KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 6/1970

Dekompozícia, koordinácia a agregácia v hierarchickom riadení mnohoúrovňových sústav

JÁN ULIČNÝ

Autor v článku stručne charakterizuje problematiku hierarchického riadenia v mnohoúrovňových sústavách. V práci je uvedený model dynamickej sústavy, ktorá má z hľadiska hierarchického riadenia charakter mnohoúrovňovej sústavy.

1. ÚVOD

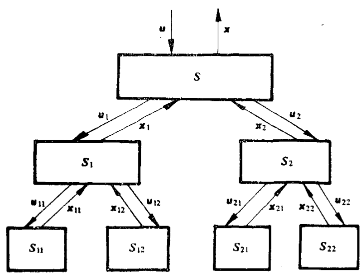
Mnohoúrovňové hierarchické riadenie a vôbec mnohoúrovňové sústavy spadajú pod širšiu teoretickú oblasť tzv. rozsiahlych sústav. Teória rozsiahlych sústav je pomerne mladou teóriou, ktorá sa rozvíja na základoch teórie riadenia a operačného výskumu. Svoje uplatnenie nachádza nielen v technickej kybernetike, ale aj v príbuzných oblastiach kybernetiky, ako napr. v ekonomickej kybernetike, biokybernetike, atď. Je známe, že princíp hierarchie, ktorý je centrálnou bázou výskumu rozsiahlych sústav, je organicky spätý s riadením vôbec, či už v živej, alebo neživej prírode, alebo v spoločnosti. Stačí, keď pojem „riadenie" uvažujeme ako komplex operácií, potrebných za účelom dosiahnutia určitého cieľa a nutne musíme dôjsť k pojmu „hierarchické riadenie", pretože nie je mysliteľné dosiahnuť čo i jednoduchý cieľ bez toho, že by niektoré z komplexu operácií neboli nadradené iným a opačne. Základnými charakteristickými črtami rozsiahlych sústav je existencia globálneho kritéria optimálnosti celej sústavy, existencia podsústav so svojimi lokálnami kritériami optimálnosti, pričom podsústavy vytvárajú v súhrne rozsiahlu sústavu a prítomnosť hierarchie v štruktúre riadenia rozsiahlou sústavou. Hierarchická štruktúra riadenia má spravidla charakter pyramidálneho spôsobu nachádzania potrebných stratégií na jednotlivých úrovniach danej pyramídy. S touto štruktúrou je veľmi úzko spojená tzv. redukcia informácií, potrebných pre jednotlivé úkony na úrovniach pyramídy. Pri veľkom množstve parametrov, podliehajúcich riadeniu v rozsiahlej sústave, musia sa dostať postupne smerom nahor v pyramidálnej štruktúre len tie najnutnejšie informácie pre dosiahnutie cieľa na tej-ktorej úrovni. Na najvyššiu úroveň postupujú spravidla len také informácie, ktoré po spracovaní pomáhajú nám koordinovať činnosť nižších úrovní z hľadiska globálneho kritéria optimálnosti. Teória rozsiahlych sústav s hierarchickou štruktúrou riadenia, alebo ináč — decentralizované riadenie, má niektoré zásadné výhody oproti centralizovanému riadeniu. Medzi najvážnejšie z nich patria väčšia spoľahlivosť práce decentralizovaného riadenia a podstatne nižšia zložitosť výpočtov optimálnych stratégií. Medzi výhody tiež môžeme započítať menšiu zložitosť aparatúry, používanej na jednotlivých úrovniach a samozrejme aj ich nižšiu cenu oproti zariadeniu ináč používanému pri centrálnom riadení. Z hľadiska doposiaľ známej teórie riadenia nám u väčších sústav robia neprekonateľné prekážky množstvo parametrov, ktoré potrebujeme určiť tak, aby sústava bola optimálna. I keď väčšina metód optimálneho riadenia platí obecne i pre sústavy s mnohými parametrami, z praktického hľadiska sú tieto metódy nepoužiteľné, ak rád riadenej sústavy prevýši rozmer napr. $M = 10$, alebo menší. Je to zdôraznené tým, že dnešné počítače majú obmedzenú operačnú rýchlosť a zároveň aj tým, že doterajším metódam pre ich povahu nebude snáď ani možné skonštruovať z reálnych prvkov taký počítač, ktorý by pri veľkých rozmeroch riadenej sústavy zvládol výpočet v rozumnej dobe vôbec, alebo aspoň tak, aby cena výpočtov zostala na hranici únosnosti. V mnohých prípadoch použitím teórie hierarchického riadenia mnohoúrovňových sústav môžeme aj za pomoci známych optimalizačných metód dospieť k požadovaným výsledkom. Práve v tom je ďalšia z výhod hierarchickej štruktúry, že u podsústav, tvoriacich rozsiahlu sústavu môžeme použiť s úspechom vhodnú, doposiaľ známu metódu, pretože rád podsústav je spravidla omnoho menší, než rád pôvodnej sústavy, ktorú máme optimalizovať. Pre lepšie porozumenie problematiky rozsiahlych sústav uvedieme ďalej niektoré definície pojmov často sa vyskytujúcich v tejto teórii a objasníme základné princípy činnosti fungovania modelu hierarchickej mnohoúrovňovej sústavy.

2. ZÁKLADNÉ POJMY A DEFINÍCIE V HIERARCHICKOM RIADENÍ MNOHOÚROVŇOVÝCH SÚSTAV

V úvode sme v krátkosti objasnili, čo budeme rozumieť pod termínom rozsiahla sústava a aké sú jej základné charakteristické črty. Presná definícia rozsiahlych sústav doposiaľ ešte neexistuje. Pod týmto pojmom si možno predstaviť celý komplex výrobní nejakej produkcie, ktorá v súhrne predstavuje model riadenej sústavy. Na druhej strane rozsiahlou sústavou môže byť čo do svojho objemu veľmi malý objekt, napr. modelovanie procesov živých organizmov. Vidíme, že pod pojmom rozsiahla sústava nebudeme rozumieť jej fyzikálne rozmery, ale štrukturálnu zložitosť z hľadiska riadenia.

