KYBERNETIKA — TOM 12 (1976), ВЫПУСК 1

О раскраске гиперграфов

А. Д. Коршунов, Я. Нинчак

В заметке изучаются вопросы раскраски гиперграфов. Сначала в ней показывается, что не все известные оценки для хроматических чисел графов можно перенести на гиперграфы. Затем в классе гиперграфов специального вида для реберного хроматического числа гиперграфов устанавливаются достаточно близкие друг к другу верхняя и нижняя оценки. Нижняя оценка находится легко, а верхняя оценка извлекается из получаемой нижней оценки для максимального числа шаров заданного радиуса, которые можно разместить в введенном в заметке метрическом пространстве.

1. Предметом изучения настоящей заметки являются вопросы раскраски гиперграфов. Сначала в ней показывается, что известные оценки для числа цветов, необходимых для раскраски вершин или ребер графов, не переносятся на класс гиперграфов. Затем находятся количества цветов, необходимых для раскраски ребер или вершин полного гиперграфа. После этого рассматривается задача раскраски ребер гиперграфа, в котором содержатся все ребра заданного размера и только они. Наконец, в связи с этой задачей изучается проблема разбиения множества на максимальную совокупность специальных равномощных подмножеств. Во множестве таких разбиений вводится понятие расстояния, которое затем используется для установления нижней оценки максимального числа рассматриваемых разбиений.

2. Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — некоторое множество и $\sigma(V)$ — множество всех подмножеств множества V. Далее, пусть W — произвольное семейство различных подмножеств $w \in \sigma(V)$ таких, что $|w| \geqq 2$. Пара объектов $H = (V, W)$ называется *гиперграфом с множеством вершин V и множеством ребер W*. Ребро $w \in W$ называется *инцидентным* вершине $v_j \in V$, если $v_j \in w$. Два ребра $w_1, w_2 \in W$ называются *смежными*, если $w_1 \cap w_2 \neq \emptyset$. Если для вершин v_i и v_j существует ребро $w \in W$ такое, что $v_i \in w$, $v_j \in w$, то v_i и v_j называются *смежными*. Число ребер, инцидентных вершине $v_i \in V$, называется *степенью* вершины v_i в гиперграфе H. Эту величину будем обозначать через $s_H(v_i)$.

Пусть $H = (V, W)$ – произвольный гиперграф. Отображение f множества V в множество натуральных чисел N называется (*правильной*) *вершинной раскраской* гиперграфа H, если для любого $w \in W$ найдутся хотя бы две вершины $v_i, v_j \in \in V$ такие, что $v_i \in w$ и $v_j \in w$, а $f(v_i) \neq f(v_j)$ (см. [1]). Отображение g множества W в множество N называется *слабой реберной раскраской* гиперграфа H, если для любой $v_i \in V$ найдутся хотя бы два ребра $w_1, w_2 \in W$ такие, что $\{v_i\} \subseteq w_1 \cap \cap w_2$, а $g(w_1) \neq g(w_2)$. Если отображение g обладает тем свойством, что $g(w_1) \neq \neq g(w_2)$ для любых двух смежных ребер w_1 и w_2 в H, то отображение g называется *правильной реберной раскраской*. Отображение g называется *сильной реберной раскраской* гиперграфа H, если оно обладает следующим свойством: пусть $w \in W$ – любое ребро в H и P – множество всех ребер, смежных с w; тогда $g(w_1) \neq g(w)$ для каждого $w_1 \in P$ и $g(w_1) \neq g(w_2)$ для любых ребер $w_1, w_2 \in P$ $(w_1 \neq w_2)$.

Если отображения f и g обладают тем свойством, что $f(v) \neq g(w)$ для любых $v \in V$ и $w \in W$ таких, что $v \in w$, то совокупность отображений f и g называется *слабо-тотальной*, *тотальной* или *сильно-тотальной раскраской* гиперграфа H в зависимости от того, является ли g слабой реберной раскаской, реберной раскраской или сильной реберной раскраской.

