KYBERNETIKA — JAHRGANG *11* (1975), HEFT 2

Ein Beitrag zu der GUHA Methode in der dreiwertigen Logik

JAN RAUCH

In der vorliegenden Arbeit werden zu jedem dreiwertigen Modell (Modell mit unvollständiger Information) diejenigen binären Ergänzungen gefunden, die im Bezug auf Fischers Test am ungünstigsten sind. Das ermöglicht eine rationelle Bearbeitung dreiwertiger Modelle mittels der GUHA Methode.

I. EINLEITUNG UND FORMULIERUNG DES PROBLEMS

In [1] ist ein Prädikat „φ ist im Hinblick auf $\mathcal{M}$ relativ signifikant mehr in ψ als in $\neg\psi$" oder „$\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$" definiert.

Definition. Sei eine Nummer σ_0, $0 < \sigma_0 \leqq 1$, ein Modell $\mathcal{M}$ und Eigenschaften φ und ψ gegeben. Wir bezeichnen mit a die Frequenz von $\varphi \,\&\, \psi$ in $\mathcal{M}$ (d. h. die Anzahl

Tab. 1.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	a	b	r
$\neg\varphi$	c	d	s
	k	l	m

der Objekte aus $\mathcal{M}$, die die Formel $\varphi \,\&\, \psi$ erfüllen), mit b die Frequenz von $\varphi \,\&\, \neg\psi$, mit c die Frequenz von $\neg\varphi \,\&\, \psi$ und schliesslich mit d die Frequenz von $\neg\varphi \,\&\, \neg\psi$. Weiter bezeichnen wir $r = a + b$, $s = c + d$, $k = a + c$, $l = b + d$, d. h. $a + b + c + d = r + s = k + l = m$, siehe die Tabelle 1.

Wir definieren: φ ist im Hinblick auf $\mathcal{M}$ relativ mehr in ψ als in $\neg\psi$, falls $a/m > > (k/m)(r/m)$ d. h. falls $a/r > k/m$ erfüllt ist. (d. h. wenn die Frequenz von $\varphi \,\&\, \psi$ höher ist als die auf Grund der Frequenzen von φ und von ψ unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit erwartete Frequenz).

Sei $\sigma(a, r, k, m)$ die Wahrscheinlichkeit der auf der Tabelle 1 beschriebenen Verteilung bei bekannten r, k, m unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit von φ und ψ. (Die Zahlen a, r, k, m bestimmen die ganze Tabelle.) Aus einer einfachen Berechnung ergibt sich, dass

$$\sigma(a, r, k, m) = \frac{\binom{k}{a} \cdot \binom{l}{b}}{\binom{m}{r}} = \frac{r!\, s!\, k!\, l!}{m!\, a!\, b!\, c!\, d!}\,.$$

Wir setzen:

$$\Delta(a, r, k, m) = \sum_{i=a}^{\min(k,r)} \sigma(i, r, k, m)\,.$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Frequenz der Eigenschaft $\varphi \,\&\, \psi$ mindestens a sein wird; höchstens kann sie min (k, r) sein. Dann sagen wir: φ ist im Hinblick auf $\mathcal{M}$ relativ signifikant mehr in ψ als in $\neg\psi$, wenn $a/r > k/m$ und dabei $\Delta(a, r, k, m) \leqq \sigma_0$ (das Risiko ist kleiner als σ_0).

Diese Definition gilt aber nur für zweiwertige Modelle d. h. solche Modelle, die nur solche Objekte erhalten, von welchen wir wissen, ob sie betrachteten Eigenschaften haben oder nicht. (Die Definition ist von dem sogenannten Fischers Test entnommen.) Es kann vorkommen, dass wir von manchen Objekten nicht wissen, ob sie die gegebene Eigenschaft erfüllen oder nicht erfüllen (z. B. das Objekt – der Pazient zu der Untersuchung nich eingetroffen ist), dann sagen wir, dass das entsprechende Objekt die gegebene Eigenschaft nicht entscheidet. Modelle, deren Objekte die gegebenen Eigenschaften entweder erfüllen, oder nicht entscheiden, oder nich erfüllen, sollen dreiwertige Modelle heissen.