V teórii rozsiahlých sústav, podobne ako v klasickej teórii riadených sústav existujú dva základné smery. Prvý, ktorý môžeme nazvať analytickým, snaží sa rozložiť pôvodnú zložitú úlohu na celý rad menších, alebo jednoduchších úloh, ktoré môžeme rešiť doposiaľ známymi metódami. V tomto prípade hovoríme o dekompozícii alebo decentralizácii rozsiahlej sústavy a o jej decentralizovanom riadení [1], [3]. Druhý smer v teórii rozsiahlych sústav má syntetický charakter. Tuná sa snažíme dostať rozsiahlu sústavu s predom vydelenými vlastnosťami tým, že používame pri jej tvorbe základných, nám známych typov podsústav. Tento syntetický spôsob konštrukcie rozsiahlej sústavy, nazývaný tiež agregáciou, je vlastne opačným postupom, používaným pri jej dekompozícii [2].

Spoločnou charakteristickou črtou oboch spomenutých smerov je, že v konečnom dôsledku dostávame mnohoúrovňovú sústavu. Rozsiahla sústava, skladajúca sa z viacerých úrovní podsústav, je charakterizovaná tým, že každá podsústava určitej úrovne má svoj lokálny cieľ, ktorý sleduje a naviac podsústavy vyššej úrovne prevádzajú koordínáciu činnosti podsústav nižších úrovní. Takto sa dostávame k pojmu hierarchického riadenia mnohoúrovňovej rozsiahlej sústavy. Výhodou hierarchického riadenia mnohoúrovňovej sústavy je, že u každej podsústavy, prevádzajúcej koordinačnú činnosť niekoľkých podsústav nižšej úrovne máme do činenia len s obmedzeným množstvom informácie, potrebnej pre dosiahnutie globálneho cieľa celej rozsiahlej sústavy. Podsústavy nižších úrovní po dosiahnutí svojich lokálnych cieľov posielajú podsústavám vyšších úrovní len také informácie, ktoré sú nezbytne nutné pre vyhodnotenie situácie vyššou úrovňou, ktorá vznikla v priebehu riadenia na nižšej úrovni. Vzniká tu svojho druhu redukcia informácií, nutná pre zvládnutie celého komplexu operácií, prebiehajúcich na rôznych úrovniach rozsiahlej sústavy. Najvyššia úroveň hierarchického pyramidálneho spôsobu riadenia mnohoúrovňovej



Obr. 1.

rozsiahlej sústavy prevádza koordináciu riadiacej činnosti za účelom dosiahnutia globálneho cieľa riadenia. Jednoduchý model trojúrovňovej sústavy je na obr. 1.

Koordinačnú činnosť zaobstarávajú tu vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ a skaláre u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}. Naproti tomu informačná sieť je tvorená vektormi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ a skalármi x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}. Sústava tretej úrovne S koordinuje činnosť podsústav S_1 a S_2. Podsústava S_1 koordinuje činnosť podsústav S_{11}, S_{12} a S_2 podsústav S_{21}, S_{22} na prvej úrovni. Sieť informačnej činnosti, ako vidieť z obrázku, má spätný charakter. Podsústavy S_{ij} $(i, j = 1, 2)$ prvej úrovne po dosiahnutí lokálnych cieľov informujú o svojom stave podsústavy S_1, S_2 druhej úrovne. Po obdržaní lokálnych cieľov na druhej úrovni informujú podsústavy S_1, S_2 sústavu S na najvyššej tretej úrovni o svojom stave. Sústava S na základe týchto informácií prijíma určité rozhodnutie. Ak toto rozhodnutie vyhovuje globálnemu cieľu riadenia, vydáva informáciu $\boldsymbol{x}$. V opačnom prípade prevádza koordináciu podsústav S_1, S_2 za účelom jeho dosiahnutia a tie zase koordinujú podsústavy S_{ij} $(i = 1, 2)$ na prvej úrovni. Koordinačný a informačný okruh pôsobí až do úplného dosiahnutia cieľa riadenia. Vektor $\boldsymbol{u}$ reprezenzuje koordinačnú činnosť pri zmene požiadaviek na celú rozsiahlu sústavu. Podobných schém je celá rada. Vyplývajú buď z konkrétnej dekompozície, alebo agregácie mnohoúrovňovej sústavy, alebo z požiadaviek na optimálnu štruktúru hierarchického riadenia [2]. Metódy agregácie mnohoúrovňových sústav sú zatiaľ len veľmi málo rozpracované. Zvlášť metódy optimálnej agregácie, t.j. vytváranie optimálnych štruktúr mnohoúrovňových sústav sú skôr len nadhodeným problémom, ale praktických výsledkov tuná ešte niet. Bezpochyby však budúcnosť bude patriť práve agregovaniu mnohoúrovňových sústav. Napríklad už dnes je možné načrtnúť rozsiahlu mnohoúrovňovú sústavu, ktorá bude mať na prvej úrovni prvky klasickej regulácie. Na druhej úrovni môže byť prevádzaná optimalizačná činnosť parametrov prvej úrovne. Pretože však rozsiahle sústavy budú spravidla niesť charakter sústav s neúplnými informáciami, môže sa na tretej úrovni použiť učiacich sa, samoučiacich sa a adaptívnych prvkov riadenia. Štvrtá úroveň môže pri premenlivej štruktúre rozsiahlej sústavy nahrádzať evolučné prvky riadenia atď. Vidíme, že v tomto smere čaká teóriu perná práca, obzvlášť, keď pre poslednú úroveň načrtnutej sústavy máme zatiaľ len hmlisté predstavy. Z doposiaľ uvedeného vidíme, že agregácia má perspektívy pri konštrukcii nových riadiacich sústav a komplexov. Naproti tomu dekompozícia nám umožňuje analýzu už pri daných sústavách, ktoré existujú. Dekompozícia nám môže pomôcť nielen pri decentralizovanom riadení, ale mnohokrát aj u sústav, ktoré čo do množstva parametrov vôbec nemôžeme nazvať rozsiahlymi. Totiž dekompozícia sa môže s úspechom použiť v niektorých sústavách, kde napr. doposiaľ známe optimalizačné metódy nám dávajú príliš dlhý výpočtový čas. Sú neefektívne. Naproti tomu niektoré úlohy priamo, či už nepriamo, nesú charakter mnohoúrovňových sústav i keď doposiaľ boli riešené centrálne, t.j. ako jednoúrovňová sústava. V mnohých prípadoch prechod k mnohoúrovňovému riešeniu danej úlohy nám môže priniesť podstatné zjednodušenie operácií výpočtov a mnohokrát aj použitie metód, ktoré by sme pre väčšiu rozmernosť pôvodnej sústavy nemohli vôbec použiť [8]. Tejto problematike budeme ďalej venovať väčšiu pozornosť Najprv si však ozrejmime niektoré problémy dekompozície a s ňou spojenej koordinácie v mnohoúrovňovej sústave.

