KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 5/1969

Syntéza regulačních systémů prvního typu

PANE VIDINČEV

Článek pojednává o problematice syntézy spojitých regulačních systémů. Novým momentem při syntéze je tu apriorní konstrukce oblastí stability v uzavřené smyčce, která přináší podstatné výhody pro numerické řešení a je nezávislá na volbě kritéria. V článku je tento postup ilustrován na případu syntézy soustavy pátého řádu s regulátorem PID, přičemž jako kritéria je užito integrálu kvadrátu odchylky.

ÚVOD

V autorově práci [3] byla podrobně zpracována syntéza regulovaných soustav řádu $n \leqq 5$. V tomto článku pojednáme jen o nejsložitějším uvažovaném případě soustavy řádu $n = 5$, která je regulována regulátorem PID.

Úvodem několik slov k používaným pojmům. Pojmem *soustava prvního typu* nazýváme onu regulovanou soustavu, jejíž dynamiku je možno popsat přenosem

$$S(p) = \frac{b_0}{1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p^\nu}. \tag{A}$$

Obdobně definujeme i *soustavu druhého typu*, kterou lze popsat přenosem

$$S(p) = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu p^\mu}{1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p^\nu}, \quad 0 < m < n, \; b_m \neq 0. \tag{B}$$

Je-li soustava prvního typu regulována některými z regulátorů P, I, PI, ID a PID – pak takový uzavřený systém nazýváme *regulační systém prvního typu*; podobně definujeme i *regulační systém druhého typu* v případě soustavy druhého typu.

Je evidentní, že regulační systémy druhého typu z hlediska dynamiky jsou složitější než regulační systémy prvního typu; lze očekávat, že tato složitost se projeví i při syntéze těchto systémů.

O soustavě (A) předpokládáme, že je stabilní, tj. předpokládáme, že polynom

$$a(p) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p^\nu \tag{C}$$

je Hurwitzův polynom (dále jen H-polynom).

Pokud jde o strukturu regulátoru, kterým je soustava (A) regulována: předpokládáme, že tato struktura je předem dána a že jde výlučně o regulátory typu P, I, PI, ID nebo PID. Pro usnadnění práce zavádíme následující označení

$$x = 1 + b_0 r_0\,, \tag{a}$$

$$y = b_0 r_{-1}\,, \tag{b}$$

$$z = a_1 + b_0 r_1\,, \tag{c}$$

kde r_0, r_{-1} a r_1 je postupně koeficient proporcionální, integrační a derivační složky příslušného regulátoru $R(p)$, kterým je regulována soustava (A).

Aby soustava $S(p)$ byla regulovatelná regulátorem $R(p)$, uzavřený systém musí být stabilní, neboť nestabilní systém je samozřejmě bezcenný. Při syntéze systémů je tedy řešení problému stability primární a nezbytné.

Při řešení problému stability jde o určení oblasti, ve které se musí nacházet funkční parametry příslušného regulátoru. Tuto oblast nazýváme *oblast stability* a značíme ji σ.

Oblasti σ určujeme z prostého požadavku, aby charakteristický polynom uzavřeného systému byl H-polynomem. Potřebné vztahy pro vyjádření hranic oblastí σ určujeme Routhovou-Schurovou redukcí (dále jen redukce).

I. KONSTRUKCE OBLASTÍ STABILITY

Analytické určení oblastí σ není samoúčelné; znalost těchto oblastí je základním předpokladem pro syntézu, nezávisle na tom, podle jakého kritéria se tato syntéza provádí – v těchto oblastech se totiž nacházejí parametry regulátorů, a algoritmy pro určení těchto parametrů by byly bezcenné bez znalosti analytického vyjádření oblastí σ. Snad ještě důležitější je znalost oblastí σ v oněch případech, kdy z nějakého důvodu musíme syntézu provést zkusmo nebo experimentálně: prostě musíme vědět, kde se nacházejí optimální parametry regulátoru, abychom je nehledali tam, kde ani nemohou být.

Znalost oblastí σ umožňuje vypracovat takové algoritmy a postupy, kterými je možno určit optimální parametry regulátorů i v těch případech, kdy řešení není možno udat v přímé explicitní formě.

I v případech, kdy řešení je možno udat v přímé explicitní formě, znalost oblastí σ je nezbytná a to proto, že může existovat několik řešení a je zapotřebí s jistotou určit, které z nich leží v příslušné oblasti σ.

Zde určíme oblast σ u nejsložitějšího uvažovaného případu, tj. případu soustavy pátého řádu

$$S(p) = b_0/(a_5p^5 + a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1)\,, \tag{1}$$

která je regulována regulátorem

$$R(p) = r_0 + r_1p + \frac{r_{-1}}{p}\,. \tag{2}$$

Podle předpokladu — soustava (1) je stabilní, tj. její koeficienty vyhovují vztahům

$$a_\nu > 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 5\,, \tag{3}$$

$$a_1a_4 - a_5 > 0\,, \tag{4}$$

$$a_3a_4 - a_2a_5 > 0\,, \tag{5}$$

$$a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_1a_4 - a_5) > 0, \tag{6}$$

$$(a_1a_4 - a_5)\left[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_1a_4 - a_5)\right] - (a_3a_4 - a_2a_5)^2 > 0\,, \tag{7}$$

které lze získat redukcí charakteristického polynomu soustavy (1).

Kromě vztahů (3)–(7), kterými jsou vázány koeficienty stabilní soustavy (1), existují i jiné vztahy mezi těmito koeficienty. Protože i tyto vztahy budeme v dalším potřebovat, uvedeme je hned na počátku, abychom se mohli na ně později podle potřeby odvolávat. Jde o následující dva vztahy

$$a_2^2 - 4a_4 > 0\,, \tag{8}$$

$$a_3^2 - 4a_1a_5 > 0\,, \tag{9}$$

které lze získat použitím Michailovova kritéria.

Vztahy (3)–(9) jsou potřebné k důkazům některých tvrzení.

Nechť nyní soustava (1) je regulována regulátorem (2). Charakteristický polynom uzavřeného systému bude

$$A(p) = a_5p^6 + a_4p^5 + a_3p^4 + a_2p^3 + zp^3 + xp + y\,, \tag{10}$$

kde parametry x, y a z jsou dány vztahy (a), (b) a (c). Protože platí (3), nutné podmínky pro to, aby polynom (10) byl H-polynomem, jsou

$$x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad z > 0\,. \tag{11}$$

 Redukcí polynomu (10) určíme zbývající podmínky:

$$a_4 z - a_5 x > 0\,, \tag{12}$$

$$a_2(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4(a_4 z - a_5 x) > 0\,, \tag{13}$$

$$x(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4^2 y > 0\,, \tag{14}$$

$$y > f(x, z)\,, \tag{15}$$

$$g(x, y, z) > 0\,, \tag{16}$$

kde

$$f(x, z) = \{x(a_3 a_4 - a_2 a_5)^2 - (a_4 z - a_5 x)\,[a_2(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4(a_4 z - a_5 x)]\}/a_4^2(a_3 a_4 - a_2 a_5)\,, \tag{17}$$

$$g(x, y, z) = [x(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4^2 y]\,\{(a_4 z - a_5 x)\,[a_2(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4(a_4 z - a_5 x)] - (a_3 a_4 - a_2 a_5)\,[x(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4^2 y]\} - a_4[a_2(a_3 a_4 - a_2 a_5) - a_4(a_4 z - a_5 x)]^2\, y\,, \tag{18}$$

Ona x, y a z, která vyhovují současně všem podmínkám (11)–(16), tvoří hledanou oblast σ.

Prostorovou oblast σ, která je definována nerovnostmi (11)–(16), vyšetříme ve dvou etapách. V první etapě vyšetříme onu oblast, která je definována nerovnostmi (11)–(15); tuto pomocnou oblast označíme K. V druhé etapě vyšetříme nerovnost (16) a určíme průnik oblastí (16) a K, tj. určíme hledanou oblast σ.

Nerovnosti (11) zřejmě definují první oktant; nerovnosti (12)–(15) redukují tento oktant na těleso K, které leží v prvním oktantu, kde je ohraničeno rovinou $y = 0$, rovnoběžnými rovinami

$$z = f_1(x) = a_5 x/a_4\,, \tag{19}$$

$$z = f_2(x) = a_5 x/a_4 + a_2(a_3 a_4 - a_2 a_5)/a_4^2\,, \tag{20}$$

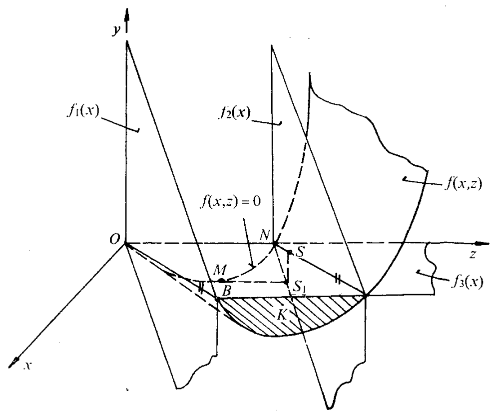
rovinou

$$y = f_3(x) = x(a_3 a_4 - a_2 a_5)/a_4^2 \tag{21}$$

a plochou (17). Těleso K je v řezu znázorněno na obr. 1. Všem nerovnostem (11) až (15) tedy vyhovují jen body, které leží uvnitř tělesa K.

Vyšetříme společné bodové útvary výrazů (17), (19), (20) a (21). Společným bodovým útvarem rovin (19) a (21) je útvar, jehož rovnice v rovině XY je dána výrazem (21); je to tedy průsečnice OB. Společným bodovým útvarem rovin (20) a (21) je průsečnice NS, která je rovnoběžná s průsečnicí OB. Ukážeme, že rovnoběžky OB a NS, které leží v rovině (21), jsou jedinými společnými bodovými útvary roviny (19) s plochou (17) a roviny (20) s plochou (17). Skutečně: dosazením (19) do (17) zjistíme, že společným bodovým útvarem roviny (19) a plochy (17) je útvar, jehož rovnice v rovině XY je totožná s rovnicí (21); dosazením (20) do (17) zjistíme, že společným bodovým útvarem roviny (20) a plochy (17) je útvar, jehož rovnice v rovině XY je totožná s rovnicí (21). Společné bodové útvary roviny (21) a plochy (17) určíme, dosadíme-li za $f(x, z)$ v (17) pravou stranu výrazu (21), tedy

$$x(a_3a_4 - a_2a_5)/a_4^2 = \{x(a_3a_4 - a_2a_5)^2 - (a_4z - a_5x)\left[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - \right.$$
$$\left. - a_4(a_4z - a_5x)\right]\}/a_4^2(a_3a_4 - a_2a_5)\,,$$



Obr. 1.

odkud dostáváme

$$(22) \qquad (a_4z - a_5x)\left[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)\right] = 0\,.$$

Rovnice (22) je rovnocenná následujícím dvěma rovnicím

$$a_4z - a_5x = 0\,, \quad a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x) = 0\,,$$

z nichž první je totožná s rovnicí (19) a druhá je totožná s rovnicí (20). Jsou tedy průsečnice OB a NS společnými bodovými útvary roviny (21) a plochy (17).

Pro další účely budeme potřebovat společný bodový útvar roviny $y = 0$ s plochou (17); tento společný bodový útvar je zřejmě popsán rovnicí $f(x, z) = 0$, tj. rovnicí

$$\{x(a_3a_4 - a_2a_5)^2 - (a_4z - a_5x)\left[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)\right]\}/a_4^2(a_3a_4 -$$
$$- a_2a_5) = 0\,,$$

 odkud po úpravě dostaneme rovnici kuželosečky

(23) $a_4^2z^2 - [2a_4a_5x + a_2(a_3a_4 - a_2a_5)]\, z + [a_3(a_3a_4 - a_2a_5) + a_5^2x]\, x = 0\,.$

Podrobným vyšetřením křivky (23) je možno zjistit, že jde o parabolu v obecné poloze; směrnice osy této paraboly je

$$\operatorname{tg} \alpha = a_5/a_4\,,$$

tedy tato osa je rovnoběžná s přímkami (19) a (20). Parabola (23) prochází body $O(0; 0)$ a $N(0; z_0)$, maximum vzhledem k proměnné z má v bodě $M(x_m, z_m)$, kde

$$z_0 = a_2(a_3a_4 - a_2a_5)/a_4^2\,,$$
$$x_m = a_2^2/4a_4\,,$$
$$z_m = a_2(2a_3a_4 - a_2a_5)/4a_4^2\,.$$

Parabolu (23) můžeme vyjádřit těmito dvěma jednoznačnými funkcemi proměnné x:

(23a) $$\varphi_1(x) = [2a_4a_5x + (a_3a_4 - a_2a_5)\,(a_2 + \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)})]/2a_4^2\,,$$

(23b) $$\varphi_2(x) = [2a_4a_5x + (a_3a_4 - a_2a_5)\,(a_2 - \sqrt{(a_2^2 - 4a_4)})]/2a_4^2\,.$$

Nyní přistoupíme k druhé etapě, vyšetříme nerovnost (16) a určíme průnik oblastí K a (16), tj. určíme hledanou oblast σ. Za tím účelem určíme souřadnice bodu S (viz obr. 1); tento bod je totiž singulárním bodem plochy $g(x, y, u) = 0$; určíme jeho souřadnice už nyní, abychom se na ně později mohli podle potřeby odvolávat.

Maximum paraboly (23) má souřadnici $x = x_s = a_2^2/4a_4$; tato souřadnice je stejná jako souřadnice x bodu S_1, který je průmětem bodu S v rovině XZ. Bod S_1 leží na přímce (20) a proto jeho souřadnice z je $z = z_s = a_4a_5x_s + a_2(a_3a_4 - a_2a_5)$. Hodnota funkce (21) v bodě $S_1(x_s, z_s)$ je $y_s = x_s(a_3a_4 - a_2a_5)/a_4^2$; souřadnice bodu S tedy jsou

(24) $x_s = a_2^2/4a_4\,,\ \ y_s = x_s(a_3a_4 - a_2a_5)/a_4^2\,,\ \ z_s = a_5x_s/a_4 + a_2(a_3a_4 - a_2a_5)/a_4^2\,.$

Dříve než určíme, pro která x, y, a z je výraz (18) pozitivní, vyšetříme plochu

(25) $$g(x, y, z) = 0$$

v prvním oktantu, tj. určíme body nebo bodové útvary, které charakterizují tvar a polohu této plochy v uvedeném oktantu.

Společným bodovým útvarem roviny $y = 0$ a plochy (25) je útvar, jehož rovnice je

$$x(a_3a_4 - a_2a_5)\,\{a_4^2z^2 - [2a_4a_5x + a_2(a_3a_4 - a_2a_5)]\, z + \\ + [a_3(a_3a_4 - a_2a_5) + a_5^2x]\, x\} = 0\,.$$

Je to tedy parabola (23) a rovina $x = 0$, které s rovinou $y = 0$ vytínají úsečku ON; plocha (25) v prvním oktantu tudíž prochází úsečkou ON a parabolou (23).

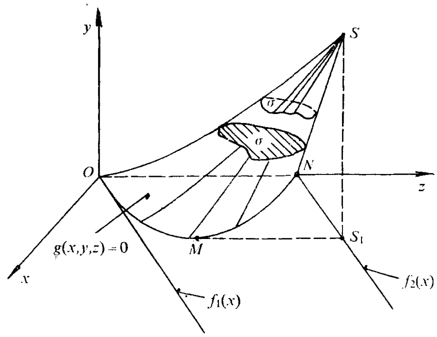
Dalším charakteristickým bodem plochy (25) je bod $S(x_s, y_s, z_s)$, který leží v prvním oktantu. Bod S je singulárním bodem plochy (25), neboť jeho souřadnice (24) vyhovují následující soustavě tří rovnic

$$\text{(26a)} \quad \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} = a_4^2[a_2a_5 - 2(a_3a_4 - a_2a_5)]\, y + 2x(a_3a_4 - a_2a_5)^2 +$$
$$+ (2a_5x - a_4z)\left[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)\right] + a_4a_5x(a_5x - a_4z) = 0\,,$$

$$\text{(26b)} \quad \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} = 2a_4^3y + a_2[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)] -$$
$$-2a_4x(a_3a_4 - a_2a_5) = 0\,,$$

$$\text{(26c)} \quad \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} = x[2a_4(a_4z - a_5x) - a_2(a_3a_4 - a_2a_5)] - a_2a_4^2y = 0\,,$$

jak je možno se přesvědčit dosazením souřadnic (24) bodu S do soustavy rovnic (26a)–(26c); přitom S leží na ploše (25), neboť je $g(x_s, y_s, z_s) = 0$.*



Obr. 2.

Singulární bod S je kónickým bodem, protože pro kterýkoliv bod plochy (25) – a tudíž i pro bod S – je

$$\frac{\partial^2 g(x, y, z)}{\partial y^2} = 2a_4^2 \neq 0\,.$$

Těleso (16) má tedy v prvním oktantu kónický tvar a jeho vrchol leží v bodě S (viz obr. 2), kde je znázorněna hledaná oblast σ, jejíž analytické vyjádření nyní

* I bod $N(0; 0; z_0)$ je singulárním kónickým bodem plochy (25), neboť jeho souřadnice $x = 0$, $y = 0$, $z = a_2(a_3a_4 - a_2a_5)/a_4^2$ vyhovují soustavě rovnic (26a)–(26c).

 uvedeme. Za tím účelem výraz (18) upravíme a přepíšeme ve vhodnějším tvaru

$$g(x, y, z) = -(a_3a_4 - a_2a_5)(D_2y^2 + D_1y + D_0)\,, \tag{27}$$

kde

$$D_2 = a_4^4\,,$$

$$D_1 = a_4\{a_2[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)] - 2a_4x(a_3a_4 - a_2a_5)\}\,,$$

$$D_0 = -x\{(a_4z - a_5x)[a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)] - x(a_3a_4 - a_2a_5)^2\}\,.$$

Protože platí (5), nerovnost (16) můžeme na základě (27) vyjádřit následovně

$$D_2y^2 + D_1y + D_0 < 0\,,$$

nebo v explicitním tvaru

$$f_2(x, z) < y < f_1(x, z)\,, \tag{28}$$

kde

$$\begin{aligned} f_1(x, z) = \{&2a_4x(a_3a_4 - a_2a_5) - [a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - \\ &- a_4(a_4z - a_5x)](a_2 - \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)})\}/2a_4^3\,, \end{aligned} \tag{29a}$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y) = \{&2a_4x(a_3a_4 - a_2a_5) - [a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - \\ &- a_4(a_4z - a_5x)](a_2 + \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)})\}/2a_4^3\,. \end{aligned} \tag{29b}$$

Hledaná oblast σ je nad rovinou XZ dána následujícími vztahy: pro

$$0 < x < a_2^2/4a_4\,, \tag{30a}$$

$$\varphi_2(x) < z \leqq \varphi_1(x)\,, \tag{30b}$$

je

$$0 < y < f_1(x, z) \tag{30c}$$

a pro x vyhovující (30a) při podmínce

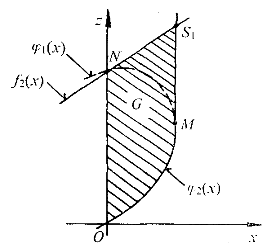
$$\varphi_1(x) < z < f_2(x)\,, \tag{30d}$$

je

$$f_2(x, z) < y < f_1(x, z)\,, \tag{30e}$$

kde funkce $f_2(x)$, $f_1(x, z)$, $f_2(x, z)$ jsou postupně (20), (29a), (29b) a funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou dány vztahy (23). Oblast (30) je zřejmě omezená.

Je třeba ještě ukázat, že plocha (17) a rovina (21) neprocházejí oblastí (30), tj. že těleso (30) leží uvnitř tělesa K. Pro tento účel je znázorněna na obr. 3 rovinná oblast, která je vlastně pravoúhlým průmětem tělesa (30) v rovině XZ; tato rovinná oblast je označena na obr. 3 symbolem G. Napřed ukážeme, že rovina (21) neprochází oblastí (30); uvědomíme-li si, že funkce (21) je pozitivní pro každý bod (x, z) z prvního oktantu – a tudíž i pro každý bod ležící v G – pak stačí ukázat, že v oblasti G je vždy $f_3(x) > f_1(x, z)$ a $f_3(x) > f_2(x, z)$, tj. že v této oblasti jsou rozdíly $f_3(x) - f_1(x, z)$ a $f_3(x) - f_2(x, z)$ vždy kladné.



Obr. 3.

Ze vztahů (29a) a (29b) plyne, že

$$f_1(x, z) - f_2(x, z) = [a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)] \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)}/a_4^3 . \tag{31}$$

Protože v oblasti G platí (13) a (30a), je rozdíl (31) v oblasti G vždy kladný, tj. v této oblasti je vždy $f_1(x, z) > f_2(x, z)$; stačí tedy jen ukázat, že rozdíl $f_3(x) - f_1(x, z)$ je v této oblasti kladný.

Ze vztahů (21) a (29a) plyne, že rozdíl

$$f_3(x) - f_1(x, z) = [a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)] \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)}/2a_4^3 .$$

Uvedený rozdíl je v G vždy kladný ze stejných důvodů jako v případě (31). Rovina (21) tedy neprochází oblastí (30).

Zbývá ještě ukázat, že ani plocha (17) neprochází oblastí (30). Protože v oblasti G je vždy $f_1(x, z) > f_2(x, z)$, stačí jen ukázat, že v této oblasti je rozdíl $f_2(x, z) - f(x, z)$ vždy kladný, čímž se dokáže, že v G je vždy kladný i rozdíl $f_1(x, z) - f(x, z)$.

Ze vztahů (39b) a (17) plyne, že

$$\begin{aligned} f_2(x, z) - f(x, z) &= [a_2(a_3a_4 - a_2a_5) - a_4(a_4z - a_5x)] \times \\ &\times \{2a_4(a_4z - a_5x) - (a_3a_4 - a_2a_5)(a_2 + \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)})\}/2a_4^3(a_3a_4 - a_2a_5) . \end{aligned} \tag{32}$$

Abychom ukázali, že rozdíl (32) je v oblasti G vždy kladný, stačí ukázat, že v této oblasti je kladný výraz, který se nachází v lomené závorce na pravé straně (32); jinými slovy: je třeba ukázat, že celá část křivky

$$2a_4(a_4z - a_5x) - (a_3a_4 - a_2a_5)(a_2 + \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)}) = 0 , \tag{33a}$$

která odpovídá argumentům $x \in (0; a_2^2/4a_4)$, leží v oblasti G. Abychom mohli toto ukázat, zapíšeme křivku (33a) ve tvaru

$$z = [2a_4a_5x + (a_3a_4 - a_2a_5)(a_2 + \sqrt{(a_2^2 - 4a_4x)})]/2a_4^2 . \tag{33b}$$

Výraz na pravé straně (33b) je totožný s výrazem na pravé straně (23a); křivka $\varphi_1(x)$ pro všechna $x \in (0; a_2^2/4a_4)$ ovšem leží v oblasti G. Plocha (17) tedy neprochází oblastí (30).

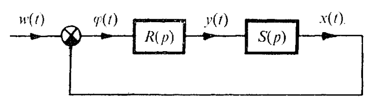
Oblasti σ v případě soustavy (1) např. pro varianty PI a ID analyticky bychom určili jako řezy $z = a_1$ a $x = 1$ tělesa (30); určení analytického tvaru těchto křivek v rámci tohoto článku není možno uvést.

Ve zmíněné práci [3] jsou podrobně analysovány a uvedeny oblasti σ všech variant regulátorů a soustav řádů $n \leqq 5$. Tam jsou také uvedeny programy pro vyčíslování hranic těchto oblastí σ.

Zajímavé je, že všechny oblasti σ pro řády $n = 4$ a $n = 5$ jsou omezené oblasti, kdežto v případech $n \leqq 3$ některé z těchto oblastí σ jsou omezené a některé neomezené.

II. SYNTÉZA

V obecném případě na uzavřený regulační systém působí současně řídicí veličina $w(t)$ a porucha $z(t)$, viz obr. 4. Místo vstupu poruchy $z(t)$ je, obecně vzato, libovolné, tj. porucha $z(t)$ může vstupovat v kterémkoliv místě regulované soustavy $S(p)$. Je ovšem třeba si uvědomit, že nejnepříznivější stav je ten, kdy $z(t)$ působí na vstupu regulované soustavy; v tomto případě totiž – hrubě řečeno – regulátor $R(p)$ dostává nejzkreslenější informaci o tvaru a velikosti poruchy a také odpovídajícím způsobem reaguje na potlačení jejích účinků. Z tohoto důvodu je nejrozumnější provést syntézu (při kompenzaci poruchy) právě pro tento nejnepříznivější případ. Tím bude zaručeno, že účinně budou potlačeny účinky poruchy i tehdy, když tato porucha bude působit na vstupu regulované soustavy.



Obr. 4.

V práci [3] syntéza se provádí tak, že se minimalizují integrály

$$Q_1(x, y, z) = \int_0^\infty \varphi^2(t) \, dt , \tag{34}$$

$$Q_2(x, y, z) = \int_0^\infty \{\varphi^2(t) + [\varphi'(t)]^2\} \, dt . \tag{35}$$

Jelikož jako korekční členy v uzavřeném systému se používají obyčejné regulátory, je důležité si uvědomit, za jakých podmínek konvergují integrály (34) a (35). Konvergence těchto integrálů závisí jednak na dynamice stabilního regulačního systému, jednak na tvaru vstupních signálů $w(t)$ a $z(t)$.

Pro stabilní uzavřený systém uvedené integrály konvergují jen tehdy, jsou-li současně splněny následující tři podmínky:

a) vstupní signály $w(t)$ a $z(t)$ jsou omezené.

b) existují limitní hodnoty $w(\infty)$ a $z(\infty)$,

c) regulátor $R(p)$ má integrační složku.

Platnost těchto tří podmínek jednoduše zaručíme tím, že syntézu budeme provádět jen pro regulátory s integrační složkou a vyloučíme neomezené nebo periodické (netlumené) signály $w(t)$ a $z(t)$; v dalším uvažujeme jen vstupní signály tvaru jednotkového skoku.

Minimalizace integrálů (34) a (35) je analyticky zpracovatelná jen pro regulované soustavy řádu $n \leqq 3$; v těchto případech minima těchto integrálů můžeme určit v explicitní formě.

Pro regulované soustavy řádu $n > 3$ není možno explicitně udat polohu minim uvedených integrálů. Pro regulované soustavy řádů $n = 4$ a $n = 5$ v práci [3] je vypracován postup a programy, kterými je možno určit numerickou hodnotu minim s libovolnou, předem zvolenou přesností; stručně se zmíníme o tomto postupu.

Výsledky prací [1] a [2] umožňují vyjádřit integrály typu (34)–(35) v explicitní formě

$$Q(x, y, z) = \frac{A(x, y, z)}{B(x, y, z)}, \tag{36}$$

Pro naše účely je důležité, že analytické vyjádření (36) umožňuje určit parciální derivace funkce $Q(x, y, z)$, které jsou potřebné pro určení hledaného minima.Toto minimum nutně vyhovuje soustavě rovnic

$$Q'_x(x, y, z) = 0, \quad Q'_y(x, y, z) = 0, \quad Q'_z(x, y, z) = 0. \tag{37}$$

Soustava rovnic (37) je nelineární a v obecném případě může mít několik řešení; nás však nezajímají všechna řešení: úkolem je určit jen stabilní řešení, tj. řešení ležící v příslušné oblasti σ.

Problém, který se těžko dá řešit bez znalosti hranic oblasti σ, je: postup, kterým určujeme řešení soustavy rovnic (37), musí být takový, aby vyloučil ona řešení, která neleží v σ. Jinými slovy – výchozí bod při řešení soustavy rovnic (37) musí být vnitřním bodem příslušné oblasti σ.

Že je možná existence několika kladných řešení (tedy řešení, která vyhovují nutným podmínkám stability), plyne z následujícího: funkce (36) je nespojitá jen na množině bodů, které vyhovují rovnici

$$(38) \qquad B(x, y, z) = 0 .$$

Ukazuje se, že rovnice (38) je rovnicí bodových útvarů, které vymezují příslušnou oblast σ; zároveň se ukazuje, že jen určité části bodových útvarů (38) tvoří hranici oblasti σ, tudíž oblast σ není totožná s definiční oblastí funkce (36). Krátce: bodové útvary (38) rozdělují prostor na několik dizjunktních oblastí, a oblast σ je jedna z nich.

Bude-li se definiční oblast funkce (36) skládat z více omezených oblastí, pak s velkou pravděpodobností lze očekávat, že funkce (36) bude mít více extrémů, z nichž některé mohou mít kladné všechny souřadnice.

V uvažovaném případě soustavy pátého řádu, která je regulována regulátorem PID, je

$$B(x, y, z) = 2yg(x, y, z) ,$$

kde funkce $g(x, y, z)$ je dána výrazem (18).

Rozsah tohoto článku nedovoluje uvést i čitatel $A(x, y, x)$ funkce (36); výraz $A(x, y, z)$ je velmi složitý.

Uvedeme zde program pro syntézu řízení soustavy (1), která je regulována regulátory I, PI, ID a PID. Tímto jediným programem vyčíslujeme optimální parametry všech uvedených regulátorů; tyto parametry jsou uváděny pod názvem příslušného regulátoru. Vstupní parametry jsou koeficienty a_1 až a_5 regulované soustavy (1); tyto koeficienty je nutno zadávat v pořadí a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Uvedený formát je možno podle potřeby měnit.

V uvedeném programu minimalizujeme integrál (34) a regulátory vyčíslujeme v tomto pořadí: I, PI, PID, ID.

Při $r_1 = 0$, tj. v řezu $z = a_1$ tělesa (30a)–(30e) se nacházejí optimální parametry regulátoru I a PI. V prvním cyklu vyčíslujeme ono řešení rovnice

$$(39) \qquad Q'_y(1, y, a_1) = 0 ,$$

které leží v příslušné oblasti σ; toto řešení přísluší optimálnímu regulátoru I.

V druhém cyklu v tomtéž řezu $z = a_1$ určujeme příslušné stabilní řešení soustavy rovnic

$$(40) \qquad Q'_x(x, y, a_1) = 0 , \quad Q'_y(x, y, a_1) = 0 ,$$

Určené řešení soustavy rovnic (40) přísluší optimálnímu regulátoru PI.

Ve třetím cyklu určujeme stabilní řešení soustavy rovnic (37), tj. optimální regulátor PID. Ve čtvrtém, posledním cyklu určujeme optimální regulátor ID, tj. určujeme stabilní řešení soustavy rovnic

$$(41) \qquad Q'_y(1, y, z) = 0 , \quad Q'_z(1, y, z) = 0 .$$

Uvedené soustavy rovnic (37), (40), (41) a rovnice (39) řešíme Newtonovou metodou. Přesnost, se kterou určujeme polohu minim, je 10^{-3}. (Z příslušných vypočítaných x, y a z je pak možno určit příslušná r_0, r_{-1} a r_1 podle vztahů (a) a (b)).

Na závěr je snad zapotřebí uvést, že v práci [3] je provedena syntéza jak pro řízení tak i pro kompenzaci poruchy pro regulátory I, PI, ID a PID, kterými může být regulována soutava (1) řádu $n \leqq 5$. Tato syntéza je prováděna pomocí integrálních kritérii (34) a (35). Řešení pro $n \leqq 3$ jsou určena v explicitní formě, pro $n = 4$ a $n = 5$ jsou vypracovány programy v jazyce FORTRAN IV.

```
     READ(2,1)A1,A2,A3,A4,A5
   1 FORMAT(5E13.6)
     A6  = A3*A4-A2*A5
     A7  = A4*A5
     A8  = A3**2-2*(A2*A4-A1*A5)
     A9  = A4**2-2*A3*A5
     A10 = A1**2-2*A2
     A11 = A2**2-2*(A1*A3-A4)
     A12 = 2*A3*A4-A2*A5
     A13 = A2*A4
     A14 = A2*A5
     A15 = A2*A3
     A16 = A3*A5
     A17 = A8*A13+A11*A4**2
     X   = 1.0
     Y1  = (A2*A6-A4*(A1*A4-A5))*(A2-SQRT(A2**2-4*A4))
     Y   = 0.25*(2*A4*A6-Y1)/(A4**3)
     Z   = A1
   2 A   = X
     B   = Y
     C   = Z
   3 E1  = P5YR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,
           A13,A14,A15,A16,A17,X,Y,Z)
     YMIN = Y+E1
     IF(ABS(E1)-0.001)5,5,4
   4 Y = YMIN
     GO TO 3
   5 IF(X-1.0)9,6,9
   6 WRITE(3,7)
   7 FORMAT(1X, (REGULATOR I')
     WRITE(3,8)YMIN
   8 FORMAT(1X, 'Y = ', E10.4//)
   9 Y   = YMIN
     D1  = ABS(YMIN-B)
  10 E2  = P5XR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,
           A12,A13,A14,A15,X,Y,Z)
     YMIN = X+E2
     IF(ABS(E2)-0.001)12,12,11
```

```
11  X = XMIN
    GO TO 10
12  D2 = ABS(XMIN-A)
    IF(D1-0.001)13,13,14
13  IF(D2-0.001)15,15,14
14  X = XMIN
    GO TO 2
15  IF(Z-A1)38,37,38
37  WRITE(3,16)
16  FORMAT(1X, 'REGULATOR PI')
    WRITE(3,17)XMIN,YMIN
17  FORMAT(1X, 'X = ', E10.4,2X, 'Y = ', E10.4//)
38  X = XMIN
18  E3 = P5ZR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A13,
    A14,A15,A16,X,Y,Z)
    ZMIN = Z+E3
    IF(ABS(E3)-0.001)20,20,19
19  Z = ZMIN
    GO TO 18
20  Z = ZMIN
    D3 = ABS(ZMIN-C)
    IF(D3-0.001)22,22,21
21  GO TO 2
22  WRITE(3,23)
23  FORMAT(1X, 'REGULATOR PID')
    WRITE(3,24)XMIN,YMIN,ZMIN
24  FORMAT(1X, 'X = ', E10.4, 2X, 'Y = ', E10.4, 2X, 'Z = ',
    E10.4)
    WRITE(3,25)
25  FORMAT(//,1X, 'REGULATOR ID')
    X  = 1.0
    Z  = 0.5*(2*A7*+A6*(A2+SQRT(A2**2-4*A4)))/(A4**2)
    Y1 = (A2*A6-A4*(A4*Z-A5))*SQRT(A2**2-4*A4)
    Y  = 0.25*(A6*(2*A4-A2**2)+A2*A4*(A4*Z-A5)+Y1)/(A4**3)
26  A  = Y
    B  = Z
27  E1 = P5YR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,
    A13,A14,A15,A16,A17,X,Y,Z)
    YMIN = Y+E1
    IF(ABS(E1)-0.001)29,29,28
28  Y = YMIN
    GO TO 27
29  Y  = YMIN
    D1 = ABS(YMIN-A)
30  E2 = P5ZR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,
         A11,A13,A14,A15,A16,X,Y,Z)
    ZMIN = Z+E2
    IF(ABS(E2)-0.001)32,32,31
31  Z = ZMIN
    GO TO 30
```

```
32  D2 = ABS(ZMIN-B)
    IF(D1-0.001)33,33,34
33  IF(D2-0.001)35,35,34
34  Z = ZMIN
    GO TO 26
35  WRITE(3,36)YMIN,ZMIN
36  FORMAT(1X, 'Y = ', E10.4, 2X, 'Z = ', E10.4)
    CALL EXIT
    END

    FUNCTION P5YR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,
    A12,A13,A14,A15,A16,A17,X,Y,Z)
    A3Y  = A4*A7
    A2Y1 = -A14*(A4*Z-A15)-A5*X*A12
    A2Y  = A2Y1+A9*(A2**2-A4*X)+A17
    A1Y1 = X*(A16*(A3*X-A2*Z)+A5*Z*(A4*Z-A5*X))
    A1Y2 = X*(A9*(A3*X-A2*Z)-A8*(A4*Z-A5*X))
    A1Y3 = -X*(A6*A11+A7*A10)
    A1Y  = A1Y1+A1Y2+A1Y3+A10*(Z*A4**2-A2*A6)-A4*A6
    A0Y1 = (A5**2)*(X**2)+(A4**2)*(Z**2)
    A0Y  = A0Y1+A6*(A3*X-A2*Z)-2*A7*X*Z
    B3Y  = A4**3
    B2Y  = A6*A2**2-A13*(A4*Z-A5*X)-2*A4*A6*X
    B1Y  = X*((A4*Z-A5*X)**2+A6*(A3*X-A2*Z))
    D4Y  = A3Y*B2Y-A2Y*B3Y
    D3Y  = 2*(A3Y*B1Y-A1Y*B3Y)
    D2Y  = A2Y*B1Y-A1Y*B2Y-3*A0Y*B3Y
    D1Y  = -2*A0Y*B2Y
    D0Y  = -A0Y*B1Y
    PY   = D4Y*Y**4+D3Y*Y**3+D2Y*Y**2+D1Y*Y+D0Y
    P1Y  = 4*D4Y*Y**3+3*D3Y*Y**2+2*D2Y*Y+D1Y
    P5YR = -PY/P1Y
    RETURN
    END

    FUNCTION P5XR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,
    A13,A14,A15,X,Y,Z)
    A2X  = A5**2+Y*(A5*A8+A3*A9+A5*(A3**2-A5*Z))
    A1X1 = A3*A6-2*A7*Z-Y*(A7*A10+A6*A11)
    A1X2 = -Y*(A4*Z*A8+A9*(A2*Z+A4*Y))
    A1X  = A1X1+A1X2+A5*Y*(Z*(A4*Z-A15)-A12*Y)
    A0X1 = Z*(Z*A4**2-A2*A6)-A4*A6*Y
    A0X2 = Y*(A10*(Z*A4**2-A2*A6)+A11*Y*A4**2)
    A0X3 = Y*(A13*Y*A8+A9*Y*A2**2+A4*A7*Y**2)
    A0X  = A0X1+A0X2+A0X3-A14*(A4*Z-A15)*Y**2
    B3X  = A5**2
    B2X  = A3*A6-2*A7*Z
    B1X  = Z*(Z*A4**2-A2*A6)-Y*(2*A4*A6-A2*A7)
    B0X  = Y*(Y*A4**3-A2*(Z*A4**2-A2*A6))
    D4X  = -A2X*B3X
```

```
      D3X  = -2*A1X*B3X
      D2X  = A2X*B1X-A1X*B2X-3*A0X*B3X
      D1X  = 2*(A2X*B0X-A0X*B2X)
      D0X  = A1X*B0X-A0X*B1X
      PX   = D4X*X**4+D3X*X**3+D2X*X**2+D1X*X
      P1X  = 4*D4X*X**3+3*D3X*X**2+2*D2X*X+D1X
      P5XR = -PX/P1X
      RETURN
      END

      FUNCTION P5ZR(A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,
     A11,A13,A14,A15,A16,X,Y,Z)
      A2Z  = A4*(A5*X*Y+A4)
      A1Z1 = Y*A4*(A10*A4-X*A8)
      A1Z2 = -Y*(A2*A9*X+A5*X*(A15+A5*X)+A5*A13*Y)
      A1Z  = A1Z1+A1Z2-(A2*A6+2*A7*X)
      A0Z1 = (A5**2)*(X**2)+A6*(A3*X-A4*Y)
      A0Z2 = -Y*A10*(A7*X+A2*A6)
      A0Z3 = Y*A11*(Y*A4**2-A6*X)
      A0Z4 = Y*(A8*(A5*X**2+A13*Y)+A9*X*(A3*X-A4*Y))
      A0Z5 = Y*(Y*A9*A2**2+A16*X*(A3*X-A4*Y))
      A0Z6 = A5*(A2*A15+Y*A4**2-A6*X)*Y**2
      A0Z  = A0Z1+A0Z2+A0Z3+A0Z4+A0Z5+A0Z6
      B2Z  = X*A4**2
      B1Z  = -X*(A2*A6+2*A7*X)-A4*A13*Y
      B0Z1 = X*((A5**2)*(X**2)+A6*(A3*X-A4*Y))
      B0Z2 = Y*A6*(A2**2-A4*X)
      B0Z  = B0Z1+B0Z2+A4*Y*(Y*A4**2+A14*X)
      D2Z  = A2Z*B1Z-A1Z*B2Z
      D1Z  = 2*(A2Z*B0Z-A0Z*B2Z)
      D0Z  = A1Z*B0Z-A0Z*B1Z
      PZ   = D2Z*Z**2+D1Z*Z+D0Z
      P1Z  = 2*D2Z*Z+D1Z
      P5ZR = -PZ/P1Z
      RETURN
      END
```

LITERATURA

[1] Nekolný J.: Současná kontrola stability a jakosti regulace. Sborník: Souhrn prací o automatizaci. NČSAV, Praha 1961.

[2] Newton G. C., Gould L. A., Kaiser J. F.: Analytical Disign of Linear Feedback Control. J. Wiley & Sons, 1957.

[3] Vidinčev P.: Doktorská dizertační práce. ÚTIA-ČSAV, 1969.

The Synthesis of the Control Systems of the First Type

PANE VIDINČEV

The paper deals with the synthesis of continuous control systems the dynamic of which is described by equation (A). A new point of view is in an a priori construction of stability domains in a closed loop. This approach brings substantial advantages for numerical solution and does not depend on the criterion. The procedure is illustrated on the case of a 5^{th} order system with the PID controller and the mean square criterion.

Doc. Ing. Pane Vidinčev, CSc., Elektro-mašinski fakultet, Skopje, Karpoš II, Jugoslavija.