Dreiwertige Modelle spielen eine wichtige Rolle in verschiedenen Versionen der *Methode GUHA der automatischen Erforschung von wichtigen observationellen Aussagen.* Die Theorie dieser Methode ist in den Arbeiten [1; 2; 3; 4; 5] entwickelt, wo der Leser auch die intuitive Motivation des hier studierten Problems finden kann (siehe insbesondere [2])*. Bemerken wir aber, dass die Kenntnis von [1; 2; 3; 4; 5] in der vorliegenden Arbeit nicht vorausgesetzt wird.

Die genaue Definition lautet (siehe [2]): Das *dreiwertige Modell vom Typ n*

$$\mathcal{M} = \langle M, P_1, \ldots, P_n \rangle$$

* Dr. K. Bendová und Dr. P. Hájek bin ich für ihre Hilfe bei der Zusammenstellung dieses Beitrages sehr dankbar.

ist eine nichtleere endliche Menge, auf der n Funktionen P_i $(i = 1, \ldots, n)$ gegeben sind, welche die Menge M in die Menge $\{0, 1, \times\}$ abbilden. Die Elemente der Menge M nennen wir *Objekte*, die Funktionen P_i $(i = 1, \ldots, n)$ heissen *Eigenschaften* (elementare). Falls $a \in M$ $P_i(a) = 1$ $(P_i(a) = \times,\ P_i(a) = 0)$ dann sagen wir, dass a die Eigenschaft P_i *erfüllt* (*nicht entscheidet, nicht erfüllt*). Auf gleicher Weise, wie bei zweiwertigen Modellen, können wir auch für dreiwertige Modelle *abgeleitete Eigenschaften* definieren (siehe [1]).

Es sei jetzt ein dreiwertiges Modell $\mathscr{M}$ und die Eigenschaften φ und ψ gegeben. Wir bezeichnen mit $\{1, 1\}$ die Menge der Elemente, welche φ & ψ erfüllen, die Anzahl ihrer Elemente bezeichnen wir mit a; $\{1, \times\}$ bedeutet die Menge der Elemente, welche φ erfüllen und ψ nicht entscheiden, die Anzahl ihrer Elemente heisst o, usw.; siehe die Tabellen 2a und 2b.

Tab. 2a.

	ψ	$\psi_\times$	$\neg\psi$	
φ	a	o	b	r
$\varphi_\times$	i	n	j	t
$\neg\varphi$	c	p	d	s
	k	q	l	m

Tab. 2b.

	ψ	$\psi_\times$	$\neg\psi$
φ	$\{1, 1\}$	$\{1, \times\}$	$\{1, 0\}$
$\varphi_\times$	$\{\times, 1\}$	$\{\times, \times\}$	$\{\times, 0\}$
$\neg\varphi$	$\{0, 1\}$	$\{0, \times\}$	$\{0, 0\}$

Weiter setzen wir

$$r = a + o + b\,,\quad t = i + n + j\,,\quad s = c + p + d\,,\quad k = a + i + c\,,$$

$$q = o + n + p\,,\quad l = b + j + d\,,$$

$$m = r + t + s = k + q + l = a + o + b + i + n + j + c + p + d$$

siehe die Tabelle 2a.

Wir haben also das dreiwertige Modell $\mathscr{M}$, mit den Eigenschaften φ und ψ, die entsprechenden Frequenzen sind durch die Tabelle 2a gegeben. Aus diesem dreiwertigen Modell können wir durch Ergänzung der Informationen über alle Objekte, welche die Eigenschaft φ oder ψ nicht entscheiden, $2^{o+i+j+p+2n}$ verschiedene zweiwertige Modelle gewinnen. Es wird uns interessieren, *welche Bedingungen erfüllt werden müssen, damit in allen diesen Modellen* (in allen binären Ergänzungen – kurz b. E.) $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ *erfüllt wäre.* Falls es uns gelingen würde, unter allen b. E. des Modells $\mathscr{M}$ ein zweiwertiges Modell $\mathscr{M}_D$ zu finden, für das aus $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ in $\mathscr{M}_D$ $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ in allen b. E. des Modells $\mathscr{M}$ folgt, wäre unsere Aufgabe gelöst.