Наименьшее число цветов (то есть число различных значений функции f), необходимое для раскраски вершин, называется *вершинным хроматическим числом* гиперграфа H и обозначается через $\chi_0(H)$. Наименьшее число цветов, необходимое для слабо-реберной раскаски гиперграга H назовем *слабо-реберным хроматическим числом* и обозначим через $\chi_{1,1}(H)$. Аналогичные числа в случае реберной и сильно реберной раскрасок обозначим соответственно через $\chi_{1,2}(H)$ и $\chi_{1,3}(H)$. Таким же образом определяются *слабо-тотальное*, *тотальное и сильно-тотальное хроматические числа* гиперграфа H, которые мы обозначим через $\chi_{2,i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

3. Если H является графом степени $s(H)$, то согласно теореме В. Г. Визинга [2] справедливо неравенство

$$\chi_{1,2}(H) \leqq s(H) + 1 . \tag{1}$$

Кроме того, есть большие основания предполагать (гипотеза Бехзада-Визинга), что для тотального числа $\chi_{2,2}(H)$ графа H справедливо неравенство

$$\chi_{2,2}(H) \leqq s(H) + 2 . \tag{2}$$

Покажем, что эти оценки не распространяются на гиперграфы, и даже неверна следующая оценка

$$\chi_{1,i}(H) \leqq s(H) + k \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

где k – любое фиксированное натуральное число ($k \geqq 1$). Для этого достаточно рассмотреть гиперграф $G = (X, E)$, изображенный на рис. 1, с числом ребер

$|E| = k \geqq 5$ и числом вершин $|X| = \binom{k}{2}$. Легко видеть, что $s_G(x) = 2$ для любой вершины $x \in X$, а $\chi_{1,i}(G) = k$ $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда следует, что при $k \geqq 5$ оценки (1) и (2) для гиперграфов, вообще говоря, не справедливы.

4. Гиперграф $H = (V, W)$ называется ***полным*** n-вершинным гиперграфом (обозначение: H_n) если $|V| = n$, а $W = \sigma(V) - \{\{v_1\}, \ldots, \{v_n\}, \emptyset\}$.

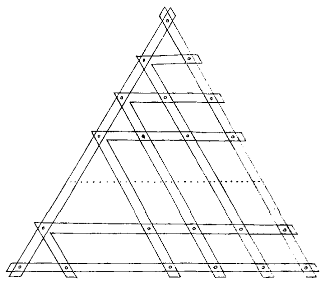

Рис. 1.

Теорема 1. Для любого полного n-вершинного гиперграфа $H_n = (V, W)$ при $n \geqq 3$ справедливы соотношения

(3) $$\chi_0(H_n) = \chi_{2,1}(H_n) = n\,,$$

(4) $$\chi_{1,1}(H_n) = 2\,,$$

(5) $$\chi_{1,2}(H_n) = \chi_{2,2}(H_n) = 2^{n-1}\,,$$

(6) $$\chi_{1,3}(H_n) = \chi_{2,3}(H_n) = 2^n - n - 1\,.$$

Доказательство. Справедливость неравенств

(7) $$\chi_{2,1}(H_n) \geqq \chi_0(H_n) \geqq n$$

очевидна. Справедливость неравенства

(8) $$\chi_{2,1}(H_n) \leqq n$$

следует из того, что все вершины в H_n можно раскрасить разными цветами, каждое ребро вида $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} - \{v_i\}$ раскрасить цветом, в который окрашена вершина v_i, а остальные ребра можно раскрасить произвольным способом. Из (7) и (8) следует (3).

Убедимся в справедливости (4). С одной стороны, очевидно, что $\chi_{1,1}(H_n) \geqq 2$. С другой стороны, раскраска в H_n будет слабо-реберной, если ребро $\{v_1, \ldots, v_n\}$ окрасить в один цвет, а остальные ребра — в другой цвет. Тем самым имеет место (4).