2.1 Dekompozícia a koordinácia v hierarchickom riadení

Problematikou dekompozície sa prvýkrát zaoberala práca [4]. Bolo to v spojitosti s úlohou lineárneho programovania, kde sa jednalo o úlohu s mnohými parametrami.

Podstata tejto metódy spočíva v tom, že miesto riešenia danej úlohy riešime niekoľko podúloh, čo do rozmeru menších, vzhľadom k pôvodnej úlohe. Postupným riešením týchto podúloh dostávame sa k riešeniu danej pôvodnej úlohy. Ako sme už vyššie uviedli, pri riešení danej úlohy, delenej na jednotlivé podúlohy, využívame modelu hierarchickej mnohoúrovňovej sústavy. Každá podúloha je charakterizovaná podsústavou so svojimi vstupmi a výstupmi na tej-ktorej úrovni hierarchického modelu. Medzi vstupné a výstupné premenné, charakterizujúce danú podsústavu, patrí aj tzv. koordinačná premenná, ktorá obstaráva koordináciu podsústavy vyššou úrovňovou jednotkou. Koordinačná premenná môže mať charakter vnútornej, alebo vonkajšej koordinácie. O vnútornej koordinácii hovoríme vtedy, ak priamo podsústava obsahuje takú premennú, s pomocou ktorej môže vyššia úrovňová jednotka zabezpečovať jej koordináciu. Naproti tomu o vonkajšej koordinácii hovoríme vtedy, ak pre zabezpečenie koordinácie podsústavou vyššou úrovňovou jednotkou musíme takúto premennú explicitne zaviesť. Základným princípom dekompozičnej metódy je princíp dekompozície, ktorý uvedieme v nasledujúcej definícii.

Definícia 1. Hovoríme, že pre sústavu sme našli dekompozíciu, ak po jej prevedení žiadna podsústava danej mnohoúrovňovej sústavy nemá spoločné premenné snáď okrem vnútorných koordinácií, prináležiacich vyššej úrovňovej jednotke.

Princíp dekompozície nám v skutočnosti hovorí, že pôvodnú úlohu musíme rozložiť na jednotlivé podúlohy tak, aby sme každú podúlohu mohli riešiť navzájom, nezávisle v celkovom reťazci hierarchického modelu. Použitie princípu dekompozície samozrejme závisí od typu kritéria optimálnosti a ohraničení na pôvodnú sústavu. Princíp dekompozície sám osebe nám nedáva postup, akým spôsobom dekompozíciu previesť. Dá sa povedať, že doposiaľ ani neexistuje spoločná metóda pri prevádzaní dekompozície. Väčšinou sa postupuje od prípadu k prípadu tak, aby z určitého hľadiska princíp dekompozície bol dodržaný. Treba ešte poznamenať, že podľa výsledku dekompozície môžeme samotnú hierarchickú mnohoúrovňovú sústavu rozdelovať na ekvivalentnú, alebo aproximovanú, vzhľadom k pôvodnej sústave. O ekvivalentnej budeme hovoriť vtedy, ak výsledok hierarchického riadenia je ekvivalentný riadeniu pôvodnej sústavy. V opačnom prípade, ak sa výsledky líšia, hovoríme o aproximovanom modele hierarchického riadenia. V ďalšom sa budeme zaoberať len ekvivalentnými modelmi. Predpokladajme, že máme zložitú sústavu, ktorej kriteriálna funkcia je popísaná nasledovným vzťahom

$$Q = Q(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

a ohraničenia na vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$L(\mathbf{x}) \leqq 0\,. \tag{2.2}$$

Nech úlohou riadenia zložitej sústavy je minimalizácia kritéria (2.1) pri dodržaní podmienok (2.2), t.j.

$$\min_{\mathbf{x} \in L(\mathbf{x})} Q(\mathbf{x}) = Q^*\,. \tag{2.3}$$

Predpokladajme ďalej, že z nejakého dôvodu treba problém (2.3) riešiť ako problém hierarchickej mnohoúrovňovej sústavy. Aby bol princíp dekompozície dodržaný, treba previesť v (2.3) a (2.2) takú transformáciu, že (2.3) môžeme napísať nasledovne

$$\min_{\mathbf{x} \in L(\mathbf{x})} Q(\mathbf{x}) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in L(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \in L_v(\mathbf{x})}} Q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \min_{\substack{\mathbf{x}_i \in L_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \in L_v(\mathbf{x})}} Q\{Q_1(\mathbf{x}_1; \mathbf{v}), Q_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}), \ldots, Q_N(\mathbf{x}_N, \mathbf{v})\} \tag{2.4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)\,,$$

kde Q_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ sú kriteriálne funkcie podsústav prvej úrovne, závislé jedine od patričného vektora $\mathbf{x}_i \in L_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ a koordinačného vektora $\mathbf{v}$ explicitne zavedeného, alebo vydeleného z jednotlivých zložiek vektora $\boldsymbol{x}$. Ak sa nám takáto transformácia v (2.1) a (2.2) podarí urobiť, potom výraz (2.4) môžeme prepísať nasledovne

$$\min_{\boldsymbol{x}\in L(\boldsymbol{x})} Q(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{v}\in L_v(\boldsymbol{x})} Q\{ \min_{\boldsymbol{x}_1\in L_1(\boldsymbol{x})} Q_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}), \min_{\boldsymbol{x}_2\in L_2(\boldsymbol{x})} Q_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}), \ldots, \min_{\boldsymbol{x}_N\in L_N(\boldsymbol{x})} Q_N(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{v})\}\,. \tag{2.5}$$