Wir wollen also so eine Ergänzung der Informationen finden, welche für das Prädikat $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ am wenigsten günstig ist.

Wir können uns vorstellen, dass die Ergänzung der Informationen über alle Objekte, die irgendeine der Eigenschaften φ oder ψ nicht entscheiden, bedeutet eigentlich die Zugabe aller Objekte aus den Mengen $\{1, \times\}$, $\{0, \times\}$, $\{\times, 1\}$, $\{\times, 0\}$, $\{\times, \times\}$ in irgendeine der Mengen $\{1, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 0\}$. Dabei dürfen wir die Objekte aus der Menge $\{1, \times\}$ nur in die Menge $\{1, 1\}$ oder $\{1, 0\}$, die Objekte aus der Menge $\{0, \times\}$ nur in die Menge $\{0, 1\}$ oder $\{0, 0\}$, die Objekte aus der Menge $\{\times, 1\}$ nur in die Menge $\{1, 1\}$ oder $\{0, 1\}$, die Objekte aus der Menge $\{\times, 0\}$ nur in die Menge $\{1, 0\}$ oder $\{0, 0\}$ und die Objekte aus der Menge $\{\times, \times\}$ in eine beliebige von den Mengen $\{1, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 0\}$ zugeben, siehe die Tabelle 3.

Tab. 3.

	ψ	$\psi_\times$	$\neg\psi$
φ	$\{1, 1\}$	$\{1, \times\}$	$\{1, 0\}$
$\varphi_\times$	$\{\times, 1\}$	$\{\times, \times\}$	$\{\times, 0\}$
$\neg\varphi$	$\{0, 1\}$	$\{0, \times\}$	$\{0, 0\}$

Tab. 4.

	ψ	$\psi_\times$	$\neg\psi$
φ	$\{1, 1\}$	$\{1, \times\}$	$\{1, 0\}$
$\varphi_\times$	$\{\times, 1\}$	$\{\times, \times\}$	$\{\times, 0\}$
$\neg\varphi$	$\{0, 1\}$	$\{0, \times\}$	$\{0, 0\}$

Der Satz 1 beweist, dass von allen möglichen Ergänzungen diejenigen am wenigsten günstig sind, bei denen wir die Objekte aus den Mengen $\{1, \times\}$, $\{0, \times\}$, $\{\times, 0\}$, $\{\times, 1\}$ und $\{\times, \times\}$ nur in die Mengen $\{1, 0\}$ oder $\{0, 1\}$ zugeben. Siehe die Tabelle 4.

Satz 1. Es sei ein dreiwertige Modell $\mathscr{M}$ und Eigenschaften φ und ψ gegeben; die entsprechenden Frequenzen sollen durch die Tabelle 2a gegeben werden. Dann $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ in jeder b. E. des Modells $\mathscr{M}$ dann und nur dann, wenn für jede Zahlen v_1, v_2 solche, dass $v_1 \geqq 0$, $v_2 \geqq 0$ und $v_1 + v_2 = n$, folgendes gilt.

$$\frac{a}{r + j + v_1} > \frac{k + p + v_2}{m}, \tag{1}$$

$$\Delta(a, r + j + v_1, k + q + v_2, m) \leqq \sigma_0 . \tag{2}$$

Lemma 1.

a) $$\frac{a}{r + 1} > \frac{k}{m} \Rightarrow \Delta(a, r, k, m) < \Delta(a, r + 1, k, m),$$

b) $$\frac{a}{r} > \frac{k}{m} \Rightarrow \Delta(a, r, k, m) > \Delta(a + 1, r + 1, k, m),$$

c) $$\frac{a}{r} > \frac{k}{m} \Rightarrow \Delta(a, r, k, m) > \Delta(a + 1, r, k + 1, m),$$

d) $$\frac{a}{r} > \frac{k + 1}{m} \Rightarrow \Delta(a, r, k, m) < \Delta(a, r, k + 1, m).$$

Beweis. a) und b) ist in [1] bewiesen, der Beweis von c) und d) ist analog.