Докажем справедливость (5). Нетрудно убедиться в том, что максимальное число попарно пересекающихся ребер в H_n равно 2^{n-1}. Отсюда следует, что $\chi_{1,2}(H_n) \geqq 2^{n-1}$. Вместе с тем ясно, что $\chi_{2,2}(H_n) \geqq \chi_{1,2}(H_n)$. Таким образом для доказательства (5) остается показать, что

$$\chi_{2,2}(H_n) \leqq 2^{n-1} . \tag{9}$$

А это так. В самом деле, рассмотрим следующую раскаску гиперграфа H_n. Все ребра, инцидентные вершине v_1, произвольным способом красятся в попарно различные цвета $\{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$. Ребро $\{v_1, \ldots, v_n\} - \{v_1\}$ окрашивается в цвет 2^n. Если w — ребро, инцидентное вершине v_1, то, ребро $\bar{w} = \{v_1, \ldots, v_n\} - w$ окрашивается в тот же цвет, что и ребро w. Вершина v_i $(1 \leqq i \leqq n)$ окрашивается в тот цвет, в который окрашено ребро $\{v_1, \ldots, v_n\} - \{v_i\}$. Оченвидно, что предложенная раскраска является тотальной. Поэтому имеет место (9).

Наконец, убедимся в справедливости (6). Справедливость неравенства $\chi_{2,2}(H_n) \geqq \chi_{1,2}(H_n)$ очевидна. Справедливость неравенства $\chi_{1,2}(H_n) \geqq 2^n - n - 1$ следует из того, что в H_n имеется точно $2^n - n - 1$ ребер, каждое из которых пересекается с ребром $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Поэтому остается показать, что

$$\chi_{2,2}(H_n) \leqq 2^n - n - 1 .$$

А это так, ибо можно использовать следующую раскраску. Все ребра в H_n произвольным образом окрашиваются в попарно различные цвета, а вершина v_i окрашивается в тот цвет, в который окрашено ребро $\{v_1, \ldots, v_n\} - \{v_i\}$. Теорема доказана.

5. Пусть H — произвольный гиперграф. *Размером* ребра $w \in H$ назовем число вершин, инцидентных ребру w. Гиперграф $H = (V, W)$ назовем *максимальным гиперграфом с ребрами размера* r, если в H содержатся все ребра размера r и нет других ребер. Если $|V| = n$, то такой гиперграф обозначим через $H_{n,r}$.

Для максимальных гиперграфов $H_{n,r}$, как и в случае полных гиперграфов, задача об отыскании хроматических чисел приобретает специфический характер и поэтому нуждается в отдельном изучении. Мы рассмотрим одно из этих чисел — реберное хроматическое число, то есть величину $\chi_{1,2}(H_{n,r})$.

В общем случае нам неизвестно точное значение этой величины и мы ограничиваемся указанием для нее только верхней оценки. Она получается весьма просто следующим образом. Во-первых, число ребер $H_{n,r}$, которые можно окрасить в один и тот же цвет, не превосходит n/r (ведь каждому ребру инцидентно r вершин, а в один цвет могут быть окрашены только попарно несмежные ребра). Во-вторых, число ребер в $H_{n,r}$ равно $\binom{n}{r}$. Поэтому имеет место неравенство

$$\chi_{1,2}(H_{n,r}) \geqq \binom{n}{r} \Big/ \frac{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}. \tag{10}$$

При некоторых значениях n и r эта оценка достигается. Так, например, при любом четном n и $r = n/2$ справедливо равенство

$$\chi_{1,2}(H_{n,r}) = \binom{n-1}{r-1}. \tag{11}$$

Оно сдедует из (10) и того, что в этом случае ребра в $H_{n,r}$ можно окрасить следующим способом: если w_1 и w_2 — непересекающиеся ребра такие, что им принадлежат все вершины гиперграфа $H_{n,r}$, то w_1 и w_2 окрашиваются в один и тот же цвет; в противном случае w_1 и w_2 окрашиваются в разные цвета.

Далее, при $r = 2$ гиперграф $H_{n,r}$ является полным n-вершинным графом, где $n = 2k$. Известно [3], что ребра такого графа можно правильно раскрасить в $n - 1$ цвет. Поэтому справедливо равенство (11).

