KYBERNETIKA — ТОМ 8 (1972), ВЫПУСК 1

Нахождение начальных значений вспомагательной системы, при задаче об оптимальном по быстродействию управлении линейными объектами

Илия П. Цветанов

В работе дается точное решение одной из основных проблем теории оптимального управления — нахождение начального вектора $\psi(0)$ вспомагательной системы. который при помощи принципа максимума определяет оптимальное по быстродействию управление линейными объектами.

Решение дано по этапам:

I. Дан вывод параметрических уравнений экстремальных траекторий,

II. Рассматривается множество трансцендентных векторных уравнений, реальное, неотрицательное решение которых однозначно задает моменты переключение оптимального управления.

III. Выводится система линейных равенств и неравенств, решением которой является множество начальных векторов $\psi(0)$ вспомагательной системы, определяющих оптимальное по быстродействию управление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для линейных систем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1.1}$$

согласно принципу максимума формулируется следующие условие экстремального по быстродействию управления:

$$\psi(t)\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) = \max_{\mathbf{u}(t)\in \mathbf{U}} [\psi(t)\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)]\,. \tag{1.2}$$

В (1.1) $\mathbf{x}$ — n-мерной вектор фазового пространства системы X_m, $\mathbf{u}$ — r-мерной вектор управления, принадлежащий сбласти $\mathbf{U} = \{\mathbf{u} : |u_i(t)| \leqq 1, i = 1, 2, \ldots, r\}$, $\mathbf{A}$ — матрица порядка $n \times n$, и $\mathbf{B}$ — матрица порядка $n \times r$. Вектор $\psi(t)$ определяется сопраженной с (1.1) системой

$$\dot{\psi} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\psi\,. \tag{1.3}$$

Экстремальное условие (1.2) определяет вектор $\boldsymbol{u}(t)$ с точностью до n постоянных $\psi_1^0, \psi_2^0, \ldots, \psi_n^0$ – координат начального состояния системы (1.3). Бесконечное множество, образуемое этими векторами, обозначим U_{ext}, а его элементы $\boldsymbol{u}_{\text{ext}}(t)$.

Для всякого начального $\mathbf{x}^0$, принадлежащего области управляемости $\Omega \subseteq X_n$ и для всякого $\boldsymbol{u}_{\text{ext}}(t) \in U_{\text{ext}}$ однозначно определяется по формуле (1.1) соответствующая траектория. Таким образом, множеству U_{ext} по формуле (1.1) однозначно сопоставляется бесконечное множество траекторий $T_{\text{ext}}(\mathbf{x}^0)$. Уместно эти траектории назвать экстремальными. Теоремы о существовании и единственности оптимальных по быстродействию управления линейных систем [1], [2] показывают, что существует одна единственная траектория из $T_{\text{ext}}(\mathbf{x}^0)$, которая проходит через начало координат. Определяющее ее управление называется оптимальным и обозначается $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$.

Задача нахождения $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$ формулируется следующим образом:

Задача. Найти начальные векторы $\psi(0)$, определяющие $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$ через условие экстремальности (1.2).

Оказывается, что эта задача решается довольно-таки сложно. В сущности, это одна из основных проблем приложения принципа максимума [1]. Приближенно эта задача решается с помощью численного итеративного метода [3], [4].

Полное и точное решение частного случая линейной системы дано в [5]. В этом случае система (1.1) эквивалентна линейному дифференциальному уравнению n-ой степени

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = b\, u(t)\,.$$

В данной работе доразвит метод построения полного решения задачи для произвольной линейной системы с постоянными коэффициентами и действительными собственными значениями матрицы $\boldsymbol{A}$.

Оказалось, что общий случай можно свести к задаче близкой по форме к случаю, решенному в [5]. Задача усложняется нали чиембольше одного управляемого параметра.

В [5] рассмотрен случай, когда в (1.1) матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Оказывается, при подходящем подборе базисных векторов в X_n линейныя система (1.1) разлагается на однотипные независимые друг от друга подсистемы. В них соответствующие $\boldsymbol{A}$ матрицы имеют вид (2.1), а $\boldsymbol{B}$ соответствуют матрицы произвольного вида и порядка.

Транспонированная матрице $\boldsymbol{A}$ матрица $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ однозначно определяет линейной оператор $\mathscr{A}(\,)$ в X_n. Пространство X_n разлагается [6] на инвариантные по отношению к $\mathscr{A}(\,)$ подпространства $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(q)}$ с минимальными полиномами

$$\boldsymbol{P}_j(\lambda) = \lambda^{\nu_j} + \alpha_{\nu_j-1}^{(j)}\lambda^{\nu_j-1} + \dots + \alpha_1^{(j)}\lambda + \alpha_0^{(j)}\,,$$
$$j = 1, 2, \dots, q\,.$$

Если обозначим $\mathbf{e}_j$ векторы, порождающие подпространства $X_n^{(j)}$, то по отношению к базису

$$\mathbf{e}_1, \mathscr{A}(\mathbf{e}_1), \dots, \mathscr{A}^{\nu_1-1}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2, \mathscr{A}(\mathbf{e}_2), \dots, \mathscr{A}^{\nu_2-1}(\mathbf{e}_2), \dots$$
$$\dots, \mathbf{e}_q, \mathscr{A}(\mathbf{e}_q), \dots, \mathscr{A}^{\nu_q-1}(\mathbf{e}_q) \tag{2.2}$$

линейный оператор $\mathscr{A}(\,)$ представится в виде квазидиагональной матрицы

$$\boldsymbol{L}_I = \{\boldsymbol{L}^{(1)}, \boldsymbol{L}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{L}^{(q)}\}\,,$$

где

$$\boldsymbol{L}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0^{(j)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1^{(j)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_2^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{\nu_j-2}^{(j)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{\nu_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ и $\boldsymbol{L}_I$ подобны и тогда существует неособенная матрица $\boldsymbol{T}^{\mathsf{T}}$, для которой

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{T}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{L}_I(\boldsymbol{T}^{\mathsf{T}})^{-1}\,.$$

С введением базиса (2.2) в X_n порождается линейное преобразование координат $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, переводящее линейную систему (1.1) в эквивалентную систему

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}_I^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)\,. \tag{2.3}$$

Матрица $\mathbf{L}_I^{\mathrm{T}}$ квазидиагональна, причем

$$\mathbf{L}_I^{\mathrm{T}} = \{(\mathbf{L}^{(1)})^{\mathrm{T}}, (\mathbf{L}^{(2)})^{\mathrm{T}}, \ldots, (\mathbf{L}^{(q)})^{\mathrm{T}}\}\,.$$

Если через $\mathbf{B}_j$ обозначить подматрицы матрицы $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, которые состоят из строк с номерами $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{j-1} + 1, \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{j-1} + 2, \ldots$ $\ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{j-1}, \nu_j$, то (2.3) можно записать как систему векторных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}}^{(j)} = (\mathbf{L}^{(j)})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y}^{(j)} + \mathbf{B}_j\,\mathbf{u}(t)\,, \tag{2.4}$$
$$j = 1, 2, \ldots, q\,.$$

Уравнения (2.4) однотипны и независимы. От рассмотренного в [5] случая отличаются лишь только общим видом матрицы $\mathbf{B}_j$. Таким образом, общая линейная задача сводится к параллельному рассмотрению упрощенных однотипных подзадач.

Чтобы избежать излишних усложнений, при последующих рассмотрениях будем считать, что поставленную проблему решаем для любого уравнения (2.4):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,. \tag{2.5}$$

Фазовым пространством будет $X_n^{(j)}$ соответствующее (2.5); мы обозначим его $\mathbf{J}_m$, а сопряженная система будет иметь вид

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\,. \tag{2.6}$$

3. ВЫВОД ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Условие (1.2) экстремальности управления определяет $\mathbf{u}_{\mathrm{ext}}(t)$ как векторы с координатами, которые являются кусочно постоянными функциями

$$u_i(t) = \begin{cases} -1\,, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\left(\sum_{l=1}^{m} b_{il}\,\eta_l(t)\right) = -1\,, \\ +1\,, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\left(\sum_{l=1}^{m} b_{il}\,\eta_l(t)\right) = +1\,, \end{cases} \tag{3.1}$$
$$i = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Функции $\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_m(t)$ являются фундаментальной системой решений системы (2.6). На основании выше сказанного можно сделать следующий вывод: все $\mathbf{u}_{\text{ext}}(t)$ при $t \geqq 0$ ($\mathbf{u}_{\text{ext}}(t)$ рассматриваются в связи с реальными процессами) имеют одно и тоже конечное множество значений вершин гиперкуба U.

Когда t пробегает положительную полуось исходя из точки O, каждое $\mathbf{u}_{\text{ext}}(t)$ занимает счетное, однозначно определенное множество вершин

$$\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N, \ldots\}, \tag{3.2}$$

где для всякого $j = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{v}_{j+1}$.

Так как $\eta_i(t)$ – трансцендентные многочлены порядка непревышающего $m - 1$, каждая из координат $u_i(t)$ изменяет знак не больше чем $m - 1$ раз и тогда множества (3.2) являются конечными, с числом элементов $N \leqq r(m - 1)$ [2].

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_N$ значения t, соответствующие данному $\mathbf{u}_{\text{ext}}(t)$, для которых

$$\mathbf{u}_{\text{ext}}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_0, & \text{если} \quad 0 \leqq t < t_1, \\ \mathbf{v}_\mu, & \text{если} \quad t_\mu \leqq t < t_{\mu+1}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, N - 1, \\ \mathbf{v}_N, & \text{если} \quad t_N \leqq t. \end{cases} \tag{3.3}$$

Если в (2.5) произвести замену $\mathbf{u}(t)$ на $\mathbf{u}_{\text{ext}}(t)$ для фиксированной начальной точки $\mathbf{y}^0$ области управляемости $\Omega \subset \mathbf{J}_m$, соответствующая экстремальная траектория будет иметь параметрическое уравнение вида

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{L}t}\mathbf{y}^0 + \mathrm{e}^{\mathbf{L}t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathbf{L}s}\mathbf{B}\, \mathbf{u}_{\text{ext}}(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Следовательно, обозначив единичную матрицу через $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathbf{L}t}\mathbf{y}^0 + [\mathrm{e}^{\mathbf{L}t} - \mathbf{E}]\, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_0, & \text{если} \quad 0 \leqq t < t_1, \\ \mathrm{e}^{\mathbf{L}t}\mathbf{c}_\mu + [\mathrm{e}^{\mathbf{L}t} - \mathbf{E}]\, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_\mu, & \text{если} \quad t_\mu \leqq t < t_{\mu+1}, \\ \qquad \mu = 1, 2, \ldots, N - 1, & \\ \mathrm{e}^{\mathbf{L}t}\mathbf{c}_N + [\mathrm{e}^{\mathbf{L}t} - \mathbf{E}]\, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_N, & \text{если} \quad t_N \leqq t. \end{cases}$$

Непрерывность экстремальной траектории (см. (3.3)) для $t_1, t_2, \ldots, t_N$ однозначно определяет постоянные векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_N$ по $\mathbf{y}^0, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N$ и $t_1, t_2, \ldots, t_N$:

$$\mathbf{c}_\mu = \mathbf{y}^0 + \sum_{\nu=1}^{\mu} [\mathbf{E} - \mathrm{e}^{-\mathbf{L}t_\nu}]\, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_{\nu-1}), \quad \mu = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.4}$$

При фиксированном N для каждого набора неотрицательных значений t: $t_1, t_2, \ldots, t_N$ и для каждого фиксированного множества вершин $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ равенства (3.3) определяют соответствующий вектор $\mathbf{w}(t)$. Множество векторов $\mathbf{w}(t)$, определенных таким образом, обозначим $\mathscr{W}$. Из выше приведенных рассуждений следует, что $U_{\text{ext}} \subset \mathscr{W}$.

Лемма 1. *Множество $\mathscr{W}$ совпадает с множеством экстремальных управлений $\boldsymbol{U}_{\text{ext}}$.*

Чтобы избежать некоторых повторений, доказательство леммы будет приведено в конце следующего параграфа.

Так как числа $t_1, t_2, \ldots, t_N$ ($N \leqq r(m-1)$) при фиксированном множестве $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ однозначно определяют согласно (3.3) элемент $\boldsymbol{U}_{\text{ext}}$, уместно их назвать определяющими экстремальное управление параметрами.

4. РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Полной и точной ответ на поставленную в § 1 задачу дают теоремы 1 и 2 и связанные с ними рассуждения.

Рассмотрим множество трансцендентных векторных уравнений

$$\mathbf{y}^0 + \sum_{\nu=1}^{N-1} [\mathrm{e}^{-\boldsymbol{L}t_\nu} - \boldsymbol{E}]\, \boldsymbol{L}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_{\nu-1}) + [\mathrm{e}^{-\boldsymbol{L}t^*} - \boldsymbol{E}]\, \boldsymbol{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_N = 0\,, \tag{4.1}$$

в которых $\mathbf{y}^0$ – произвольный вектор области управляемости $\Omega \subset \boldsymbol{J}_m$, где N – целое положительное число, не превышающее $r(m-1)$, а $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ произвольное множество вершин, в записи которого каждые два последовательных элемента являются различными вершинами $\boldsymbol{U}$.

Лемма 2. *Для любого фиксированного $\mathbf{y}^0$ могут быть построены $2^r(2^0 + 2^{r-1} + 2^{2(r-1)} + \ldots + 2^{r(m-1)(r-1)})$ трансцендентные векторные уравнения вида* (4.1) *для определения $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}, t^*$.*

Доказательство. Для данного N $\mathbf{v}_0$ может занимать 2^r возможных состояний (согласно ограничению „различия" двух соседних векторов), $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N$ могут занимать по 2^{r-1} возможных состояния. Следовательно, общее число упорядоченных множеств вида $\{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$ будет $2^r \,.\, \underbrace{2^{r-1} \,.\, 2^{r-1} \ldots 2^{r-1}}_{N} = 2^r \,.\, 2^{N(r-1)}.$ Когда N получит последовательно значения $0, 1, 2, \ldots, r(m-1)$, получим общее число трансцендентных уравнений вида (1.1) для фиксированного $\mathbf{y}^0$.

Теорема 1. *Для всякого начального состояния $\mathbf{y}^0 \in \Omega$ из всех трансцендентных векторных уравнений* (4.1) *лишь только одно имеет единственное реальное решение $t_1, t_2, \ldots, t_M, t^*$, удовлетворяющее неравенствам $t_1 < t_2 < \ldots < t_M \leqq t^*$.*

Числа $t_1, t_2, \ldots, t_M$, состовляющие это решение, есть определяющие $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$ параметры при соответствующем множестве вершин $\boldsymbol{U}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M\}$.

Доказательство. Множество экстремальных управлений U_{ext} можно разложить на $r(m-1)+1$ непересекающихся подмножеств $U_{\text{ext}}^{(N)}$ в зависимссти от числа N моментов разрыва – соответствующих $\boldsymbol{u}_{\text{ext}}(t)$. Для всякого N можно составить $2^{N(r-1)+r}$ конечных последовательностей векторов, каждые два последовательных элемента которых являются различными вершинами $\boldsymbol{U}$ (см. Лемму 2.). В зависимости от того, какая из этих последовательностей составляет множество значений $\boldsymbol{u}_{\text{ext}}(t)$, всякое $U_{\text{ext}}^{(N)}$ разлагается на $2^{N(r-1)+r}$ взаимно непересекающихся подмножеств $U_{\text{ext}}^{(N)}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N]$.

Теорема о существовании оптимального управления гласит, что для всякого $\boldsymbol{y}^0 \in \Omega$ существует $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t) \in U_{\text{ext}}$. Следовательно, при выбранном $\boldsymbol{y}^0$ существует хотя бы одно $U_{\text{ext}}^{(N)}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N]$, к которому принадлежит оптимальное управление.

Так как предварительно неизвестно $U_{\text{ext}}^{(N)}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N]$, которое содержит $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$, допустим, что $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$ принадлежит последовательно каждому из них. Из допущения, что $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t) \in U_{\text{opt}}^{(N)}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N]$ и из (3.5) следует, что существует момент $t^* \geqq t_N > t_{N-1} > \ldots > t_1 > 0$, для которого $e^{\boldsymbol{L}t^*}\boldsymbol{c}_N + [\boldsymbol{E} - e^{\boldsymbol{L}t^*}]\, \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_N = 0$, т.е. для $\boldsymbol{c}_N$ получается независимая от (3.4) новая формула

$$\boldsymbol{c}_N = e^{-\boldsymbol{L}t^*}[e^{\boldsymbol{L}t^*} - \boldsymbol{E}]\, \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_N .$$

Приравнивая правые части обоих выражений и производя необходимые эквивалентные преобразования, получим трансцендентные уравнения вида (4.1).

Так всякому $U_{\text{ext}}^{(N)}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N]$ соответствует одно трансцендентное уравнение. Теорема единственности управления позволяет лишь только одному из этих уравнений иметь такое решение $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leqq t^*$. Момент t^* называется минимальным временем попадения из $\boldsymbol{y}^0$ в начало координат.

Построение оптимального управления по $t_1, t_2, \ldots, t_N$ через $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ с помощью „хронометража" неудобно и неточно. Значительно точное $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$ можно было бы синтензировать с помощью вектора

$$(4.2)\qquad \boldsymbol{sign}\,(t) = (\operatorname{sign}(\sum_{l=1}^{m} b_{l1}\,\eta_l(t)), \operatorname{sign}(\sum_{l=1}^{m} b_{l2}\,\eta_l(t)), \ldots, \operatorname{sign}(\sum_{l=1}^{m} b_{lr}\,\eta_l(t))) ,$$

но для этого неибходимо решить поставленную в §1 задачу.

Допустимые управления ограничены по амплитуде, т. е. для всякого t, $|u_i(t)| \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. В этих неравенствах составляющие управляющего вектора независимы. Независимы и условия экстремальности (3.1). Это дает возможность упростить следующие рассуждения, рассматривая лишь одну компоненту вектора управления $u_l(t)$.

Пусть $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t) \in U_{\text{ext}}^{(M)}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M]$ и решением соответствующей трансцендентной системы (4.1) будут числа $t_1, t_2, \ldots, t_M, t^*$. Для множества $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots \ldots, \boldsymbol{v}_M\}$ однозначно определены пары последовательных векторов $(\boldsymbol{v}_{l_1}, \boldsymbol{v}_{l_1+1})$, $(\boldsymbol{v}_{l_2}, \boldsymbol{v}_{l_2+1}), \ldots, (\boldsymbol{v}_{l_k}, \boldsymbol{v}_{l_k+1})$, в каждой из которых l-тые координаты с противоположными знаками. Этим однозначно определяются те $t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_k}$, в которых $u_l(t)$ изменяет знак. Чтобы определить $u_l(t)$ с помощью $\operatorname{sign}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu l}\,\eta_\nu(t)\right)$ для начальных значений $\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0$ в (2.6) необходимо выбрать те числа, при которых значения $t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_k}$ корни нечетной кратности в уравнении

$$\sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu l}\eta_\nu(t) = 0\,. \tag{4.3}$$

Так как сума кратностей корней (4.3) не превышает $m - 1$, для кратностей $t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_k}$ можно выбрать произвольный набор k нечетных чисел, удовлетворяющих неравенству

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k \leqq m - 1\,. \tag{4.4}$$

В зависимости от того имеет ли матрица $(-\mathbf{L})^{\mathrm{T}}$ нулевое собственное значение или нет, в решениях (2.6) существует известное различие. Так как это различие никак не влияет на рассуждения, рассмотрим лишь случай, когда собственные значения $(-\mathbf{L})^{\mathrm{T}}$ действительные, отличающиеся от нуля числа $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ $\ldots < \lambda_p$ с соответствующими кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_p$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_p =$ $= m)$.

Решения $\eta_\nu(t)$ в расмотренном случае имеют вид (см. [7])

$$\eta_\nu(t) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} C_q^i \varphi_{qi}^{(\nu)}(t)\,,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m-1\,,$$

$$\eta_m(t) = -\sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} C_q^i \left\{\sum_{\mu=0}^{q-1} \frac{t^\mu}{\mu!}\right\} e^{-\lambda_i t}\,.$$

Функции

$$\varphi_{qi}^{(\nu)}(t) = \left\{\sum_{\mu=0}^{q-1} \frac{t^\mu}{\mu!} \left[\sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \left(\sum_{s=0}^{q-\mu-1} \binom{\nu + s - j - 1}{\nu - j - 1} \frac{1}{\lambda_i^s}\right) \frac{1}{\lambda_i^{\nu-j}}\right]\right\} e^{-\lambda_i t}$$

и константы C_q^i определяются однозначно через $\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0$ из линейной системы:

$$\eta_\nu^0 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} C_q^i \left\{\sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \left[\sum_{s=0}^{q-1} \binom{\nu + s - j - 1}{\nu - j - 1} \frac{1}{\lambda_i^s}\right] \frac{1}{\lambda_i^{\nu-j}}\right\} e^{-\lambda_i}\,,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m-1\,,$$

$$\eta_m^0 = -\sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} C_q^i\,.$$

Если через Δ обозначим определитель из коэффициентов перед C_q^i ($i = 1, 2, \ldots, p$; $q = 1, 2, \ldots, k_i$), а через d_{qj}^i обозначим субдетерминант, соответствующий элементу в Δ j-той строки и $(k_1 + k_2 + \ldots + k_{i-1} + q)$-ого столбца ($\Delta \neq 0$, см. [5]), то

$$C_q^i = \frac{1}{\Delta} \sum_{r=1}^{m} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q+r} \eta_r^0 .$$

Следовательно, для произвольного набора нечетных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, удовлетворяющих неравенству (4.4), все начальные векторы $(\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0)$, для которых в силе следующая система линейных равенств и неравеснтв

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} \varphi_{qi}^{(v)}(t_{l_1}) \right] (-1)^r \eta_r^0 = 0 , \tag{4.5}$$

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_{qi}^{(v)}(t) \right]_{t=t_{l1}} \right] (-1)^r \eta_r^0 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} \left[\frac{\mathrm{d}^{p_1-1}}{\mathrm{d}t^{p_1-1}} \varphi_{qi}^{(v)}(t) \right]_{t=t_{l1}} \right] (-1)^r \eta_r^0 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} [\varphi_{qi}^{(v)}(t)]_{t=t_{lk}} \right] (-1)^r \eta_r^0 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} \left[\frac{\mathrm{d}^{p_k-1}}{\mathrm{d}t^{p_k-1}} \varphi_{qi}^{(v)}(t) \right]_{t=t_{lk}} \right] (-1)^r \eta_r^0 = 0 ,$$

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} \left[\frac{\mathrm{d}^{p_1}}{\mathrm{d}t^{p_1}} \varphi_{qi}^{(v)}(t) \right]_{t=t_{l1}} \right] (-1)^r \eta_r^0 \neq 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{r=0}^{m} \left[\sum_{v=1}^{m} b_{lv} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{k_i} d_{qr}^i (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+q} \left[\frac{\mathrm{d}^{p_k}}{\mathrm{d}t^{p_k}} \varphi_{qi}^{(v)}(t) \right]_{t=t_{lk}} \right] (-1)^r \eta_r^0 \neq 0$$

являются решением поставленнсй в §1 задачи.

Таким образом нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если через Q обозначим число положительных целых решений неравенства $p_1 + p_2 + \ldots + p_k \leqq m - 1$ составленных из k нечетных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то множество всех векторов $\eta(0)$, удовлетворяющих хотя бы* *одной из Q систем* (4.5), *определяет через условия экстремальности* (3.1) *одну и ту же функцию* $\sum_{\nu=1}^{m} b_{l\nu}\,\eta_\nu(t)$, *совпадающую по знаку с l-той координатой* $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$.

Остается доказать лишь Лемму 1.

Доказательство Леммы 1. Соотношение $\boldsymbol{U}_{\text{ext}} \subseteq \mathscr{W}$ уже доказано. Докажем, что $\mathscr{W} \subset \boldsymbol{U}_{\text{ext}}$. Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathscr{W}$. Пусть $\boldsymbol{w}$ определяется равенством (3.3) посредством фиксированных действительных значений $t : t_1, t_2, \ldots, t_N$. Таким же образом, как и при параметрах $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t)$, можно достигнуть равенств и неравенств вида (4.5). Так как общее число этих равенств и неравенств не превышает $m - 1$, в $\boldsymbol{J}_m$ существует хотя бы один вектор $\boldsymbol{\eta}(0)$, который их удовлетворяет. Если поставить координаты $\boldsymbol{\eta}(0)$ как начальные значения $\eta_\nu(t)$, то $\boldsymbol{sign}\,(t)$ совпадает с $\boldsymbol{w}$.

Следовательно, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{sign}\,(t) = \boldsymbol{u}_{\text{ext}}(t) \in \boldsymbol{U}_{\text{ext}}$. Этим доказывается, что $\mathscr{W} \subset \subset \boldsymbol{U}_{\text{ext}}$, т. е. $\mathscr{W} = \boldsymbol{U}_{\text{ext}}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский: Математические методы оптимального управления. Москва 1966.

[2] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамрелидзе, Е. Ф. Мишенко: Математическая теория оптимальных процессов. Москва 1961.

[3] L. W. Neustadt: Synthesing Time Optimal Control Systems. Journal of Math. Analysis and Applications (1960), 1.

[4] J. H. Eaton: An Iterative Solutions to Time Optimal Control. Journal of Math. Analysis and Applications (1960), 5.

[5] Ил. П. Цветанов: Нахождение начальных значений вспомагательных переменных одного класса линейных систем при их оптимальном по быстродействию управлении. Доклад на IV конгрессе IFAC, Варшава, 16—20 июля 1969.

[6] Ф. Р. Гантмахер: Теория матриц. Москва 1966.

[7] Л. С. Понтрягин: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва 1961.

(Поступила в редакцию 29 января 1971 г.)

Nalezení počátečních podmínek pro pomocný systém v úloze časově optimálního řízení lineárních soustav

I. P. Cvetanov

V práci je odvozeno přesné řešení jednoho ze základních problémů teorie optimálního řízení, totiž nalezení počátečních hodnot vektoru $\psi(t)$ (pro $t = 0$). Tento vektor, jenž je řešením pomocného systému rovnic, vystupuje podle Pontrjaginova principu maxima ve výrazech pro časově optimální řízení lineárních soustav.

Řešení sestává z těchto etap:

1. Jsou odvozeny parametrické rovnice pro extremální trajektorie.
2. Jsou zkoumány transcendentní vektorové rovnice, jejichž reálné nezáporné řešení odpovídá okamžikům přepnutí optimálního řízení.
3. Je odvozena soustava lineárních rovnic a nerovností, jejímž řešení je právě vektor počátečních hodnot pomocných proměnných $\psi(0)$.

Илия П. Цветанов, Институт технической кибернетики БАН, IV клм., бл. 4, София, Болгария.