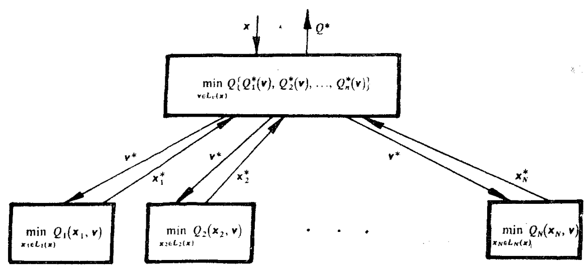
Potom na prvej úrovni dvojúrovňovej hierarchickej sústavy riešime lokálne úlohy typu

$$\min_{\boldsymbol{x}_i\in L_i(\boldsymbol{x})} Q_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}) = Q_i^*(\boldsymbol{v}) \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.6}$$

a na druhej úrovni úlohu

$$\min_{\boldsymbol{v}\in L_v(\boldsymbol{x})} Q\{Q_1^*(\boldsymbol{v}), Q_2^*(\boldsymbol{v}), \ldots, Q_N^*(\boldsymbol{v})\} \tag{2.7}$$

výsledkom ktorej je výpočet premennej $\boldsymbol{v}$, koordinujúcej podsústavy na prvej úrovni. Keby sme podobnú transformáciu použili aj v kriteriálnych funkciach Q_i a ohraničeniach L_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ dostali by sme trojúrovňovú hierarchickú sústavu. Takto by sme v konštrukcii pyramidálnej schémy mohli pokračovať ďalej – samozrejme za predpokladu, že princíp dekompozície by bol dodržaný. Bloková schéma dvojúrovňovej hierarchickej sústavy uvažovaného typu je na obr. 2.



Obr. 2.

V prípade, že jednotlivé ohraničenia $L_i(\boldsymbol{x})$, $L_v(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, alebo kriteriálne funkcie Q_i, Q $(i = 1, 2, \ldots, N)$ nedovolujú nám dosiahnuť riešenie v uzatvorenom tvare, musíme pristúpiť k iteračnému spôsobu riešenia. V tom prípade je postup nasledovný. Druhá úroveň (obr. 2) vydáva počiatočný koordinačný vektor $\boldsymbol{v}^0 \in L_v$. Pre tento vektor prevádzame minimalizáciu lokálnych kritérií na prvej úrovni podľa výrazu (2.6). Po jej prevedení dostávame výsledky $\boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{x}_i^0(\boldsymbol{v}^0)$, ktoré nám charakterizujú stav jednotlivých podsústav na prvej úrovni. O tomto stave informujeme druhú úroveň (informačné premenné). Po dosadení hodnôt $\boldsymbol{x}_i^0$ do jednotlivých kriteriálnych funkcií $Q_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v})$ na druhej úrovni, stávajú sa tieto závislé jedine na koordinačnom vektore $\mathbf{v}$. Platí potom

$$Q_i(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{v}) = Q_i^*(\mathbf{v}) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.8}$$

Ak pre koordinačnú premennú $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ nadobúda výraz (2.7) svojho minima, koordinačná činnosť druhej úrovne prestáva, pretože platí (2.3). V prípade, že výraz (2.7) nenadobúda minimálnej hodnoty pri $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$, vydáva druhá úroveň ďalší koordinačný vektor $\mathbf{v}^1 \in L_v$, smerujúci k zlepšeniu situácie na druhej úrovni. Pre tento vektor opäť prevedieme minimalizáciu lokálnych kritérií Q_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ na prvej úrovni a o výsledku znovu informujeme druhú úroveň. Tento postup sa opakuje až do úplného dosiahnutia cieľa riadenia, t.j. až do dosiahnutia výrazu (2.3).

O úlohe (2.3) sme doposiaľ nehovorili, či má charakter statickej alebo dynamickej optimalizácie. Záleží to v podstate na tom, či zložky vektora $\mathbf{x}$ sú, alebo nie sú funkciami času. V prípade, že zložky vektora $\mathbf{x}$ nie sú funkciami času, jedná s o statickú hierarchickú optimalizáciu. V opačnom prípade riešime dynamickú optimalizáciu dvojúrovňovej hierarchickej sústavy. Stačí napríklad, keď uvažujeme, že

$$Q(\mathbf{x}) = \int_0^T F(\mathbf{x})\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.9}$$

kde

$$F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \psi_j(\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

a

$$\psi_j = \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} - \varphi_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.11}$$

V tomto prípade nám rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} = \varphi_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.12}$$

reprezentujú popis riadenej sústavy a λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ známe Lagrangeove multiplikátory, ktoré z hľadiska hierarchického mnohoúrovňového riadenia vystupujú ako vonkajšie koordinačné premenné, zavedené pre koordináciu podsústav na prvej úrovni. Samozrejme aj v tomto prípade musí platiť princíp dekompozície a naviac musíme dokázať existenciu Lagrangeových multiplikátorov [5]. V ďalšej časti sa budeme zaoberať určitým druhom dynamických sústav, ktoré apriori so svojím kritériom dovoľujú modelovanie hierarchického viacúrovňového riadenia.