Beweis des Satzes. 1) Wenn $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ in jeder b. E. des Modells $\mathcal{M}$, dann $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ auch in solcher b. E., in welcher die entsprechenden Frequenzen durch die Tabelle 5 gegeben sind. Es muss also (1) und (2) gelten.

Tab. 5.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	a	$b + j + o + n_1$	$r + j + n_1$
$\neg\varphi$	$c + i + p + n_2$	d	$s + i + n_2$
	$k + p + n_2$	$l + o + n_1$	m

2) Es sei eine beliebige b. E. de Modells $\mathcal{M}$ gegeben, mögen die entsprechenden Frequenzen durch die Tabelle 6 gegeben sein, wo die Zahlen i_q, j_q, o_q, p_q $(q = 1, 2)$ und n_1, n_2, n_3, n_4 nicht negativ sind und dabei gilt:

$$i_1 + i_2 = i, \quad j_1 + j_2 = j, \quad o_1 + o_2 = o,$$

$$p_1 + p_2 = p \quad \text{und} \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n.$$

Tab. 6.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	$a + i_1 + o_1 + n_1$	$b + o_2 + j_1 + n_2$	$r + i_1 + j_1 + n_1 + n_2$
$\neg\varphi$	$c + i_2 + p_1 + n_3$	$d + p_2 + j_2 + n_4$	$s + i_2 + j_2 + n_3 + n_4$
	$k + o_1 + p_1 + n_1 + n_3$	$l + o_2 + p_2 + n_2 + n_4$	m

Wir sollen beweisen, dass

(3) $$\frac{a + i_1 + o_1 + n_1}{r + i_1 + j_1 + n_1 + n_2} > \frac{k + o_1 + p_1 + n_1 + n_3}{m}$$

 laut der Voraussetzung (1) gilt folgendes:

$$\frac{a}{r + j + n_2 + n_4} > \frac{k + p + n_1 + n_3}{m},$$

$$\frac{a}{r + j + n_2} > \frac{k + p_1 + n_1 + n_3}{m},$$

$$\frac{a + o_1}{r + j_1 + n_2} > \frac{k + p_1 + o_1 + n_1 + n_3}{m},$$

$$\frac{a + i_1 + o_1 + n_1}{r + i_1 + j_1 + n_1 + n_2} > \frac{k + p_1 + o_1 + n_1 + n_3}{m}.$$

Dadurch ist (3) bewiesen.

Weiter sollen wir beweisen, dass

$$\Delta(a + i_1 + o_1 + n_1,\ r + i_1 + j_1 + n_1 + n_2,$$
$$k + o_1 + p_1 + n_1 + n_3, m) \leqq \sigma_0 .$$

Laut Lemma 1 und der schon bewiesenen Beziehung (3) gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
&\Delta(a + i_1 + o_1 + n_1,\ r + i_1 + j_1 + n_1 + n_2,\ k + o_1 + p_1 + n_1 + n_3, m) \leqq \\
&\leqq \Delta(a + o_1, r + j_1 + n_1 + n_2,\ k + o_1 + p_1 + n_3, m) \leqq \\
&\leqq \Delta(a, r + j_1 + n_1 + n_2,\ k + p_1 + n_3, m) \leqq \\
&\leqq \Delta(a, r + j + n_1 + n_2,\ k + p_1 + n_3 + n_4, m) \leqq \\
&\leqq \Delta(a, r + j + n_1 + n_2,\ k + p + n_3 + n_4, m) .
\end{aligned}$$

Weil $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$, gilt laut der Voraussetzung (2) auch

$$\Delta(a + i_1 + o_1 + n_1,\ r + i_1 + j_1 + n_1 + n_2,\ k + o_1 + p_1 + n_1 + n_3, m) \leqq \sigma_0 .$$

Dadurch ist der Satz bewiesen.

