ \nu(G)\}\,.$$

Теорема 4. Для каждого $l \leqq n - \nu({}^-G)$ существует матрица $K \in \mathscr{E}^{m.n}$, такая что $N = l$.

Аналогичным образом из следствий 7 и 8 вытекает

Теорема 5. Для существования матрицы $\boldsymbol{K}$, такой что $N \geqq 1$, необходимо и достаточно, чтобы ${}^{-}\boldsymbol{G} \bar{\in} \Pi_2$. При этом столбцы матрицы $\boldsymbol{K}' - {}^{-}\boldsymbol{K}'$ не принадлежат подпространствам циклических генераторов матриц ${}^{-}\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}$.

Рассмотрим способы построения матрицы $\boldsymbol{K}$, для которой подпространство $\mathscr{D}^N$ имеет максимальную размерность $N = n - \nu({}^{-}\boldsymbol{G})$.

Если ${}^{-}\boldsymbol{G} \bar{\in} \Pi_n$, то матрица ${}^{-}\boldsymbol{G}'$ имеет собственный вектор $\boldsymbol{f} \in \mathscr{E}^n$, соответствующий собственному значению λ. Выберем $\boldsymbol{K}$ из условия

$$(9) \qquad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_b = {}^{-}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}', \quad 0 \neq \boldsymbol{b} \in \mathscr{E}^m .$$

Тогда

$$\omega'(\boldsymbol{K} - {}^{-}\boldsymbol{K}, {}^{-}\boldsymbol{G}) = [\boldsymbol{f}\boldsymbol{b}' \;\; \lambda\boldsymbol{f}\boldsymbol{b}' \; \ldots \; \lambda^{n-1}\boldsymbol{f}\boldsymbol{b}']$$

и

$$N = n - \operatorname{rank} \omega(\boldsymbol{K} - {}^{-}\boldsymbol{K}, {}^{-}\boldsymbol{G}) = n - 1 .$$

Зависимость (9) определяет m-параметрическое семейство $\{\boldsymbol{K}_b\}$ матриц $\boldsymbol{K}$, таких что $N = n - 1$ для каждого собственного вектора $\boldsymbol{f}$ матрицы ${}^{-}\boldsymbol{G}' \bar{\in} \Pi_n$.

Если ${}^{-}\boldsymbol{G} \in \Pi_n$, то вектор $\boldsymbol{f}$ в (9) можно определить при помощи алгоритма нахождения вектора $\boldsymbol{h}$ в Теореме 2; при этом $N = n - 2$.

В случае ${}^{-}\boldsymbol{G} \in \Pi_n$, $n = 2k \geqq 4$ и $m \geqq 2$ можно указать и другой способ построения матрицы $\boldsymbol{K}$, для которой $N = n - 2$. Пусть $\boldsymbol{f}_0 + i\boldsymbol{f}_1 \in \mathscr{C}^{2k}(\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1 \in \mathscr{R}^{2k})$ – собственный вектор комплексного продолжения вещественного оператора ${}^{-}\boldsymbol{G}'$, соответствующий собственному значению $a + ib$, Пусть $\varphi = [\boldsymbol{f}_0 \, \boldsymbol{f}_1] \in \mathscr{R}^{n,2}$ и

$$(10) \qquad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_\beta = {}^{-}\boldsymbol{K} + \beta\varphi', \quad 0 \neq \beta \in \mathscr{R}^{m,2} .$$

Тогда

$$\omega'(\boldsymbol{K} - {}^{-}\boldsymbol{K}, {}^{-}\boldsymbol{G}) = [\varphi\beta' \;\; \varphi\Lambda\beta' \; \ldots \; \varphi\Lambda^{n-1}\beta'] ,$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

и

$$N = n - \operatorname{rank} \omega(\boldsymbol{K} - {}^{-}\boldsymbol{K}, {}^{-}\boldsymbol{G}) = n - 2 .$$

Зависимость (10) определяет $2m$-параметрическое семейство $\{\boldsymbol{K}_\beta\}$ матриц $\boldsymbol{K}$, таких что $N = n - 2$ для каждого собственного вектора $\boldsymbol{f}_0 + i\boldsymbol{f}_1$ комплексного продолжения ${}^{-}\boldsymbol{G}' \in \Pi_n$, $n = 2k \geqq 4$.

Предположим, что (5) является функционалом квадратичного типа и $\mathscr{E} = \mathscr{R}$:

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t \to \min\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \in \mathscr{R}^r$, $\boldsymbol{C} \in \mathscr{R}^{r \cdot n} (r \leqq n, \operatorname{rank} \boldsymbol{C} = r)$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} \in \mathscr{R}^{n \cdot n}$, а диада $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ – детектируемая (квадратичный критерий более общего вида заменой переменных сводится к (11)).