3. HIERARCHICKÉ RIADENIE URČITÉHO DRUHU DYNAMICKÝCH SÚSTAV

Predpokladajme, že máme neriadenú sústavu popísanú nasledujúcim obecne nelineárnym diferenciálnym systémom

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.1}$$

Predpokladajme ďalej, že riešenie systému (3.1) existuje a platí preň

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.2}$$

Predpokladajme nakoniec, že procesy prebiehajúce v neriadenej sústave popísané systémom (3.1) nám z určitého dôvodu nevyhovujú. Zavádzame preto riadenie týchto procesov. Nech z hľadiska vydelenia zdrojov stratégií pre jednotlivé stratégie riadenej sústavy nám nevyhovuje obyčajné jednoúrovňové riadenie. Tento prípad môže nastať napr. vtedy, keď jednotlivé zdroje jednoúrovňového riadenia nechceme predimenzovať a zbytok zdrojov si nechávame pre riadenie a koordinačnú činnosť na druhej úrovni. Príčin zavedenia dvojúrovňového riadenia môže však byť viac. Zvoľme si nasledovný popis riadenej sústavy

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] + b_i u_i(t) + c_i\, u(t)\,, \tag{3.3}$$

$$x_i(t_0) = x_i(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

kde vektor

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n, u) \tag{3.4}$$

je $n + 1$ rozmerným vektorom, reprezentujúcim prípustné stratégie sústavy (3.3) s nasledovným ohraničením

$$L(\boldsymbol{u}) = \{|u_i| \leqq A_i, |u| \leqq A_{n+1}; i = 1, 2, \ldots, n\}\,. \tag{3.5}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sú kladné konštanty, ohraničujúce možnosti toho-ktorého zdroja stratégií. Prípustná oblasť $L(\boldsymbol{u})$ môže byť samozrejme zvolená aj ináč. Vidíme, že v prípade rovnice (3.3) pristupujeme k problému riadenia z hľadiska agregácie, t.j. vytvorenia sústavy určitej štruktúry. K ekvivalentnému popisu sústavy však môžeme dôjsť aj opačným spôsobom. Stačí predpoklad, že popis nejakej sústavy implicitne obsahuje štruktúru (3.3) a prípustná oblasť stratégií (3.5). Definujme si teraz úlohu riadenia.

Definícia 2. Budeme hovoriť, že procesy, prebiehajúce v riadenej sústave sú optimálne, ak v každom časovom okamžiku $t \geqq 0$ výstupné veličiny riadenej sústavy

$x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vyhovujú systému (3.3) pri počiatočných podmienkach $x_i(0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a kritériu optimálnosti

$$D^*(t) = \min_{u} \sum_{i=1}^{n} [x_i(t)]^2 \tag{3.6}$$

za predpokladu, že stratégia $\boldsymbol{u}$ je z dovolenej oblasti (3.5) a n je rád riadenej sústavy.

Podobnou definíciou úloh riadenia sme sa zaoberali aj v prácach [6], [7]. Ukázalo sa, že kritérium (3.6) v spojitosti s riadenou sústavou o štruktúre (3.3) má určité výhody z hľadiska konštrukcie výpočtových algoritmov stratégií $\boldsymbol{u}$ a zároveň znižuje dobu riešenia na číslicových počítačoch. V závere práce [7] bola prevedená konfrontácia dĺžky doby riešenia na číslicovom počítači úlohy podobného charakteru metódou dynamického programovania princípom maxima a za pomoci algoritmov, vyplývajúcich z úlohy (3.6). Výsledky hovoria v prospech týchto algoritmov.

Preveďme diferenciálny systém (3.3), popisujúci riadenú sústavu, na diferenčný, t.j. na tvar

$$\begin{gathered} x_{i,N+1} = H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_i u_{i,N} + \Delta c_i u_N\,, \\ x_{i,0} = x_i(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\, N = 0, 1, 2, \ldots)\,, \end{gathered} \tag{3.7}$$

kde

$$\begin{gathered} H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) = x_{i,N} + \Delta \varphi_i(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\, N = 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{3.8}$$

a miesto každého okamžiku $t \geqq 0$ uvažujeme len hodnoty

$$t_N = N\Delta \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{3.9}$$

kde Δ je malé kladné číslo, predstavujúce prírastok času pri prechode riadenej sústavy zo stavu $x_{i,N}$ do stavu $x_{i,N+1}$. Potom kritérium optimálnosti (3.6) prechádza do tvaru

$$D^*_{N+1} = \min_{u_N} \sum_{i=1}^{N} [x_{i,N+1}]^2 \quad (N = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.10}$$

a výraz (3.5) bude nasledovný

$$L(\boldsymbol{u}_N) = \{|u_{i,N}| \leqq A_i,\, |u_N| \leqq A_{n+1};\, i = 1, 2, \ldots, n;\, N = 0, 1, 2, \ldots\}\,. \tag{3.11}$$

Za predpokladu, že $\boldsymbol{u}_N^*$ je optimálna stratégia riadenej sústavy, vyhovujúca kritériu (3.10) a obmedzeniam (3.11) pre $N = 0, 1, 2, \ldots$, potom jednotlivé body fázovej trajektórie, riadenej sústavy dostaneme nasledovne

$$\begin{gathered} x^*_{i,N+1} = H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_i u^*_{i,N} + \Delta c_i u^*_N \\ (x^*_{i,0} = x_{i,0};\, i = 1, 2, \ldots, n;\, N = 0, 1, 2, \ldots)\,. \end{gathered} \tag{3.12}$$

