Ein Modell des nichthomogenen Markoffschen Geburts- und Todes-Prozesses mit gesteuertem Mittelwert II

FRANTIŠEK ZRCEK

In diesem Teil werden die Sätze und die Formeln hergeleitet, welche in dem ersten Teil des Artikels* eingeführt werden und auf denen die Lösung des betrachteten Problems begründet wird.

ANHANG I

Die Bedingungen $\lambda(t) \geqq 0$ und $\mu(t) \geqq 0$ sind erfüllt, wenn

$$g'(t) \geqq f'(t)\left[2\frac{g(t)}{f(t)} \pm 1\right], \tag{I-1}$$

wie es aus (16) und (17) folgt.

Im Sinne der physikalischen Beschaffenheit unseres Problems und der gegebenen Aufgabe nach gelten folgende Beziehungen:

$$f(t) > 0\,, \; g(t) \geqq 0\,, \; f'(t) \gtreqless 0\,, \quad g'(t) \gtreqless 0\,.$$

Die Bedingung (I-1) wird erfüllt, wenn für die Funktion $g'(t)$ gilt

$$g'(t) > f'(t)\left[2\frac{g(t)}{f(t)} + 1\right] \quad \text{für} \quad f'(t) > 0 \tag{I-2}$$

und

$$g'(t) > f'(t)\left[2\frac{g(t)}{f(t)} - 1\right] \quad \text{für} \quad f'(t) < 0\,. \tag{I-3}$$

* Kybernetika 6 (1970), 5, 382—398.

 In einem Zeitabschnitt $\langle t_r, t_{r+1}\rangle$, wo $f'(t) > 0$, bestimmt man $g(t)$ durch

$$g'(t) = k \,.\, f'(t)\left[2\,\frac{g(t)}{f(t)} + 1\right]. \tag{I-4}$$

In einem Zeitabschnitt $\langle t_{r+1}, t_{r+2}\rangle$, wo $f'(t) < 0$ ist, bestimmt man $g(t)$ durch

$$g'(t) = l \,.\, f'(t)\left[2\,\frac{g(t)}{f(t)} - 1\right]. \tag{I-5}$$

Die Grösse k, bzw. l, muss so bestimmt werden, dass die Gleichung (I-4), bzw. (I-5), die Forderung (I-2), bzw. (I-3), erfüllt.

Da $f(t) > 0$ und $g(t) \geqq 0$ ist, wird die Forderung (I-2) durch (I-4) immer erfüllt, wenn die Konstante $k > 1$ ist.

Zur Bestimmung der Beeinflussung einer Funktion $g(t)$ durch k schätzt man die Beziehung

$$\frac{\partial g(t, k)}{\partial k} > 0$$

ab, wodurch man die Relation (20) erhält.

Bezüglich der Forderung (I-3), welche durch die Gleichung (I-5) erfüllt werden soll, muss die Grösse l in einem Zeitabschnitt $\langle t_{r+1}, t_{r+2}\rangle$ im allgemeinen die Werte $l \gtreqqless 1$ annehmen, wenn $g(t) \lesseqqgtr \frac{1}{2}f(t)$ ist.

Die Streuung nimmt mit der Zeit rasch zu. Aus diesem Grunde pflegt oft in der Praxis die Beziehung $g(t) > \frac{1}{2}f(t)$ erfüllt zu sein. Dann ist es möglich l für eine Konstante $0 < l < 1$ zu halten und die Lösung von (I-5) als (19) zu schreiben.

Die Beeinflussung der Funktion $g(t)$ durch l bestimmt man durch Abschätzung

$$\frac{\partial g(t, l)}{\partial l} > 0\,.$$

Hieraus können wir die Schlussfolgerung (21), bzw. (22) ziehen, je nachdem, wo im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ sich die Konstante l befindet.

Wird nicht in einem Zeitabschnitt, in welchem $f'(t) < 0$ ist, die Forderung $g(t) > \frac{1}{2}f(t)$ erfüllt, so bestimmt man die Grösse l als eine Zeitfunktion $l(t)$ durch die Gleichung (I-5). Zugleich muss $l(t) \gtreqqless 1$ sein, wenn $g(t) \lesseqqgtr \frac{1}{2}f(t)$ ist.