Как известно [1], [4], [3], [6] оптимальное стабилизирующее управление $\bar{\boldsymbol{u}} = -\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ определяется из $\bar{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{B}'\bar{\boldsymbol{P}}$, где матрица $\bar{\boldsymbol{P}} \geqq 0$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\boldsymbol{A}'\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D} - \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\bar{\boldsymbol{P}} = 0\,. \tag{12}$$

При этом критерий качества (11) принимает минимальное значение $\bar{J} = \boldsymbol{x}_0'\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x}_0$. Напомним, что если диада $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ – стабилизируемая, а диада $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ – наблюдаемая, то $\bar{\boldsymbol{P}} > 0$.

Рассмотрим неоптимальное стабилизирующее управление $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{K} \neq \bar{\boldsymbol{K}}$ (за счет некоторого усложнения выкладок можно рассмотреть также нестабилизирующие управления, на что остановливаться не будем). Всюду дальше будем считать, что для каждой рассматриваемой $\boldsymbol{K}$ матрица $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ асимптотически устойчива.

При управлении $\boldsymbol{u}$ имеем $J = \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$, где $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}) \geqq \bar{\boldsymbol{P}}$ – решение уравнения Ляпунова

$$\boldsymbol{G}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}'\boldsymbol{K} = 0\,, \quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\,. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует

$$\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}}) + (\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}})'(\boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}) = 0 \tag{14}$$

и

$$(\boldsymbol{K}' - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D} \geqq 0\,. \tag{15}$$

Используя результаты работ [3], [6] на основе (14) получаем, что полная наблюдаемость диады $(\boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{G})$ влечет $\boldsymbol{P} > \bar{\boldsymbol{P}}$. Однако применяя Теорему 3 можно получить более общее утверждение:

Теорема 6. Для любой матрицы $\boldsymbol{K}$ выполнено условие

$$\operatorname{Ker}(\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}}) = \langle \boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}, \bar{\boldsymbol{G}} \rangle = \langle \boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{G} \rangle\,.$$

Доказательство Теоремы 6 следует из теоремы 3 и из того факта, что нулевое пространство квадратичной формы совпадает с ядром ее матрицы.

Применяя Теорему 6 получаем, что если диада $(\boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{G})$ вполне наблюдаема, то $\langle \boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{G} \rangle = 0$ и $\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}} > 0$.

Следствие 9. Выполнено равенство

$$n - \nu(\bar{\boldsymbol{G}}) = \max\{\dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}}) : \boldsymbol{K} \neq \bar{\boldsymbol{K}}\} .$$

Следствие 10. Для каждого l, $\nu(\bar{\boldsymbol{G}}) \leqq l \leqq n - 1$, существует матрица $\boldsymbol{K} \neq \bar{\boldsymbol{K}}$, такая что $\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}} \in S_l$. Для каждой матрицы $\boldsymbol{K} \neq \bar{\boldsymbol{K}}$ выполнено неравенство $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}}) \geqq \nu(\bar{\boldsymbol{G}})$.

Действительно, $\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}} \in S_l$ тогда и только тогда, когда

$$l = n - \dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}}) = \operatorname{rank} \omega(\boldsymbol{K} - \bar{\boldsymbol{K}}, \bar{\boldsymbol{G}}) .$$

Следствие 11. Условие $\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}} \in S_1$ выполнено тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{G}, \bar{\boldsymbol{G}} \in \Pi_n$ и существует ненулевый вектор $\boldsymbol{f} \in \mathscr{R}^n$, такой что:

– столбцы матрицы $\boldsymbol{K}' - \bar{\boldsymbol{K}}'$ принадлежат линейной оболочке вектора $\boldsymbol{f}$;

– вектор $\boldsymbol{f}$ является собственным вектором матриц $\bar{\boldsymbol{G}}'$, $\boldsymbol{G}'$ и $\boldsymbol{G}' - \bar{\boldsymbol{G}}'$.

Рассмотрим наконец вопрос об инвариантности критерия (11) на всем множестве (вообще говоря несовпадающих и неоптимальных) траекторий.

Пусть существует матрица $\boldsymbol{P} \geqq 0$, $\boldsymbol{P} \neq \bar{\boldsymbol{P}}$, такая что

$$\boldsymbol{PBB'P} - \boldsymbol{A'P} - \boldsymbol{PA} - \boldsymbol{D} = \boldsymbol{Y'Y}, \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{P}) \in \mathscr{R}^{m,n}, \tag{16}$$