Некоторые исследователи предполагают, что равенство (11) имеет место и при остальных n и r таких, когда $n = kr$, а n — натуральное. Справедливость или ложность этой гипотезы пока не установлены. Эта гипотеза может быть переформулирована следующим образом.

Пусть $n = kr$, где k и r — натуральные числа. Совокупность $\mathfrak{M}$ подмножеств множества $\mathfrak{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ назовем *k-разбиением*, если $\mathfrak{M}$ состоит из k попарно непересекающихся k-элементных подмножеств. При этом два k-разбиения $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем называть *различными*, если в $\mathfrak{M}_1$ имеется, по крайней мере, одно r-элементное подмножество, которого нет в $\mathfrak{M}_2$. Различные k-разбиения $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем называть *сильно различными*, если нет r-элементного подмножества, которое входило бы и в $\mathfrak{M}_1$ и в $\mathfrak{M}_2$. Тогда гипотеза о справедливости (11), очевидно, эквивалентна следующей гипотезе.

При любых натуральных k, r и $n = kr$ максимальное число попарно сильно различных k-разбиений множества $\mathfrak{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ в точности равно $\binom{n-1}{r-1}$.

Однако мы не можем доказать или опровергнуть это утверждение. Поэтому ограничимся лишь указанием нижней оценки для этой величины. Прежде чем переходить к установлению этой оценки, на множестве всех k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ введем понятие расстояния.

6. Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — произвольные k-разбиения множества $\mathfrak{N}$. Расстоянием $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ между $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ назовем число тех r-элементных подмножеств в $\mathfrak{M}_1$, которых нет в $\mathfrak{M}_2$.

Например, пусть $\mathfrak{N} = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $r = 3$, $k = 4$.

$$\mathfrak{M}_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}\}, \text{ а}$$
$$\mathfrak{M}_2 = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 7, 9\}, \{5, 6, 8\}, \{10, 11, 12\}\}.$$

Тогда расстояние $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = 3$, поскольку число подмножеств, которые содержатся в $\mathfrak{M}_1$, но не содержатся в $\mathfrak{M}_2$, равно 3. Ими являются подмножества: $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ и $\{7, 8, 9\}$.

Нетрудно видеть, что введенное расстояние обладает следующими свойствами:

1. $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) > 0$ при любых $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$ и
   $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = 0$ при $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$;
2. для любых двух k-разбиений $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ множества $\mathfrak{N}$
   $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \varrho(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_1)$ – симметричность;
3. для любых трех k-разбиений $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ множества $\mathfrak{N}$
   $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) + \varrho(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3) \geqq \varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_3)$ – неравенство треугольника.

Свойства 1–3 являются обычными аксиомами метрического пространства. Поэтому множество всех k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ с введенным расстоянием является k-мерным метрическим пространством. Это пространство конечно и, как нетрудно убедиться, содержит $n!/(k!(r!)^k)$ „точек".

Пусть $\mathfrak{M}_1$ – произвольное k-разбиение множества $\mathfrak{N}$. Множество всех k-разбиений $\mathfrak{M}$ для $\mathfrak{N}$ таких, что $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}) = t$, назовем *сферой радиуса t с центром* в $\mathfrak{M}_1$. Множество всех k-разбиений $\mathfrak{M}$ для $\mathfrak{N}$ таких, что $\varrho(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}) \leqq t$, назовем *шаром радиуса t с центром* $\mathfrak{M}_1$.

Два шара назовем *непересекающимися*, если нет ни одного k-разбиения, принадлежащего обоим шарам одновременно. Два шара радиуса t назовем *соприкасающимися*, если все вершины, принадлежащие обоим шарам одновременно, расположены на сферах радиуса t этих шаров.