III. DIE UNGÜNSTIGSTE ERGÄNZUNG

Der soeben bewiesene Satz ermöglicht, *sich beim Suchen der am mindesten günstigen b. E. des gegebenen dreiwertigen Modells $\mathscr{M}$ nur auf das zu beschränken, wie die Objekte aus der Menge $\{\times, \times\}$ in die Mengen $\{1, 0\}$ und $\{0, 1\}$ zu verteilen.* Wir können uns also nur auf den Fall, wo die entsprechenden Frequenzen durch die Tabelle 7 gegeben sind, beschränken. Falls wir die Objekte aus der Menge $\{\times, \times\}$

nur in die Mengen $\{1, 0\}$ und $\{0, 1\}$ verteilen, dann werden die Frequenzen in den entsprechenden b. E. die Werte laut der Tabelle 8 haben wo

$$n_1 \geqq 0\,, \quad n_2 \geqq 0\,, \quad n_1 + n_2 = n\,.$$

Tab. 7.

	ψ	$\psi_\times$	$\neg\psi$	
φ	a	0	b	r
$\varphi_\times$	0	n	0	n
$\neg\varphi$	c	0	d	s
	k	n	l	m

Tab. 8.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	a	$b + n_1$	$r + n_1$
$\neg\varphi$	$c + n_2$	d	$s + n_2$
	$k + n_2$	$l + n_1$	m

Wir setzen

$$r + n_1 = r'\,,$$
$$k + n_2 = k'\,;$$

dabei gilt

$$r' + k' = r + k + n = S\,,$$

wo S eine Konstante ist, welche durch die Frequenzen r, k, n in dem ursprünglichen Modell gegeben ist.

Damit φ im Bezug auf die b. E. des Modells $\mathcal{M}$ relativ mehr in ψ als in $\neg\psi$ wäre, muss folgendes gelten:

$$a/r' > k'/m$$

d. h.

$$a\,.\,m > r'\,.\,k'\,.$$

Der ungünstigste Fall für „relativ mehr in" ist also der Fall, dass $r'\,.\,k'$ am grössten ist.

Wir sollen also das Produkt zweier Zahlen r', k' von konstanten Summe $r' + k' = S$ maximalisieren. Wir können $r' = k' + p$ schreiben; dann gilt

$$k' = (S - p)/2\,,$$
$$r' = (S + p)/2$$

und also

$$r'\,.\,k' = (S + p)/2\,.\,(S - p)/2 = (S^2 - p^2)/4\,.$$

Das Produkt $r'\,.\,k'$ wird also am grössten sein, wenn $|p|$ am kleinsten sein wird.

Es sind folgende Fälle möglich:

(1) $$r - k \geqq n\,.$$

Dann setzen wir $r' = r$, $k' = k + n$, d. h.

$$n_1 = 0\,,\quad n_2 = n\,.$$

(2) $$0 \leqq |r - k| < n\,.$$

Dann setzen wir $r' = [(r + k + n + 1)/2]$, $k' = r + k + n - r'$ d. h.

$$n_1 = [(-r + k + n + 1)/2]\,,\quad n_2 = n - n_1$$

(3) $$r - k \leqq n\,.$$

Dann setzen wir $r' = r + n$, $k' = k$ d. h.

$$n_1 = n\,,\quad n_2 = 0\,.$$

Um alle drei Fälle zusammenzufassen, können wir schreiben

(4) $$n_1 = \max\,(0, \min\,([(-r + k + n + 1)/2], n))\,,$$

(5) $$n_2 = n - n_1\,.$$

So erhalten wir für alle möglichen Fälle immer solche r', k', für die $|r' - k'|$ am kleinsten ist und die Bedingungen

$$n_1 \geqq 0\,,\quad n_2 \geqq 0\,,\quad n_1 + n_2 = n$$

eingehalten bleiben. Für diese r', k' wird das Produkt $r' \,.\, k'$ am grössten sein.