где $\operatorname{rank} \boldsymbol{Y} = m$ (случай, когда $\operatorname{rank} \boldsymbol{Y} \leqq m - 1$, $m \geqq 2$, рассматривается аналогично). Тогда согласно (15) получаем, что $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{TY} + \boldsymbol{B'P}$, где $\boldsymbol{T} \in \mathscr{R}^{m,m}$ – ортогональная матрица, зависящая вообще говоря от $m - 1$ параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. Обозначим через $\{\boldsymbol{T}_\alpha\} = \{\boldsymbol{T}_\alpha^{(1)}, \boldsymbol{T}_\alpha^{(-1)}\}$, $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}]' \in \mathscr{R}^{m-1}$, совокупность всех ортогональных матриц, соответствующих евклидовых поворотов в $\mathscr{R}^m$ с сохранением $(\{\boldsymbol{T}_\alpha^{(1)}\})$ и нарушением $(\{\boldsymbol{T}_\alpha^{(-1)}\})$ ориентации (при $m = 1$ имеем $\{\boldsymbol{T}_\alpha\} = \{1, -1\}$). Пусть $R^\perp$ – разбиение пространства $\mathscr{R}^{m-1}$ на классы эквивалентности по „модулю $\boldsymbol{T}_\alpha''$: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{T}_\alpha = \boldsymbol{T}_\beta$.

Рассмотрим семейство управлений $\{\boldsymbol{u}_\alpha\}$,

$$\boldsymbol{u}_\alpha = -\boldsymbol{K}_\alpha \boldsymbol{x} , \quad \boldsymbol{K}_\alpha = \boldsymbol{T}_\alpha \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{B'P} .$$

Согласно сделанных предположений матрица $\boldsymbol{K}_\alpha$ стабилизирует систему (8) для каждого $\alpha \in R^\perp$. По траекториям соответствующих замкнутых систем

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}_\alpha)\, \boldsymbol{x}_\alpha \triangleq \boldsymbol{G}_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha , \quad \boldsymbol{x}_\alpha(0) = \boldsymbol{x}_0 ,$$

выполняется условие

$$J(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0' \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}_0 , \quad \alpha \in R^\perp ,$$

для всех $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{R}^n$.

Таким образом для каждой $P \geqq 0$, $P \neq \bar{P}$, удовлетворяющей (16), существует семейство $\{K_\alpha\}$ стабилизирующих матриц K_α, таких что критерий (11) инвариантен относительно u_α при всех x_0. При этом может оказаться, что $x_\alpha(t) \not\equiv x_\beta(t)$, $\alpha \neq \beta$. Следовательно по неоптимальным траекториям совпадение критерия качества не является необходимым для совпадения соответствующих траекторий.

Условия совпадения траекторий $x_\alpha(t)$ и $x_\beta(t)$ исследуются аналогично как и в случае $x(t)$ и $\bar{x}(t)$.

Отметим наконец еще одно следствие из сделанных рассуждений:

Следствие 12. Для любой P, удовлетворяющей (16), и α, $\beta \in R^{\perp}$, $\alpha \neq \beta$, выполнено условие

$$\operatorname{Ker}(P - \bar{P}) = \langle K_\alpha - K_\beta, G_\gamma \rangle = \langle K_\alpha - K_\beta, \bar{G} \rangle = \\ = \langle K_\gamma - \bar{K}, \bar{G} \rangle = \langle K_\alpha - \bar{K}, G_\gamma \rangle ,$$

где $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены необходимые и достаточные условия совпадения траекторий двух линейных динамических систем, исходящих из некоторого подпространства в пространстве состояний. Рассмотрен вопрос о существовании оптимальных траекторий неоптимальных систем управления. Указан явный вид матрицы неоптимального закона управления и множества начальных состояний, порождающих такие траектории. В качестве примера рассмотрены линейные системы с квадратичным критерием и изучены некоторые свойства решений матричных уравнений Риккати и Ляпунова. Найдены условия инвариантности квадратичного критерия на некотором множестве неоптимальных систем при всех начальных условиях.

(Поступило в редакцию 31 марта 1976)

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. E. Kalman: Contributions to the theory of optimal control. Bol. Soc. Mat. Mexicana *5* (1960), 2, 102—119.

[2] М. М. Константинов, С. П. Патарински, П. Хр. Петков, Н. Д. Христов: Върху някои проблеми на аналитичното конструиране на регулатори в линейни системи с квадратичен критерий. Докл. на Юб. научна сесия на ВИММЕСС-Русе, *3*, (1974), 42—53.

[3] V. A. Kučera: Contribution to the matrix quadratic equations. IEEE Trans. Automat. Contr. *AC-17* (1972), 3, 344—347.

[4] А. М. Летов: Аналитическое конструирование регуляторов, I—V. Автоматика и телемеханика XXI (1960), 4, 436—441, 5, 561—568, 6, 661—665; XXII (1961), 4, 425—435; XXIII (1962), 11, 1405—1413.

[5] E. B. Lee, L. Markus: Foundations of optimal control theory. Wiley, New York 1967. (Русс. перевод Наука, Москва 1972.)

[6] W. M. Wonham: Linear multivariable control. A geometric approach. Springer-Verlag, Berlin 1974.

Михаил М. Константинов, Симеон П. Патарински, Петко Хр. Петков, Николай Д. Христов, Высший машинно-электротехнический институт имени В. И. Ленина, Кафедра автоматики, София. Болгария.