 Zostáva nám len nájsť stratégiu u_N^*, $(N = 0, 1, 2, \ldots)$. Dosaďme výraz (3.7) do výrazu (3.10), dostávame

$$(3.13) \qquad D_{N+1}^* = \min_{u_N} \sum_{i=1}^{n} [H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_i u_{i,N} + \Delta c_i u_N]^2$$

$$(N = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nech z hľadiska výpočtu minima funkcie D_{N+1} nám $N = 0, 1, 2, \ldots,$ predstavuje N-tú výpočtovú etapu. Potom z výrazu (3.13) je zrejmé, že voľba optimálnej stratégie u_N^* na N-tej etape závisí jedine od stavu sústavy na N-tej etape a od ohraničení (3.11). Ďalej vidíme, že na N-tej etape každý člen sumy vo výraze (3.13) závisí len od jednej premennej $u_{i,N}$ a od premennej u_N. Princíp dekompozície bude obdržený, ak výraz (3.13) prepíšeme nasledovne

$$(3.14) \quad D_{N+1}^* = \min_{u_N} \{ \sum_{i=1}^{n} \min_{u_{i,N}} [H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_i u_{i,N} + \Delta c_i u_N]^2 \}$$

$$(N = 0, 1, 2, \ldots).$$

Z výrazu (3.14) vidíme, že každý člen sumy má na N-tej etape jedinú bezprostrednú premennú $u_{i,N}$, ktorú môžeme nazvať stratégiou i-tej podsústavy na prvej úrovni. Premenná u_N v i-tom člene sumy reprezentuje vnútornú koordináciu podsústav prvej úrovne a volí sa bezprostredne na druhej úrovni riadenia.

Zaveďme si nasledovné označenie

$$(3.15) \qquad D_{N+1}^i(u_{i,N}, u_N) = [H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_i u_{i,N} + \Delta c_i u_N]^2$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; N = 0, 1, 2, \ldots).$$

Potom výraz (3.14) môžeme napísať nasledovne

$$(3.16) \qquad D_{N+1}^* = \min_{u_N} \{ \sum_{i=1}^{n} \min_{u_{i,N}} D_{N+1}^i(u_{i,N}, u_N) \}$$

$$(N = 0, 1, 2, \ldots).$$

Výpočet výrazu (3.16) prevádzame cyklicky na oboch úrovniach. Na prvej úrovni prevádzame výpočet výrazu

$$(3.17) \qquad D_{N+1}^i[u_{i,N}^M, u_N^M] = \min_{u_{i,N}} D_{N+1}^i[u_{i,N}, u_N^M]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; M = 0, 1, 2, \ldots; N = 0, 1, 2, \ldots),$$

kde $u_0^0 = 0$, $u_N^0 = u_{N-1}^*$, $u_{N*+1}^0 = 0$.

Znamená to, že výraz (3.17) minimalizujeme pri určitej známej hodnote koordinačnej premennej u_N, ktorá má na M-tom cykle N-tej etapy hodnotu u_N^M. Z výrazu

(3.17) vidíme, že na M-tom cykle pre hodnotu koordinačnej premennej $u_N = u_N^M$
optimálnou stratégiou N-tej etapy, M-tého cyklu je stratégia $u_{i,N} = u_{i,N}^M(u_N^M)$, ($i = 1, 2, \ldots, n$). Po výpočte stratégie $u_{i,N}^M$ na prvej úrovni prevádzame výpočet na druhej úrovni, aby sme získali ďalšiu koordináciu pre cyklus $M + 1$-ný na N-tej etape. Na druhej úrovni riešime úlohu

$$\min_{u_N} D_{N+1}[u_{1,N}^M, u_{2,N}^M, \ldots, u_{n,N}^M, u_N] \quad (M = 0, 1, 2, \ldots; N = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{3.18}$$

kde

$$D_{N+1}[u_{1,N}^M, u_{2,N}^M, \ldots, u_{n,N}^M, u_N] = \sum_{i=1}^{n} D_{N+1}^i[u_{i,N}^M, u_N]\,. \tag{3.19}$$

Nech výraz (3.18) nadobúda minimálnej hodnoty v bode

$$u_N^{M+1} = u_N^{M+1}(u_{1,N}^M, u_{2,N}^M, \ldots, u_{n,N}^M) \quad (M = 0, 1, 2, \ldots; N = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.20}$$

Hodnota premennej (3.20) na N-tej etape nám dáva novú koordinačnú premennú cyklu $M + 1$-ho, ktorou koordinuje druhá úroveň prvú a na základe ktorej môžeme vypočítať stratégiu $u_{i,N}^{M+1}$ z výrazu (3.17). Cyklický proces N-tej etapy sa opakuje dovtedy, až pre niektoré $M = M^*$ platí

$$|u_N^M - u_N^{M-1}| \leqq \varepsilon_1 \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{3.21}$$

kde ε_1 je malé kladné číslo. Potom platí

$$u_N^M = u_N^* \quad (N = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.22a}$$

$$u_{i,N}^M = u_{i,N}^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ M = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{3.22b}$$

kde $u_{i,N}^*$ je optimálna stratégia i-tej podsústavy N-tej etapy a u_N^* optimálna koordinácia, dosiahnutá na konci pracovného cyklu N-tej etapy. Hodnoty (3.22) dosadíme do výrazu (3.12) a vypočítame $x_{i,N+1}^*$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) čím sa dostávame na $N + 1$-vú etapu. Tieto hodnoty x_i^* – charakterizujúce stav sústavy na $N + 1$ etape dosadzujeme za premenné x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) do výrazu (3.15) v dôsledku čoho dostávame výraz $D_{N+2}^i(u_{i,N+1}, u_{N+1})$, ($i = 1, 2, \ldots, n$). Postup na $N + 1$ etape a ďalších opakujeme podobne, ako na N-tej etape. Výpočet končíme, ak na niektorej etape $N = N^*$ platí $D_{N^*+1}^* = 0$. Potom platí $x_{i,N^*+1}^* = 0$, ($i = 1, 2, \ldots, n$). Pri prechode na $N^* + 1$-vú etapu nám vydá druhá úroveň hodnotu koordinačnej premennej $u_{N^*+1}^0 = 0$. Pretože výraz (3.8) nadobúda v tomto prípade nulovú hodnotu, potom aj jednotlivé stratégie u_{i,N^*+1}^*, ktoré by sme obdržali z výrazu (3.17), by boli nulové. Znamená to, že pre $N \geqq N^* + 1$ zastupujúci bod fázovej trajektórie riadenej sústavy má hodnotu $x_{i,N}^* \equiv 0$ a premenné $u_N^* = u_{i,0}^* \equiv 0$. Procesy v sústave sa ustália. Praktický výpočet ukončíme, ak pre niektoré $N = N^*$ platí

$$D_{N^*+1}^* \leqq \varepsilon_2\,, \tag{3.23}$$

kde ε_2 je malé kladné číslo, volené z hľadiska presnosti výpočtov.