Используя неравенство треугольника, видим, что k-разбиения $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ множества $\mathfrak{N}$ являются сильно различными тогда и только тогда, когда их можно взять в качестве центров непересекающихся шаров радиуса $(k-1)/2$ при нечетном k и в качестве центров соприкасающихся шаров радиуса $k/2$ при четном k. Отсюда следует, что максимальное число попарно сильно различных k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ совпадает с максимальным числом попарно непересекающихця шаров радиуса $(k-1)/2$ при нечетном k и с максимальным числом попарно соприкасающихся шаров радиуса $k/2$ при четном k.

Таким образом сформулированная выше гипотеза эквивалентна **следующей.**

При любых натуральных k, r и $n = rk$ во множестве всех различных k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ можно разместить $\binom{n-1}{r-1}$ попарно непересекающихся шаров радиуса $(k-1)/2$, при нечетном k или $\binom{n-1}{r-1}$ попарно соприкасающихся шаров радиуса $k/2$ при четном k.

Не зная ответа на эту гипотезу, ограничимся лишь рассмотрением задачи об установлении оценок для максимального числа таких шаров, которое обозначим через $M(k, r)$. Задача определения величины $M(k, r)$ аналогична задаче нахождения максимального по мощности кода с обнаружением заданного числа ошибок – одной из основных задач теории кодирования [4]. В общей постановке последняя задача оказалась очень сложной и до сих пор не решена. Возможно, что и определение величины $M(k, r)$ является довольно сложным делом.

7. При нахождении нижней оценки для величины $M(k, r)$ нам потребуется знать количество „точек" в шаре радиуса $k-1$ взятых из рассматриваемого пространства. Эту величину обозначим через $S(k\ r)$. Справедлива следующая

Теорема 2. При любых натуральных k и r имеет место равенство

$$S(k\ r) = \sum_{v=1}^{k} (-1)^{v+1} \binom{k}{v} \frac{((k-v)\,r)!}{(k-v)!\,(r!)^{k-v}}\,.$$

Доказательство основано на использовании принципа включения и исключения (см. например [5, стр. 17–18]). Пусть $\mathfrak{M}_0 = \{m_1, \ldots, m_k\}$ – произвольное k-разбиение множества $\mathfrak{N}$. Обозначим через $S_{i_1,i_2,\ldots,i_v}(k, r)$ число тех k-разбиений множества $\mathfrak{N}$, в каждом из которых присутствуют r-элементные подмножества $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_v}$ (возможно, что некоторые из этих k-разбиений содержат и другие подмножества из $\mathfrak{M}_0$). Тогда согласно принципа включения и исключения имеем

$$S(k, r) = \sum_{v=1}^{k} (-1)^{v+1} \sum_{(i_1,\ldots,i_v)} S_{i_1,\ldots,i_v}(k, r)\,.$$

Очевидно, что

$$S_{i_1,\ldots,i_v}(k, r) = S_{j_1,\ldots,j_v}(k, r)$$

при любом v и любых допустимых наборах $(i_1, \ldots, i_v)$, $(j_1, \ldots, j_v)$. Поэтому

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_v)} S_{i_1,\ldots,i_v}(k, r) = \binom{k}{v} S_{1,2,\ldots,v}(k, r)\,.$$

В свою очередь, величина $S_{1,2,\ldots,v}(k, r)$ задает количество различных разбиений множества $\mathfrak{N} - \{\bigcup_{w=1}^{v} m_w\}$ на $k-v$ попарно непересекающихся r-элементных подмножеств. Эта величина, как известно, равна $((k-v)r)!/((k-v)!\,(r!)^{k-v})$.

Таким образом

$$(13)\qquad \sum_{(i_1,\ldots,i_v)} S_{i_1,\ldots,i_v}(k, r) = \binom{k}{v} \frac{((k-v)\,r)!}{(k-v)!\,(r!)^{k-v}}\,.$$

Подставляя (13) в (12), получаем утверждение теоремы.