Wird also φ relativ mehr in ψ als in $\neg\psi$ im Hinblick zu der b. E. mit den Frequenzen laut Tabelle 8, wo n_1 und n_2 mit den Beziehungen (4) und (5) gegeben sind, so wird φ relativ mehr in ψ als in $\neg\psi$ im Bezug auf jede b. E. des Modells $\mathscr{M}$ mit den Frequenzen laut Tabelle 8, wo n_1 beliebig ist und $0 \leqq n_1 \leqq n$ und $n_2 = n - n_1$ gilt. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 2. Es sei ein dreiwertiges Modell $\mathscr{M}$ mit den Frequenzen laut der Tabelle 7 gegeben. Dann φ ist relativ mehr in ψ als in $\neg\psi$ im Bezug auf jede b. E. des Modells $\mathscr{M}$, welche wir durch eine Verteilung von n Objekten aus der Menge $\{\times, \times\}$ in die Mengen $\{1, 0\}$ und $\{1, 0\}$ erhalten dann und nur dann, wenn

$$\frac{a}{r + n_1} > \frac{k + n_2}{m}$$

wo

$$n_1 = \max\,(0, \min\,([(-r + k + n + 1)/2$$

und

$$n_2 = n - n_1 .$$

Es genügt also unter den b. E., die im Satz 2 betrachtet wurden, solche b. E. zu finden, für welche $\Delta(a, r', k', m)$ am grössten ist. Wird nämlich für diese b. E. $\Delta(a, r', k', m) \leqq \sigma_0$ gelten, wird dies offenbar für alle b. E. gelten.

Wie wir zeigen werden, handelt es sich um b. E., für welche $r' . k'$ am grössten, also $|r' - k'|$ am kleinsten ist.

Wir nehmen zuerst in Betracht, dass

$$\Delta(a, r', k', m) = \Delta(a, k', r', m)$$

gilt. Wir können uns also auf den Fall beschränken, wo $r' \geqq k'$ man kann also schreiben $r' = k' + q$, wo $q \geqq 0$. Wir setzen $n' = r' - r$ dann $q = r - n - k + 2n'$. Also n' wächst dann und nur dann, wenn $r' - k' = q$ wächst. Wenn es uns gelingen wird zu beweisen, dass die Funktion

$$F(n') = \Delta(a, r', r' - q, m)$$

(wo $q = r - n - k + 2n'$) für $0 \leqq n' \leqq n$ nicht wachsend ist, werden wir eigentlich beweisen, dass $\Delta(a, r', k', m)$ am grössten ist, wenn $r' - k'$ am kleinsten ist, falls also

$$r' - r = n_1 = \max(0, \min([(-r + k + n + 1)/2], n))$$

ist. $F(n')$ ist nur für natürliche Zahlen definiert. Um zu beweisen, dass $F(n')$ nicht wachsend ist, genügt also $F(n') \geqq F(n' + 1)$ zu beweisen.

Für n' sind die entsprechenden Frequenzen in der Tabelle 9, für $n' + 1$ in der Tabelle 10 angegeben. Es gilt folgendes

$$F(n') = \Delta(a, r', r' - q, m) = \sum_{i=a}^{r'-q} \sigma(i, r', r' - q, m),$$

$$F(n' + 1) = \Delta(a, r' + 1, r' - q - 1, m) = \sum_{i=a}^{r'-q-1} \sigma(i, r' + 1, r' - q - 1, m)$$

wo

$$\sigma_i = \sigma(i, r', r' - q, m) = \frac{r'!\,(m - r')!\,(r' - q)!\,(m - r' + q)!}{i!\,(r' - i)!\,(r' - q - i)!\,(m - 2r' + q + i)!\,m!},$$

$$\sigma'_i = \sigma(i, r' + 1, r' - q - 1, m) =$$
$$= \frac{(r' + 1)!\,(m - r' - 1)!\,(r' - q - 1)!\,(m - r' + q + 1)!}{i!\,(r' - i + 1)!\,(r' - q - i - 1)!\,(m - 2r' + q + i)!\,m!}.$$

Tab. 9.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	a	$r' - a$	r'
$\neg\varphi$	$r' - q - a$	$m - 2r' + q + a$	$m - r'$
	$r' - q$	$m - r' + q$	m

Tab. 10.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	a	$r' - a + 1$	$r' + 1$
$\neg\varphi$	$r' - q - a - 1$	$m - 2r' + q + a$	$m - r' + 1$
	$r' - q - 1$	$m - r' + q + 1$	m

Es seien beliebige Zahlen r, m, n' gegeben. Wir beweisen, dass

$$F(n') \geqq F(n' + 1)$$

für alle in Betracht kommenden Werte von a.