ANHANG II

Wir führen

$$\frac{1 - \varepsilon}{\mu - \lambda\varepsilon} = A\,, \quad \frac{1 - \varepsilon}{\lambda - \mu\varepsilon} = B\,, \tag{II-1}$$

ein, wo

$$\varepsilon = e^{(\lambda-\mu)t}\,.$$

Nun schreiben wir (8) als

$$\text{(II-2)}\qquad {}^{\nu}p_n(t) = \mu^N \lambda^n A^{N+n} \sum_{k=0}^{\binom{\min}{n,N}} (-1)^k \binom{N}{k} \binom{N+n-k-1}{N-1} (\mu\lambda AB)^{-k}\,.$$

Wir bezeichnen mit δ_N den Absolutwert einer Änderung des Zahlenzustandes des betrachteten Systems, welche im Verlaufe eines Zeitabschnittes der Länge τ stattfand und schreiben

$$\delta_N = |n - N|\,.$$

Wir werden weiter folgende Fälle unterscheiden:

a) $\qquad \lambda \neq \mu \quad \text{für} \quad n \gtreqless N\,;$

b) $\qquad \lambda = \mu \quad \text{für} \quad n \gtreqless N\,.$

II. 1. Abschätzung von A und B

Aus (II-1) folgt

$$A^{-1} = \mu + \frac{\mu - \lambda}{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}\,, \quad B^{-1} = \lambda - \frac{\mu - \lambda}{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}\,.$$

Wir setzen

$$u = (\mu - \lambda)\,t\,.$$

Als $\psi(u)$ schreibt man

$$\text{(II-3)}\qquad \psi(u) = \frac{(\mu - \lambda)\,t}{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u^k}{(k+1)!}}\,.$$

Es ergibt sich dann

$$A^{-1} = \mu + \frac{\psi(u)}{t}\,, \quad B^{-1} = \lambda - \frac{\psi(\mu)}{t}\,.$$

Mit $u = \varkappa$, wo $\varkappa \ll 1$ ist, ist es möglich, wenn die Grössen $\varkappa$ höherer Ordnung vernachlässigt werden und

$$\text{(II-4)}\qquad \lambda < 1\,,\ \mu < 1\,,\ t = \tau \ll 1$$

 ist, wegen $\psi(u) = \psi(\varkappa)$ endlich

(II-5) $$A = t\,, \quad B = -t$$

und

(II-6) $$A\,.\,|B| = t^2$$

zu schreiben.

II. 2. Bedingungen für monotones Wachstum der Reihe (8)

Im weiteren wird es notwendig sein die Maximalwerte der Ausdrücke

$$\binom{N}{r}^{1/(N-r)} \quad \text{und} \quad \left[\binom{N}{r} : \binom{N}{n}\right]^{1/(n-r)}$$

zu kennen. Zuerst gehen wir also an ihre Ableitung heran.

II. 2.1 Hilfssatz. *Nimmt r sukzessiv die Werte $r = 1, 2, \ldots, N-1$ an, dann bilden die Ausdrücke*

$$W(r) = \binom{N}{r}^{1/(N-r)}$$

eine Folge, welche ein monotones Wachstum besitzt. Ein Ausdruck $W(r)$ erreicht den Maximalwert $W(r)_{\max}$ für $r = N-1$ und es gilt

(II-7) $$W(r)_{\max} = W(N-1) = N\,.$$

Beweis.

$$\frac{W(r)}{W(r-1)} = \left(\frac{N-r+1}{r}\right)^{N-r} \cdot \frac{N(N-1)\ldots[N-(N-r)+1]}{(N-r)(N-r-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}\,.$$

Durch Umformung des letzten Ausdruckes erhält man

$$\frac{W(r)}{W(r-1)} = \left(\frac{N}{r} \cdot \frac{N-1}{r} \cdots \frac{r+1}{r}\right) \cdot \left(\frac{N-r+1}{N-r} \cdot \frac{N-r+1}{N-r-1} \cdots \frac{N-r+1}{1}\right).$$

Hieraus ergibt sich gleich, dass

$$\frac{W(r)}{W(r-1)} > 1\,.$$

II. 2.2. Hilfssatz. *Nimmt r sukzessiv die Werte $r = 1, 2, \ldots, n-1$ an und sei*

$N > n$. Dann bilden die Ausdrücke

$$W(r) = \left(\frac{\binom{N}{r}}{\binom{N}{n}}\right)^{1/(n-r)}$$

eine Folge, welche ein motonones Wachstum besitzt. Ein Ausdruck $W(r)$ erreicht den Maximalwert $W(r)_{\max}$ für $r = n - 1$ und es gilt

(II-8) $$W(r)_{\max} = W(n-1) = \frac{n}{N-n+1}.$$

Beweis.

$$\frac{W(r+1)}{W(r)} = \left(\frac{N-r}{r+1}\right)^{n-r} \cdot \frac{\binom{n}{n-r}}{\binom{N-r}{n-r}}.$$