8. Нетрудно видеть, что для величины $M(k, r)$ справедлива следующая оценка

$$(14)\qquad M(k, r) \leqq \binom{n-1}{r-1}.$$

В самом деле, эта величина задает максимальное количество попарно сильно различных k-разбиений множества $\mathfrak{N}$. В свою очередь, число r-элементных подмножеств в любом k-разбиении равно k, а число всех r-элементных подмножеств в $\mathfrak{N}$ равно $\binom{n}{r}$. Поэтому имеет место неравенство

$$k\,.\,M(k, r) \leqq \binom{n}{r},$$

то есть

$$M(k, r) \leqq \binom{n}{r}\Big/ k = \frac{r}{n}\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}.$$

Оказывается, что верхняя оценка для $M(k, r)$ из (14) отличается менее чем в k раз от истинного значения $M(k, r)$. Это вытекает из нижней оценки для $M(k, r)$, к установлению которой мы и переходим.

Теорема 3. При любых натуральных k и r

$$M(k, r) \geqq \frac{(kr)!}{k!(r!)^k} \Bigg/ \left(\sum_{v=1}^{k} (-1)^{v+1} \binom{k}{v} \frac{((k-v)\,r)!}{(k-v)!\,(r!)^{k-v}} \right).$$

Доказательство. Любая, а следовательно, и максимальная совокупность попарно сильно различных k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ может быть получена путем последовательного отбора k-разбиений следующим способом. В качестве первого k-разбиения берется произвольное k-разбиение. Пусть им является $\mathfrak{M}_1$. Тогда в качестве второго k-разбиения нельзя брать те k-разбиения $\mathfrak{M}$, которые принадлежат шару радиуса $k - 1$ с центром $\mathfrak{M}_1$. Число k-разбиений, принадлежащих такому шару, согласно принятому ранее обозначению равно $S(k, r)$. Пусть в качестве второго k-разбиения взято k-разбиение $\mathfrak{M}_2$. Тогда в качестве третьего k-разбиения нельзя брать те k-разбиения, которые принадлежат объединению двух шаров радиуса $k - 1$ с центрами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Этому объединению принадлежит не более $2S(k, r)$ k-разбиений. Поэтому в отбираемую последовательность попарно сильно различных k-разбиений можно наверняка включить k-разбиение $\mathfrak{M}_3$, если число всех различных k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ превосходит величину $2S(k, r)$. Вообще, пусть уже отобрано v попарно сильно различных k-разбиений $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_v$ множества $\mathfrak{N}$. Тогда в качестве $(v + 1)$-го k-разбиения $\mathfrak{M}_{v+1}$, сильно отличного от $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_v$, нельзя брать те k-разбиения которые принадлежат объединению v шаров радиуса $k - 1$ с центрами $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_v$. Так как этому объединению принадлежит не более $v \,.\, S(k, r)$ k-разбиений множества $\mathfrak{N}$, то некоторое k-разбиение наверняка может быть отобрано в качестве $\mathfrak{M}_{v+1}$, если v удовлетворяет неравенству

$$\frac{n!}{k!(v!)^k} > v \,.\, S(k, r)\,.$$

Так как описанный процесс отбора k-разбиений можно продолжать до тех пор, пока среди k-разбиений множества $\mathfrak{N}$ не останется ни одного k-разбиения, не принадлежащего объединению шаров радиуса $k - 1$ с центрами в отобранных k-разбиениях, то имеет место неравенство

$$M(k, r)\, S(k, r) \geqq \frac{n!}{k!(r!)^k}\,.$$

Следовательно,

$$M(k, r) \geqq \frac{n!}{k!(r!)^k\, S(k, r)}\,.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует справедливость доказываемой теоремы.

Убедимся теперь в том, что при любых $k \geqq 3$ и $r \geqq 3$ нижняя оценка для $M(k, r)$, доставляемая теоремой 3, не очень существенно отличается от верхней оценки из (14), поскольку имеет место следующая

Теорема 4. При любых $k \geqq 3$ и $r \geqq 3$

$$M(k, r) > \frac{1}{k}\binom{n-1}{r-1}\,.$$

Доказательство. Используя определение величины $S_{i_1,\ldots,i_v}(k, r)$ нетрудно видеть, что

$$\binom{k}{1}\frac{((k-1)\,r)!}{(k-1)!\,(r!)^{k-1}} > \sum_{v=1}^{k}(-1)^{v+1}\binom{k}{v}\frac{((k-v)\,r)!}{(k-v)!\,(r!)^{k-v}}\,. \tag{15}$$

Действительно, справедливость неравенства (15) следует из того, что выражение из левой части этого неравенства является верхней оценкой для $S(k, r)$ а правая часть в точности равна $S(k, r)$.

Таким образом, из неравенства (15) и теоремы 3 получаем

$$M(k, r) > \frac{(kr)!}{k!(r!)^k} \Big/ \binom{k}{1} \cdot \frac{((k-1)\,r)!}{(k-1)!\,(r!)^{k-1}} =$$

$$= \frac{(kr)!}{k^2 r!\,((k-1)\,r)!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k^2} = \binom{n-1}{r-1}.$$

Теорема доказана.

Сопоставляя (14) и теорему 4 видим, что нижняя и верхняя оценки для $M(k, r)$ отличаются друг от друга менее чем в k раз. Следовательно, правая часть из (14) отличается от истинного значения величины $M(k, r)$ менее чем в k раз.

Может показаться, что при замене правой части неравенства (15) на его левую часть происходит существенное огрубление. На самом же деле, при такой замене возникает ничтожная относительная погрешность. Действительно, при фиксированных k и r рассмотрим функцию

(16) $$f(v) = \binom{k}{v} \frac{((k-v)\,r)!}{(k-v)!\,(r!)^{k-v}}.$$

Покажем, что при любых $k \geqq 3$, $r \geqq 3$, $v \in [1, k-2]$ и $k + r \to \infty$ справедливо соотношение

(17) $$\frac{f(v+1)}{f(v)} = o(1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{f(v+1)}{f(v)} = \frac{r!(k-r)^2}{(v+1)\prod_{s=1}^{r}((k-v-1)\,r+s)} \leqq$$

$$\leqq \frac{r!(k-v)^2}{(v+1)\,(k-v-1)^r r^r} < \frac{r!}{(k-v-1)^{r-2}\,r^r}.$$

Далее, используя формулу Стирлинга, имеем

$$\frac{r!}{(k-v-1)^{r-2}\,r^r} < \frac{3\sqrt{r}}{e^r\,(k-v-1)^{r-2}}.$$

А так как

$$\frac{3\sqrt{r}}{e^r(k-v-1)^{r-2}} = o(1),$$

 то справедливо (17). Кроме того при $v = k - 1$ имеем

$$f(v + 1)/f(v) = \frac{1}{k}.$$

Из (17) и (18) следует, что при любых $k \geqq 3$, $r \geqq 3$ и $k + r \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{v=1}^{k} (-1)^{v+1} \binom{k}{v} \frac{((k - v)\, r)!}{(k - v)!\, (r!)^{k-v}} \sim \binom{k}{1} \frac{((k - 1)\, r)!}{(k - 1)!\, (r!)^{k-1}}.$$

(Поступило в редакцию 16 декабря 1974.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Erdös, A. Hajnal: On chromatic number of graphs and set-systems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *17* (1966), 61—99.

[2] В. Г. Визинг: Об оценке хроматического класса p-графа. В сб. Дискретный анализ, вып. 3. Новосибирск 1964, 25—30.

[3] Я. Нинчак: О хроматических числах некоторых графов. В сб. Комбинаторный анализ, вып. 3. Москва 1974, 83—89.

[4] У. Питерсон: Коды, исправляющие ошибки. Москва 1964.

[5] М. Холл: Комбинаторный анализ. Москва 1963.

Алексей Коршунов, старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук; Институт математики СО АН СССР, Новосибирск — 90, СССР.

RNDr. Ján Ninčák, CSc.; Vysoká škola technická, Elektrotechnická fakulta, Katedra matematickej informatiky (Политехнический институт, электротехнический факультет, кафедра математической информатики), Zbrojnícka 3, 040 00 Košice, ČSSR.