Ako sme už spomenuli vyššie, jednou z výhod, ktorú nám poskytuje definícia úlohy riadenia, t.j. definícia 2, je jednoduchý výpočet stratégií $u_{i,N}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $N = 0, 1, 2, \ldots$) a koordinačných premenných u_N ($N = 0, 1, 2, \ldots$), ktoré obdržíme pomocou nasledovných algoritmov odvodených z výrazov (3.17) a (3.18).

Na prvej úrovni dvojúrovňovej hierarchickej sústavy na M-tom cykle N-tej etapy výraz (3.17) nadobúda extrému pri hodnotách stratégií

$$u_{i,N}^M = \begin{cases} A_i & \text{ak} \quad u_{i,N} > A_i\,, \\ u_{i,N}^M & \text{ak} \quad -A_i \leqq u_{i,N} \leqq A_i\,, \\ -A_i & \text{ak} \quad u_{i,N} < -A_i \end{cases} \tag{3.24}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ M = 0, 1, 2, \ldots;\ N = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

kde

$$u_{i,N}^M = -\frac{1}{\Delta b_i}\left[H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta c_i u_N^M\right] \tag{3.25}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ M = 0, 1, 2, \ldots;\ N = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Na druhej úrovni hodnoty koordinačných premenných (3.20) minimalizujúce výraz (3.18) na $M + 1$-vom cykle N-tej etapy dostávame z nasledovného algoritmu

$$u_N^{M+1} = \begin{cases} A_{n+1} & \text{ak} \quad u_N^{M+1} > A_{n+1}\,, \\ u_N^{M+1} & \text{ak} \quad -A_{n+1} \leqq u_N^{M+1} \leqq A_{n+1}\,, \\ -A_{n+1} & \text{ak} \quad u_N^{M+1} < -A_{n+1} \end{cases} \tag{3.26}$$

$$(M = 0, 1, 2, \ldots;\ N = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

kde

$$u_N^{M+1} = -\frac{1}{\Delta \sum_{i=1}^{n} c_i^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\left[H_{i,N}(x_{1,N}, x_{2,N}, \ldots, x_{n,N}) + \Delta b_i u_{i,N}^M\right]\right\} \tag{3.27}$$

$$(M = 0, 1, 2, \ldots;\ N = 0, 1, 2, \ldots)$$

a

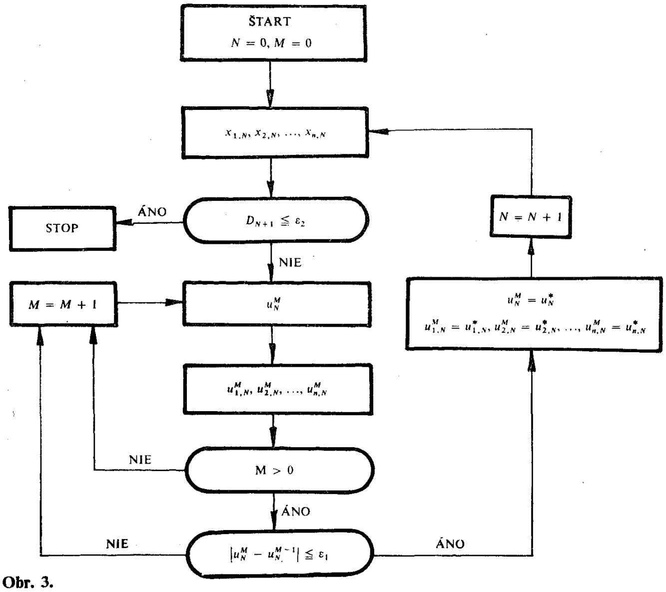
$$u_0^0 = 0\,, \quad u_N^0 = u_{N-1}^*\,, \quad u_{N^*+1}^0 = 0\,. \tag{3.28}$$

Sled jednotlivých operácií je znázornený v zjednodušenej blokovej schéme obr. 3.

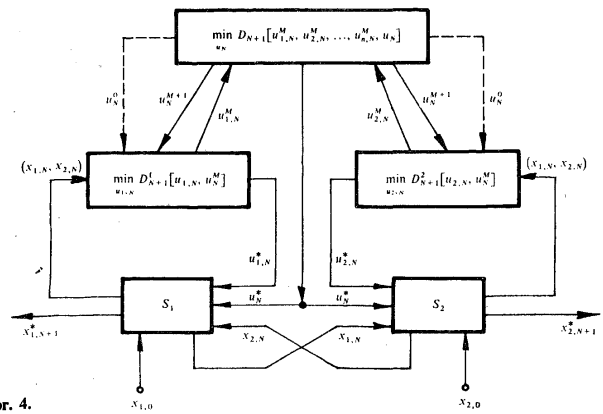
Algoritmy dvojúrovňového hierarchického riadenia boli overené na jednoduchej sústave, popísanej nasledovným systémom

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j(t) + b_i u_i(t) + c_i u(t)\,, \tag{3.29}$$

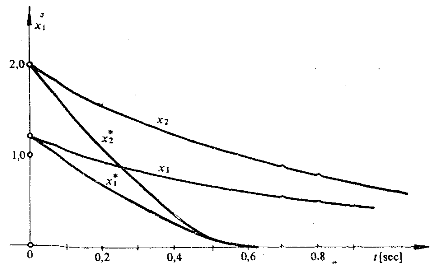
$$x_1(0) = 1{,}2\,; \quad x_2(0) = 2\,,$$