Durch Umformung des letzten Ausdruckes erhält mann

$$\frac{W(r+1)}{W(r)} = \left(\frac{n}{r+1} \cdot \frac{n-1}{r+1} \cdots \frac{r+1}{r+1}\right) \cdot \left(\frac{N-r}{N-r} \cdot \frac{N-r}{N-r-1} \cdots \frac{N-r}{N-n+1}\right).$$

Hieraus ergibt sich gleich, dass

$$\frac{W(r+1)}{W(r)} > 1.$$

II. 2.3. Monotones Wachstum der Reihe (8) für $\lambda \neq \mu$, $n > N$. Nun beachten wir folgende Reihe

(II-9) $$\sum_{k=0}^{N} \binom{N+n-k-1}{N-1}.$$

Wir setzen

(II-10) $$\frac{(N+n-1)!}{(N-1)!\,n!} = a$$

und

(II-11) $$\frac{n-r+1}{N+n-r} = Q_r.$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N+n-k-1}{N-1} = a\left[1 + \sum_{l=1}^{N} \prod_{i=1}^{l} Q_i\right].$$

 Es gilt

$$Q_1 = \frac{n}{N + n - 1}, \quad Q_N = \frac{n - N + 1}{n} . \tag{II-12}$$

Wir schätzen jetzt die Werte von Q_r ab und legen

$$n - r + 1 = u , \quad N + n - r = v .$$

Nun ist

$$\frac{Q_{r-1}}{Q_r} = \frac{u \cdot v + v}{u \cdot v + u} .$$

Wegen $N \gg 1$ und $v > u$ folgt daraus

$$Q_{r-1} > Q_r .$$

Aus (II-11) ist zugleich

$$Q_r < 1 .$$

Hieraus ergibt sich

$$1 > Q_1 > Q_2 > \ldots > Q_{N-1} > Q_N . \tag{II-13}$$

Wir kehren zu der Reihe (II-2) zurück, welche man jetzt als

$$^{\nu}p_n(t) = C \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \binom{N + n - k - 1}{N - 1} (\mu \lambda t^2)^{-k} \tag{II-14}$$

schreiben kann.

Ein gemeines Glied der Reihe (II-14) für $k = r$ ist

$$S_r = \binom{N}{r} \frac{Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_r}{(\mu \lambda t^2)^r} . \tag{II-15}$$

Das letzte Glied dieser Reihe ist

$$S_N = \frac{Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_r}{(\mu \lambda t^2)^r} \cdot \frac{Q_{r+1} \ldots Q_N}{(\mu \lambda t^2)^{N-r}} .$$

Man sucht jetzt die Bedingungen, unter welchen das Glied S_N den Maximalwert von allen Gliedern der Reihe (II-16) annimmt. Es muss also folgende Beziehung

$$\frac{S_N}{S_r} = \frac{\prod_{i=r+1}^{N} Q_i}{\binom{N}{r} (\mu \lambda t^2)^{N-r}} > 1 \tag{II-16}$$

für ein beliebiges $r = 1, 2, \ldots, N - 1$ erfüllt werden.

Durch Umformungen von (II-16) erhält man

$$\text{(II-17)} \qquad \left(\frac{\binom{N}{n}}{\binom{n}{r}\binom{n+N-r-1}{n-1}}\right)^{1/(N-r)} > \mu\lambda t^2 .$$

Man braucht jetzt also einen solchen Wert von r zu finden, für den die linke Seite der Ungleichung (II-17) einen Minimalwert erreicht. Dies wird durch folgendes Verfahren leichter gemacht.

Mit Hilfe der Beziehungen (II-13) erhält man

$$\prod_{i=r+1}^{N} Q_i > Q_N^{N-r} .$$

Setzt man den letzten Ausdruck in (II-16) ein, so bekommt die Beziehung (II-16) folgende Form:

$$\text{(II-18)} \qquad \left(\frac{Q_N}{\mu\lambda t^2}\right)^{N-r} > \binom{N}{r} .$$

Ersetzen wir hierin Q_N durch (II-12), so bekommen wir endlich die Forderung

$$\text{(II-19)} \qquad \frac{n-N+1}{n\binom{N}{r}^{1/(N-r)}} > \mu\lambda t^2 ,$$

deren Einhalten es sicher stellt, dass das letzte Glied der Reihe (II-14) zugleich das grösste ist.

Die Beziehung (II-19) wird durch einen solchen Wert der Grösse $r = 1, 2, \ldots, N-1$ erfüllt, für den der Ausdruck $\binom{N}{r}^{1/(N-r)}$ den Maximalwert erreicht. Aus (II-17) geht hervor, dass es der Wert $r = N - 1$ ist und dass zugleich der erwähnte Ausdruck selbst den Wert N annimmt.

Mit $|n - N| = \delta_N$ nimmt endlich unsere Bedingung die Form

$$\text{(II-20)} \qquad \frac{\delta_N + 1}{nN} > \mu\lambda t^2$$

an. Dadurch wird die Beziehung (30) für den Fall $\lambda \neq \mu$ und $n > N$ bewiesen.

Nun wenden wir uns zur Abschätzung eines Verhältnisses von zwei beliebigen nacheinanderfolgenden Gliedern der Reihe (II – 14).

Mit Hilfe der Ausdrücke (II-11) und (II-15) erhält man

$$\frac{S_{r+1}}{S_r} = \frac{N-r}{r+1} \cdot \frac{n-r}{N+n-r-1} \cdot \frac{1}{\mu\lambda t^2} .$$

Mit Hilfe von (II-20) und mit $r = N - i$, wo $i \leqq N$, ist

$$\frac{S_{r+1}}{S_r} = \frac{n - N + i}{n - N + 1} \cdot \frac{n \cdot i}{n + i - 1} \cdot \frac{N}{N - i + 1} .$$

Hieraus ergibt sich, dass für $1 < i \leqq N$

$$\frac{S_{r+1}}{S_r} > 1$$

ist. Offenbar hat also die Reihe (II-14) in vorliegendem Fall ein monotones Wachstum, wenn die Forderung (II-20) erfüllt wird.

II. 2.4. Monotones Wachstum der Reihe (8) für $\lambda \neq \mu$, $n < N$. Für diesen Fall lässt sich die Ableitung der Forderung (30) auf ähnliche Weise wie in vorigem Fall bilden.

Es gilt hier $0 \leqq k \leqq n$ für die Reihe (II-14). Mit Auslassung von C ist das r-te Glied der Reihe (II-14)

$$S_r = \binom{N}{r} \frac{Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_r}{(\mu\lambda t^2)^r}$$

und das n-te Glied

$$S_n = \binom{N}{n} \frac{Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_r}{(\mu\lambda t^2)^r} \cdot \frac{Q_{r+1} \ldots Q_n}{(\mu\lambda t^2)^{n-r}} ,$$

wo

$$r = 1, 2, \ldots, n - 1 .$$

Weiter ist

$$Q_r = \frac{n - r + 1}{N + n - r} , \quad Q_n = \frac{1}{N} .$$

Wieder wird gesucht, unter welcher Bedingung die Beziehung

(II-21) $$\frac{S_n}{S_r} > 1$$

für ein beliebiges $r = 1, 2, \ldots, n - 1$ gilt.

In ähnlicher Weise wir früher bekommt man auch in vorliegendem Fall $n < N$ folgende Forderung

(II-22) $$\frac{1}{N} \left(\frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{r}} \right)^{1/(n-r)} > \mu\lambda t^2 ,$$

welche erfüllt werden muss, wenn (II-21) gelten soll.

Nach den Ergebnissen des Absatzes II.2.2 erreicht die linke Seite der Ungleichung (II-22) den Minimalwert für $r = n - 1$. Hieraus bekommt man endlich die Forderung (II-22) in der Form

$$\frac{\delta_n + 1}{n \, . \, N} > \mu\lambda t^2 \, . \tag{II-23}$$

Soll also das letzte Glied S_n der Reihe (II-14) für $n < N$ zugleich ein Glied mit grösstem Wert sein, muss (II-23) gelten.

Ähnlich wie in letztem Fall kann man beweisen, dass

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{\delta_N + 1}{nN\mu\lambda t^2}$$

ist und dass also auch im Fall $n < N$ die Reihe (II-14) ein monotones Wachstum besitzt.

II. 2.5. Monotones Wachstum der Reihe (8) für $\lambda \neq \mu$, $n = N$ und $\lambda = \mu$, $n \gtreqless N$ kann man in gleicher Weise wie bisher beweisen. Die Ableitung wird also nicht mehr gegeben.

ANHANG III

Es wird zuerst die Definition eines speziellen Markoffschen Prozesses der Immigration und Emigration $Z(t)$ für Modellierzwecke gegeben, die die Ableitung der Formel (37) ermöglicht.

Man setze voraus, dass in einen begrenzten Raum, der zur Zeit $t = 0$ leer ist, zufälligerweise positive und negative Einheiten eintreten. Wir bezeichnen mit α die Durchschnittszahl der positiven Einheiten, die während einer Zeiteinheit in den Raum eingetreten sind. Ähnlich, mit β, bezeichnen wir die Durchschnittszahl der negativen Einheiten. Das Eindringen der Einheiten sei ein zufälliger Prozess mit der Poisson-Verteilung. Die gleichzeitige Erscheinung einer positiven und einer negativen Einheit in unserem Raum führt zu ihrer gegenseitigen Vernichtung. Dies zeigt sich so, als ob darin keine Einheit wäre.

Nun schreiben wir die Wahrscheinlichkeit, dass während der Zeit t unseren Raum n positive Einheiten betreten, als

$$^{\oplus}p_n(t) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} \, . \, e^{-\alpha t} \, . \tag{III-1}$$

Für n negative Einheiten erhält man

$$^{\ominus}p_n(t) = \frac{(\beta t)^n}{n!} \, e^{-\beta t} \, . \tag{III-2}$$

Unter der Bedingung, dass die positiven und negativen Einheiten unseren Raum zufälligerweise frei und unabhängig betreten können, erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass darin zur Zeit t eine Zahl von n positiven Einheiten ist, wobei $n > 0$,

$$ {}^{+}p_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{\oplus}p_{n+k}(t) \,.\, {}^{\ominus}p_k(t) \tag{III-3} $$

und für die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit t eine Zahl von n negativen Einheiten in unserem Raum ist, für $n > 0$,

$$ {}^{-}p_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{\ominus}p_{n+k}(t) \,.\, {}^{\oplus}p_k(t) \,. \tag{III-4} $$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unser Raum zur Zeit t leer ist, ergibt sich zu

$$ p_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{\oplus}p_k(t) \,.\, {}^{\ominus}p_k(t) \,. \tag{III-5} $$

Mit Hilfe der Gleichungen (III-1) und (III-2) und durch Anwendung der modifizierten Besselschen Funktion ganzer Ordnung n schreibt man (III-3) als

$$ {}^{+}p_n(t) = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} I_n(2t\,\sqrt{(\alpha\beta)}) \tag{III-6} $$

und (III-4) als

$$ {}^{-}p_n(t) = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n/2} I_n(2t\,\sqrt{(\alpha\beta)}) \,. \tag{III-7} $$

Unter der Voraussetzung dass n nur ganze Werte aus dem Intervall $\langle -\infty, +\infty \rangle$ annehmen kann und mit Berücksichtigung, dass für ganze n die Beziehung

$$ I_{-n}(z) = I_n(z) $$

gilt, ist es möglich, statt der beiden Formeln (III-6) und (III-7), eine einzige Formel

$$ p_n(t) = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} I_n(2t\,\sqrt{(\alpha\beta)}) \tag{III-8} $$

zu schreiben.

Ein negativer Wert von n in (III-8) bedeutet, dass man ein solches Ereignis betrachtet, wann eine Zahl von n negativen Einheiten in unserem Raum erscheinen soll.

Nun treten wir zum Beweis, dass die Formel (III-8) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrösse $Z(t) = n$ ist. Dazu benützt man folgende Formeln [6]:

$$ I_n[2t\,\sqrt{(\alpha\beta)}] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n\pi/2)}\, J_n[\mathrm{j}2t\,\sqrt{(\alpha\beta)}] $$

und

(III-9)
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi^n J_n(z) = e^{z(\xi - \xi^{-1})/2} .$$

Hier setzte man

$$\xi = -j \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{und} \quad z = j2t \sqrt{(\alpha\beta)} .$$

Jetzt kann man schreiben wie folgt:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} . e^{-j(\pi/2)}\right]^n J_n[j2t \sqrt{(\alpha\beta)}] =$$
$$= e^{-(\alpha+\beta)t} . e^{jt\sqrt{(\alpha\beta)}(-j\sqrt{(\alpha/\beta)} - j/\sqrt{(\alpha/\beta)})} = 1 .$$

Dies beweist, dass (III-8) die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Prozesses $Z(t)$ ist.

Man bestimmt noch den Mittelwert und die Streuung des Prozesses $Z(t)$.

Zu diesem Zwecke führt man die erzeugende Funktion

(III-10)
$$P(s, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) . s^n$$

ein. Mit Hilfe von (III-9) schreibt man diese Funktion als

(III-11)
$$P(s, t) = e^{[(\alpha s + \beta s^{-1}) - (\alpha+\beta)]t} .$$

Offenbar ist die Bedingung, die an erzeugende Funktionen gestellt wird, durch (III-11) erfüllt, denn

$$P(1, t) = 1$$

ist.

Nun ergeben sich für den Mittelwert und die Streuung folgende Gleichungen [1]:

$$M[Z(t)] = \left.\frac{\partial P(s, t)}{\partial s}\right|_{s=1} ,$$
$$D[Z(t)] = \left.\frac{\partial^2 P(s, t)}{\partial s^2} + \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} - \left(\frac{\partial P(s, t)}{\partial s}\right)^2\right|_{s=1} .$$

Hieraus erhält man endlich die Formeln (38) und (39). Ist

(III-12)
$$2t \sqrt{(\alpha\beta)} \ll 1 ,$$

so kann die Formel (III-8) eine einfachere Form annehmen, der Eigenschaft wegen, dass es für $z \ll 1$ bei modifizierten Besselschen Funktionen

(III-13)
$$I_n(z) \doteq \frac{z^n}{2^n \, . \, n!}$$

gilt. Zugleich ist es aber notwendig nach der früheren Form von zwei Gleichungen für $p_n(t)$ zurückzugreifen, denn mit (III-13) ist die Beziehung $I_{-n}(z) = I_n(z)$ nicht mehr gültig.

Wegen (III-12) schreibt man also statt (III-8) die Beziehungen

(III-14)
$${}^z p_n(t) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} \, . \, \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \quad \text{für} \quad n \geqq 0 \, ,$$

(III-15)
$${}^{-z} p_n(t) = \frac{(\beta t)^n}{n!} \, . \, \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \quad \text{für} \quad n < 0 \, .$$

Man stellt noch den Fehler fest, der durch Näherungsformeln (III-14) und (III-15) aufkommt. Für diesen Fehler hält man die Abweichung von 1 der folgenden Summe S

(III-16)
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} {}^z p_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} {}^{-z} p_n(t) \, .$$

Legt man

$$2t \sqrt{\alpha\beta} = \omega \ll 1 \, , \quad 2\alpha t \ll 1 \, , \quad 2\beta t \equiv 1 \, ,$$

so kann man mit Vernachlässigung der Grössen höherer Ordnung

$$S = 1 - \frac{\omega^2}{4}$$

schreiben.

Offenbar nimmt der Fehler mit dem Werte $\alpha\beta t^2$ ab.

ANHANG IV. UMFORMUNG DER BEZIEHUNGEN FÜR WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG NACH STIRLINGS FORMEL

Man schreibt

$$\delta_N = |n - N| \quad \text{und} \quad t \equiv \tau \, .$$

Prozess $Y(t)$

Für $\lambda \neq \mu$ schreibt man statt (31) die Formel

(IV-1)
$${}^y p_{N+\delta_N}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{(N + \delta_N - 1)^{N+\delta_N-0,5}}{(N-1)^{N-0,5} \delta_N^{\delta_N+0,5}} (\lambda\tau)^{\delta_N}$$

und statt (33) die Formel

$$(\text{IV-2}) \qquad {}^{y}p_{N-\delta_N}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{N^{N+0,5}}{(N-\delta_N)^{N-\delta_N+0,5}\delta_N^{\delta_N+0,5}} (\mu\tau)^{\delta_N} .$$

Für $\lambda = \mu$ schreibt man statt (34) die Formel

$$(\text{IV-3}) \quad {}^{y}p_{N+\delta_N}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{(N+\delta_N-1)^{N+\delta_N-0,5}}{(N-1)^{N-0,5} \,.\, \delta_N^{\delta_N+0,5}} \left(\frac{\lambda\tau}{1-\lambda\tau}\right)^{\delta_N} \left(\frac{1-\lambda\tau}{1+\lambda\tau}\right)^{N}$$

und statt (36) die Formel

$$(\text{IV-4}) \quad {}^{y}p_{N-\delta_N}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{N^{N+0,5}}{(N-\delta_N)^{N-\delta_N+0,5} \,.\, \delta_N^{\delta_N+0,5}} \left(\frac{\lambda\tau}{1-\lambda\tau}\right)^{\delta_N} \left(\frac{1-\lambda\tau}{1+\lambda\tau}\right)^{N} .$$

Prozess $Z(t)$

Statt (41) schreibt man

$$(\text{IV-5}) \qquad {}^{z}p_{\delta_N}(\tau) = \frac{(\alpha\tau e)^{\delta_N}}{\delta_N^{\;\delta_N+0,5}\sqrt{(2\pi)}} \,.\, e^{-(\alpha+\beta)\tau} .$$

Statt (43) schreibt man

$$(\text{IV-6}) \qquad {}^{-z}p_{\delta_N}(\tau) = \frac{(\beta\tau e)^{\delta_N}}{\delta_N^{\;\delta_N+0,5}\sqrt{(2\pi)}} \,.\, e^{-(\alpha+\beta)\tau} .$$

ANHANG V

Das betrachtete Problem stellt eine Aufgabe vor uns, die Bedingungen für Gleichheit von

(IV-1) und (IV-5) bei $n > N$

und von

(IV-2) und (IV-6) bei $n < N$

zu suchen.

Es wird hier nur der Fall $\lambda \neq \mu$ gelöst. Im Falle $\lambda = \mu$ schreitet man ähnlicherweise fort.

Wegen der obigen Gleichheiten folgt also für $\lambda \neq \mu$

$$\left(\frac{\left(1+\dfrac{\delta_N}{N-1}\right)^{(N-0,5)/\delta_N}}{e}\right)^{\delta_N} . (N+\delta_N-1)^{\delta_N} . \lambda^{\delta_N} = \alpha^{\delta_N} . e^{-(\alpha+\beta)\tau}$$

und

$$\left(\frac{\left(1-\frac{\delta_N}{N}\right)^{-(N+0,5)/\delta_N}}{\mathrm{e}}\right)^{\delta_N} . (N-\delta_N)^{\delta_N} . \mu^{\delta_N} = \beta^{\delta_N} . \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\tau} .$$

Ist $N \gg \delta_N$, so streben die Beziehungen

$$\left(1+\frac{\delta_N}{N}\right)^{N/\delta_N} \quad \text{und} \quad \left(1-\frac{\delta_N}{N}\right)^{-N/\delta_N}$$

gegen e.

Mit $N \gg 1$ ergibt sich hieraus für beide obenerwähnten Gleichungen

$$(N\lambda)^{\delta_N} = \alpha^{\delta_N} . \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\tau} ,$$

$$(N\mu)^{\delta_N} = \beta^{\delta_N} . \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\tau} .$$

Wählt man den Wert von α, β und τ so, dass

$$1 - \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\tau} \ll 1 \tag{V-1}$$

gilt, gelangt man schliesslich zu den Formeln (45) und (46).

ANHANG VI

Es sei $k = 1, 2, \ldots$, und $t = k\tau$ die Zeit, wann der $(k + 1)$-te Zeitabschnitt der Länge τ beginnt, in welchem man den Prozess $X(t)$ durch den Prozess $Y(t)$ ersetzt, wobei die Koeffizienten α und β nach Formeln (45) und (46) bestimmt werden. Die zugehörigen Werte von λ und μ entsprechen den Koeffizienten $\lambda(t)$ und $\mu(t)$ des nichthomogenen Prozesses $X(t)$ für $t = k\tau$. Mit N bezeichnet man den Zahlenzustand, welchen eine Realisierung zur Zeit $t = k\tau$ erreichte.

Durch stetige Änderung erreichen die Koeffizienten $\lambda(t)$ und $\mu(t)$ am Ende des Zeitabschnittes die Werte $\lambda((k + 1)\,\tau)$ und $\mu((k + 1)\,\tau)$.

Die Koeffizienten λ und μ des Prozesses $Y(t)$ bleiben dagegen im Laufe des ganzen Zeitabschnittes der Länge τ auf denselben Werten $\lambda(k\tau)$ und $\mu(k\tau)$.

Es enstehen hier also Abweichungen zwischen den beiden Prozessen $X(t)$ und $Y(t)$, deren relativen Wert man bei der Geburt als

$$\frac{|(N \pm \delta_N) . \lambda((k+1)\,\tau) - N . \lambda(k\tau)|}{N . \lambda(k\tau)}$$

und beim Tod als

$$\frac{(N \pm \delta_N) . \mu((k+1)\,\tau) - N . \mu(k\tau)}{N . \mu(k\tau)}$$

schreibt.

Wegen $N \gg \delta_N$ erhält man Näherungsformeln

$$\lambda((k+1)\tau) - \lambda(k\tau) = \lambda'(t)\,\tau$$

und

$$\mu((k+1)\tau) - \mu(k\tau) = \mu'(t)\,.\,\tau\,,$$

wo $t = k\tau$ ist.

Hieraus bekommt man direkt die Formeln (48) und (49), die die obenerwähnten gegenseitigen Abweichungen der Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ darstellen.

ANHANG VII

Die Momente des Prozesses der Immigration und Emigration findet man in der Literatur in der Form ihrer Laplaceschen Bilder [4]. Hier werden die zugehörigen Originale festgestellt.

Laplacesches Bild des ersten Moments μ_1' ist [4, Gl. (11.58)]:

(VII-1)
$$\mathscr{L}\{\mu_1'\} = \frac{a}{p} + \frac{\alpha - \beta}{p^2} + \frac{\beta\xi^a - \alpha\xi^{a+1}}{p^2}\,.$$

Statt N wird man hier a schreiben, um den Anfangszustand eines Systems zu bezeichnen.

In (VII-1) bedeutet

$$\xi \equiv \xi(p) = \frac{(\alpha + \beta + p) - \sqrt{[(\alpha + \beta + p)^2 - 4\alpha\beta]}}{2}\,.$$

Man setzt

$$\frac{\xi^a(p)}{p^2} = \Phi(p)\,,$$

so dass

$$(2\alpha)^a\Phi(p - (\alpha + \beta)) = \frac{(p - \sqrt{(p^2 - 4\alpha\beta)})^a}{(p - (\alpha + \beta))^2}\,.$$

Man setzt weiter

$$(2\alpha)^a\,.\,\Phi(p - (\alpha + \beta)) = F(p)\,.\,G(p)\,,$$

wo

$$F(p) = [p - \sqrt{(p^2 - 4\alpha\beta)}]^a \quad \text{und} \quad G(p) = \frac{1}{(p - (\alpha + \beta))^2}\,.$$

Nach [7] für $a > 0$ gilt

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{a[2\sqrt{(\alpha\beta)}]^a}{t} I_a[2t\sqrt{(\alpha\beta)}]$$

und

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\} = t \,.\, e^{(\alpha+\beta)t} \,.$$

Wegen

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\,.\,G(p)\} = \int_0^t f(\tau)\,.\,g(t-\tau)\,d\tau$$

ist

$$\varphi(t) = a\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^a \int_0^t \left(\frac{t}{\tau} - 1\right) e^{-(\alpha+\beta)a} I_a[2\tau\sqrt{(\alpha\beta)}]\,d\tau \,.$$

Hieraus und mit Hilfe von (VII-1) erhält man die Formel (14).

Das Laplacesche Bild des zweiten Moments μ_2' ist [4, Gl. (11.69)]:

$$\mathscr{L}\{\mu_2'\} = \frac{a^2}{p} + \frac{2a(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)}{p^2} - \frac{2(\alpha-\beta)^2}{p^3} + $$
$$+ 2(\alpha-\beta)\left(\frac{\beta\xi^a}{p^3} - \frac{\alpha\xi^{a+1}}{p^3}\right) - \frac{\beta\xi^a}{p^2} + \frac{\alpha\beta^{a+1}}{p^2} \,.$$

Man setzt hier

$$\Phi(p) = \frac{\xi^a}{p^3} = \frac{\{(\alpha+\beta+p) - \sqrt{[(\alpha+\beta+p)^2 - 4\alpha\beta]}\}^a}{(2\alpha)^a p^3} \,.$$

Man schreibt weiter

$$\mathscr{L}\{(2\alpha)^a \,.\, e^{(\alpha+\beta)t}\,\varphi(t)\} = (2\alpha)^a\,\Phi(p-(\alpha+\beta)) =$$
$$= \frac{[p - \sqrt{(p^2 - 4\alpha\beta)}]^a}{(p-(\alpha+\beta))^3} = F(p)\,.\,G(p) \,,$$

wo

$$F(p) = [p - \sqrt{(p^2 - 4\alpha\beta)}]^a \quad \text{und} \quad G(p) = \frac{1}{(p-(\alpha+\beta))^3} \,.$$

Für $a > 0$ ist nach [7]

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = a \,.\, \frac{[2\sqrt{\alpha\beta)}]^a}{t} I_a[2t\sqrt{(\alpha\beta)}]$$

und

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\} = \frac{t^2}{2} \,.\, e^{(\alpha+\beta)t} \,.$$

Dann ist

$$(2\alpha)^a \cdot e^{(\alpha+\beta)t} \cdot \varphi(t) = \int_0^t a \frac{(2\alpha\beta)^a}{\tau} I_a[2\tau \sqrt{(\alpha\beta)}] \cdot \frac{(t-\tau)^2}{2} \cdot e^{(\alpha+\beta)(t-\tau)} \, d\tau .$$

Hieraus und mit gefundenem μ_1' erhält man die Formel (15).

(Eingegangen am 24. April 1970.)

VÝTAH

Model nehomogenního markovského procesu vzniku a zániku s řízenou střední hodnotou II

FRANTIŠEK ZRCEK

V této části článku jsou dokázány věty a vzorce obsažené v prvé části článku, na nichž je založeno řešení uvažovaného problému.

Ing. František Zrcek, CSc., Ústav výpočtové techniky ČVUT, Horská 3, Praha 2.