Wir haben

$$0 \leqq a \leqq r' - q - 1\,,$$

dazu

$$m - 2r' + q + a \geqq 0\,,$$

d. h.

$$a \geqq 2r' - m - q\,,$$

also zusammen haben wir

$$\max(0, 2r' - m - q) \leqq a \leqq r' - q - 1\,.$$

Falls $a = a_0 = \max(0, 2r' - m - q)$, dann ist sowohl $\Delta(a_0, r', r' - q, m)$ als auch $\Delta(a_0, r' + 1, r' - q - 1, m)$ eigentlich die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Frequenzen der Eigenschaft $\varphi \,\&\, \psi$, also die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses, also für $a = a_0$ gilt $F(n) \geqq F(n' + 1)$, d. h.

$$\sum_{i=a_0}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_i) + \sigma_{r'-q} \geqq 0\,.$$

Weiter gilt

$$\frac{\sigma_i}{\sigma'_i} = \frac{r'!\,(m-r')!\,(m-r'+q)!\,(r'-q)!\,m!}{(r'+1)!\,(m-r'-1)!\,(r'-q-1)!\,(m-r'+q+1)!\,m!} \cdot$$

$$\cdot \frac{i!\,(r'+1-i)!\,(r'-q-1-i)!\,(m-2r'+q+i)!}{i!\,(r'-i)!\,(r'-q-i)!\,(m-2r'+q+i)!} =$$

$$= \frac{(m-r')(r'-q)}{(r'+1)(m-r'+q+1)} \cdot \frac{r'+1-i}{r'-q-i} = C \cdot \frac{r'+1-i}{r'-q-i}.$$

Wir setzen

$$f(i) = C \cdot \frac{r'+1-i}{r'-q-i}.$$

Es gilt

$$f(i+1) - f(i) = C \cdot \frac{r'-i}{r'-q-i-1} - C \cdot \frac{r'+1-i}{r'-q-i} =$$

$$= C \cdot \frac{(r'-i)(r'-q-i) - (r'+1-i)(r'-q-i-1)}{(r'-q-i-1)(r'-q-i)} =$$

$$= C \cdot \frac{q+1}{(r'-q-i-1)(r'-q-i)}$$

also $f(i)$ ist eine wachsende Funktion, also ist σ_i/σ'_i auch wachsend. Das bedeutet, dass nur die folgenden zwei Fälle vorkommen können:

a) Für alles i ist $\sigma_i/\sigma'_i < 1$, also auch $\sigma_i < \sigma'_i$.

b) Es existiert ein i_0 so, dass für $i \leqq i_0$ $\sigma_i/\sigma'_i \leqq 1$ ist. Es folgt $\sigma_i \leqq \sigma'_i$ und für $i > i_0$ ist $\sigma_i > \sigma'_i$.

Es sei $a_0 < a \leqq r' - q - 1$. Wenn $a > i_0$ haben wir

$$F(n') - F(n'+1) = \sum_{i=a}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_i) + \sigma_{r'-q}$$

aber weil $a > i_0$, ist $\sigma_i - \sigma'_i > 0$ für jede $i = a, \ldots, r' - q - 1$; weil auch $\sigma_{r'-q} > 0$, ist

$$\sum_{i=a}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_i) + \sigma_{r'-q} > 0.$$

Wenn $a \leqq i_0$ oder Fall a) antritt, ist

$$F(n') - F(n'+1) = \sum_{i=a}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_i) + \sigma_{r'-q} =$$

$$= \sum_{i=a_0}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_r) + \sigma_{r'-q} - \sum_{i=a_0}^{a-1} (\sigma_i - \sigma'_i)$$

falls $a \leqq i_0$, oder falls der Fall a) antritt, ist für jede $i = a_0, \ldots, a - 1$ $\sigma_i - \sigma'_i \leqq 0$, also auch

$$\sum_{i=a_0}^{a-1} (\sigma_i - \sigma'_i) \leqq 0$$

und weil

$$F(n') - F(n' + 1) = \sum_{i=a_0}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_i) + \sigma_{r'-q} - \sum_{i=a_0}^{a-1} (\sigma_i - \sigma'_i) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=a_0}^{r'-q-1} (\sigma_i - \sigma'_i) + \sigma_{r'-q} \geqq 0$$

damit haben wir bewiesen, dass $F(n')$ eine nicht wachsende Funktion n' ist.

Weil der Satz 2 gilt, haben wir eigentlich auch den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3. Es sei ein dreiwertige Modell $\mathcal{M}$ und Eigenschaften φ und ψ gegeben, mit den entsprechenden Frequenzen laut der Tabelle 7. Dann $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ in jeder solchen b. E. des Modells $\mathcal{M}$, welche wir durch Verteilung der n Objekte der Menge $\{\times, \times\}$ in die Mengen $\{0, 1\}$ und $\{1, 0\}$ erhalten, dann und nur dann, wenn

$$\frac{a}{r + n_1} > \frac{k + n_2}{m}$$

und

$$\Delta(a, r + n_1, k + n_2, m) \leqq \sigma_0$$

wo

$$n_1 = \max(0, \min([(-r + k + n + 1)/2], n))$$

und

$$n_2 = n - n_1 .$$

Jetzt können wir auch den Satz formulieren, welcher die Frage beantwortet, die wir uns am Anfang gestellt haben.

Satz 4. Es sei ein dreiwertiges Modell $\mathcal{M}$ und Eigenschaften φ und ψ gegeben, mit den Frequenzen laut der Tabelle 1. Dann $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$ in jeder b. E. des Modells $\mathcal{M}$ dann und nur dann wenn

$$\frac{a}{r + j + n_1} > \frac{k + p + n_2}{m}$$

und

$$\Delta(a, r + j + n_1, k + p + n_2, m) \leqq \sigma_0$$

wo

$$n_1 = \max(0, \min([(-(r + j) + k + p + n + 1)/2], n)),$$

$$n_2 = n - n_1 .$$

Der Beweis ergibt sich aus den Sätzen 2 und 3.

Folgerung. Es sei ein dreiwertiges Modell $\mathcal{M}$ und die Eigenschaften φ und ψ gegeben, wobei die entsprechenden Frequenzen durch die Tabelle 1 gegeben sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_D$ eine beliebige b. E. des Modells $\mathcal{M}$, in der die Frequenzen durch die Tabelle 5 gegeben sind und für n_1 und n_2 (4) und (5) gilt. Dann $\varphi \sim_{\sigma 0} \psi$ in jeder b. E. des Modells $\mathcal{M}$ dann und nur dann, wenn $\varphi \sim_{\sigma 0} \psi$ in $\mathcal{M}_D$.

Bemerkung. Das Modell $\mathcal{M}_D$ ist eigentlich die gesuchte b. E., welche für $\varphi \sim_{\sigma 0} \psi$ am wenigsten günstig ist. $\mathcal{M}_D$ ist zwar nicht eindeutig bestimmt, aber die entsprechenden Frequenzen sind eindeutig bestimmt.

(Eingegangen am 14. Dezember 1973.)

LITERATUR

[1] P. Hájek: Problém obecného pojetí metody GUHA. Kybernetika *4* (1968), 6, 505–515.

[2] P. Hájek, K. Bendová, Z. Renc: The GUHA method an the three valued logic. Kybernetika *7* (1971), 6, 421–435.

[3] P. Hájek: Automatic listing of important abservational statements I. Kybernetika *9* (1973), 3, 187–205.

[4] P. Hájek:Automatic listing of important observational statements II. Kybernetika *9* (1973), 4, 251–271.

[5] P. Hájek: Automatic listing of important observational statements III. Kybernetika *10* (1974), 2, 95–124.

Jan Rauch, prom. mat., Stavební ústav ČVUT (Bauforschunganstalt der Technischen Hochschule Prag), Šolínova 7, 166 08 Praha 6. Tschechoslowakai.