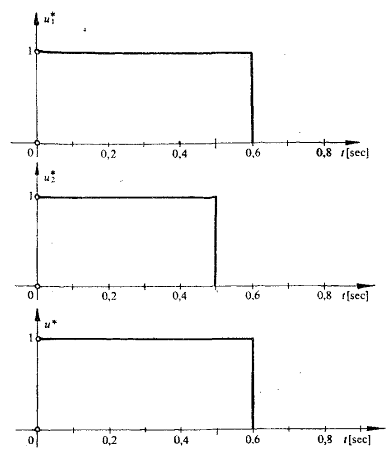
Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

kde

(3.30)
$$a_{11} = 0{,}5, \quad a_{12} = -1{,}0, \quad b_1 = -0{,}9, \quad c_1 = c_2 = -0{,}5$$
$$a_{12} = 3{,}75, \quad a_{22} = -3{,}5, \quad b_2 = -2{,}0, \quad \Delta = 0{,}1 \,.$$

Konštanty, ohraničujúce zdroje stratégií u_i $(i = 1, 2)$ a koordinačnej premennej u boli

(3.31)
$$A_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \,.$$

Dvojúrovňová bloková schéma hierarchického riadenia sústavy (3.29) je na obr. 4. Na obr. 5 sú vynesené časové závislosti výstupov riadenej sústavy (x_1^*, x_2^*) a výstupy neriadenej sústavy (x_1, x_2), t.j. výstupy sústavy (3.29) pri $b_i = c_i = 0$, $(i = 1, 2)$. Na obr. 6 sú znázornené časové závislosti optimálnych stratégií u_1^*, u_2^* a koordinačnej premennej u^*.

4. ZÁVER

V predkladanej práci snažili sme sa stručne charakterizovať problematiku hierarchického riadenia mnohoúrovňových sústav. Snažili sme sa objasniť niektoré základné pojmy, ktorých teória rozsiahlych sústav používa. Samozrejme teória rozsiahlych sústav nemá ešte doposiaľ jednotnú koncepciu. V súčasnosti existujú dva základné smery v tejto teórii. Prvým z nich je metóda dekompozície používaná viac-menej u sústav, ktoré už existujú a v ktorých sa snažíme zaviesť hierarchické riadenie mnohoúrovňové, rozdelením globálnej úlohy na jednotlivé lokálne úlohy čo do rozmeru menšie než pôvodná úloha. Takýmto spôsobom dostávame hierarchickú mnohoúrovňovú štruktúru riadenej sústavy, ktorá môže byť z hľadiska výsledku jej činnosti buď ekvivalentným, alebo aproximovaným modelom pôvodnej rozsiahlej sústavy. V prvom prípade výsledky riadenia pôvodnej sústavy a jej hierarchického modelu sú ekvivalentné. V druhom prípade model hierarchickej mnohoúrovňovej sústavy len aproximuje činnosť a súčasne aj výsledok riadenia pôvodnej rozsiahlej sústavy. V tomto prípade presnosť aproximácie bude závislá od určitého druhu adaptačnej schopnosti hierarchického modelu zabezpečiť maximálne výsledky aproximujúce výsledok pôvodnej sústavy. Druhým smerom v teórii rozsiahlych sústav je agregácia hierarchickej štruktúry. V skutočnosti ide tu o vytvorenie takej mnohoúrovňovej hierarchickej štruktúry, ktorá by zodpovedala daným požiadavkám, kladeným na budúcu rozsiahlu sústavu. Podsústavy jednotlivých úrovní tu tvoria sústavy známej štruktúry a vlastnosti so známymi lokálnymi cieľmi. Táto koncepcia má zrejme veľkú budúcnosť pri vytváraní väčších a veľkých celkov riadenia. V práci sme uviedli hierarchické riadenie určitého druhu dynamických sústav. Na základe definície cieľa riadenia boli odvodené algoritmy výpočtu stratégií podsústav a koordinačnej premennej, koordinujúcej činnosť podsústav prvej úrovne. Efektivita výpočtov v danom prípade bude vzrastať ak vzrastie celkový počet stratégií podsústav nižšej úrovne vzhľadom k celkovému počtu koordinácií a zároveň keď vzrastie počet podsústav danej hierarchickej štruktúry. Je zrejmé, že nie je ťažké vytvoriť hierarchický model s podobnou štruktúrou s väčším počtom úrovní. Na základe princípu dekompozície transformuje sa nám výpočet extrému pôvodnej funkcie (funkcionálu) mnohých premenných na výpočet extrémov konečného počtu funkcií (funkcionálov) s počtom premenných omnoho menším, ako v prípade pôvodnej úlohy. Interpretácia riadených sústav typu (3.3) bola uvedená v prácach [6], [7].

(Došlo dňa 14. júla 1969.)

LITERATÚRA

[1] Mesarovic M. D., Lefkowitz L., Pearson J.: Advances in multilevel control. IFAC Tokyo Symposium on System Engineering, Tokyo 1965.
[2] Kulikowski R.: Optimum control of aggregated multi-level system. Proc. III IFAC Congr. London 1966.
[3] Straszak A.: Algorytmy sterowania w wielkich systemach. Problemy sterowania wielkimi systemami. Warszawa 1964.
[4] Dantzig G. B.: Linear programming and extensions. Princeton University Press. Princeton, New Yersey 1963.
[5] Pearson J.: Duality and a decomposition technique. J. Siam Control *4* (1966), 1.
[6] Uličný J.: O jednom type kritéria optimálnosti v dynamickej optimalizácii riadených sústav. Automatizace (1967), 2.
[7] Uličný J.: Dynamická optimalizácia riadenej mnohoparametrickej sústavy s ohraničením na riadiace aj riadené veličiny. Kybernetika *4* (1968), 1, 41—62.
[8] Uličný J.: Problémy výpočtu minima určitého typu integrálneho funkcionála metódou dynamického programovania. Strojnícky časopis (1968), 1.

SUMMARY

Decomposition, Coordination and Agregation in the Hierarchic Control of Multi-Level Systems

JÁN ULIČNÝ

In the paper the author briefly outlines the problems of hierarchic control in multi-level systems. The model of a dynamic system is introduced which, from the view-point of hierarchic control, features as a multi-level system.

Ing. Ján Uličný CSc., Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava.