

## Vzájemná korelační funkce v závislosti na obecné transformaci souřadnic

OTA KULHÁNEK, KAREL KLÍMA

V článku je popisována metoda vzájemné korelace mezi dvěma funkcemi s vektorovými argumenty. Ukazuje se, že v tomto případě je vzájemná korelační funkce funkcí parametrů obecné transformace souřadnic. V druhé části článku je popsána metoda aplikována na výpočet vzájemné korelační funkce mezi experimentálně stanovenými funkcemi, definovanými na kulové ploše.

### 1. ÚVOD

Studium nových fyzikálních závislostí bývá spojeno s řešením otázky, zda mezi dvěma (nebo více) soubory experimentálně získaných hodnot existuje jistý vztah např. podobnost, vazba aj. Způsob vyšetřování této vazby obvykle závisí na řadě okolností, avšak lze s určitou obecností tvrdit, že vhodným kritériem je vzájemná korelační funkce.

### 2. VYJÁDRĚNÍ VZÁJEMNÉ KORELAČNÍ FUNKCE V ZÁVISLOSTI NA OBEČNÉ TRANSFORMACI SOUŘADNIC

Postup výpočtu vzájemné korelační funkce mezi funkcemi jedné proměnné, např. času, je znám a byl také v literatuře podrobně popsán, např. [1, 2]. Na obr. 1 jsou znázorněny dva funkční průběhy  $f_1(t)$  a  $f_2(t)$ . Vzájemná korelační funkce  $R_{12}(\Delta t)$  obou průběhů dosáhne svého maxima pro  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Jinými slovy, maximální shody ve smyslu zvoleného kritéria mezi oběma průběhy dosáhneme posunutím funkce  $f_1(t)$  o  $\Delta t$  ve smyslu rostoucího času nebo posunutím funkce  $f_2(t)$  o  $\Delta t$  ve smyslu ubývajícího času. Uvedené posunutí lze chápat také jako jednoduchou transformaci souřadnic

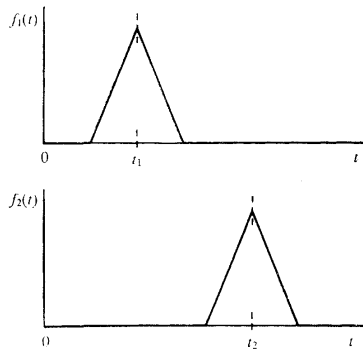
$$(1) \quad \bar{t} = t + \Delta t,$$

kde transformované souřadnice jsou značeny s pruhem a původní souřadnice bez

314 pruhu. Příslušná vzájemná korelační funkce je závislá na transformaci souřadnic jedné z korelovaných funkcí podle vztahu

$$(2) \quad R_{12}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\bar{t}) dt.$$

V tomto nejjednodušším případě transformace je po formální stránce způsob vyjádření vzájemné korelační funkce podle vztahu (2) totožný s obvyklým vyjádřením argumentu pomocí časového rozdílu mezi oběma průběhy [1, 2].



Obr. 1. Časový průběh funkcí  $f_1(t)$  a  $f_2(t)$ .

S ohledem na přijatou definici (2) je možné rozšířit způsob korelace i na složitější typy transformací, např. na posunutí a současnou změnu měřítka podle vztahu

$$(3) \quad \bar{t} = At + \Delta t.$$

Pro tento typ transformace bude vzájemná korelační funkce průběhů  $f_1(t)$  a  $f_2(t)$  vyjádřena funkcí argumentů  $A$  a  $\Delta t$  ve tvaru

$$(4) \quad R_{12}(A, \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\bar{t}) dt.$$

Stupeň vazby mezi  $f_1(t)$  a  $f_2(t)$  lze kvantitativně vyjádřit maximální hodnotou  $R_{12\max}$  vzájemné korelační funkce.

Vztahy (2) resp. (4) můžeme rozšířit i na funkce dvou nezávisle proměnných  $f_1(t, x)$  a  $f_2(t, x)$ . Předpokládáme nejprve, že nezávisle proměnné  $t$  a  $x$  představují dvě kvalitativně odlišné a nezaměnitelné fyzikální veličiny, např. čas a vzdálenost. V takovém případě počítáme vzájemnou korelaci mezi  $f_1(t, x)$  a  $f_2(t, x)$  pro posun jedné z obou funkcí o  $\Delta t$  ve směru osy  $t$  a o  $\Delta x$  ve směru osy  $x$ . Odpovídající trans-

formaci souřadnic vyjadřují vztahy

$$(5) \quad \begin{aligned} \bar{t} &= t + \Delta t, \\ \bar{x} &= x + \Delta x. \end{aligned}$$

Vzájemná korelační funkce je dána výrazem

$$(6) \quad R_{12}(\Delta t, \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t, x) f_2(\bar{t}, \bar{x}) dx dt.$$

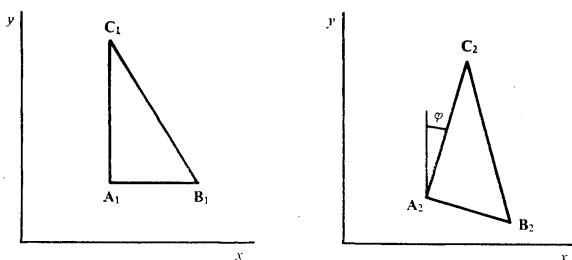
Ze vztahu (6) vyplývá, že vzájemná korelační funkce  $R_{12}(\Delta t, \Delta x)$  je opět funkcí transformace souřadnic jedné z obou korelovaných funkcí.

Doplníme-li transformaci vyjádřenou rovnicemi (5) ještě změnou měřítka obou nezávisle proměnných, přecházejí transformační rovnice na tvar

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{t} &= A_1 t + \Delta t, \\ \bar{x} &= A_2 x + \Delta x. \end{aligned}$$

Pro transformaci souřadnic (7) je vzájemná korelační funkce

$$(8) \quad R_{12}(A_1, A_2, \Delta t, \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t, x) f_2(\bar{t}, \bar{x}) dt dx,$$



**Obr. 2.** Grafické znázornění obrazců  $A_1B_1C_1$  a  $A_2B_2C_2$ . Jejich vzájemná podoba je stanovena pomocí transformace (11) sestávající z posunutí a rotace.

kteřá je funkcí čtyř nezávisle proměnných. Koeficienty  $A_1, A_2$  určují změnu měřítka příslušné osy;  $\Delta t, \Delta x$  udávají posunutí ve směru jednotlivých os.

Jsou-li nezávisle proměnnými vektory, např. souřadnice v prostoru, je nutno uvažovat zcela obecnou transformaci souřadnicového systému [3], definovanou

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \Delta x_1, \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \Delta x_n, \end{aligned}$$

nebo zkráceně

$$(10) \quad \bar{x}_i = a_{ij}x_j + \Delta x_i,$$

kde opakování indexu  $j$  značí sumaci příslušných výrazů pro všechna  $j$ . Obecná transformace, popsaná soustavou rovnic (9) nebo vztahem (10), obsahuje posunutí, změnu měřítka a rotaci souřadnicového systému.

Příklad, vyžadující použití obecné transformace podle (9) nebo (10) je uveden na obr. 2. Útvary  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$  a  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2$  na obrázku jsou rovinné obrazce a úkolem je nalézt jejich vzájemnou podobu. Chceme-li použít k tomuto úkolu vzájemné korelační funkce, musíme zavést funkce  $f_1(x, y)$  a  $f_2(x, y)$  např. tak, že tyto funkce mají nad plochami příslušných obrazců  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$  resp.  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2$  hodnotu jednotkovou a mimo tyto plochy hodnotu nulovou. Úlohu vyřešíme, jestliže stanovíme transformaci odpovídající maximální hodnotě vzájemné korelační funkce mezi  $f_1(x, y)$  a  $f_2(x, y)$ . Maximální hodnota vzájemné korelační funkce stanoví podobnost obou obrazců. Vzhledem k tomu, že se jedná o funkce dvou nezávisle proměnných, které jsou složkami vektoru, přejde soustava rovnic (9) na dvě rovnice

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= a_{11}x + a_{12}y + \Delta x, \\ \bar{y} &= a_{21}x + a_{22}y + \Delta y. \end{aligned}$$

Vzájemná korelační funkce bude obecně funkcí šesti nezávisle proměnných a bude určena vztahem

$$(12) \quad R_{12}(a_{11}, a_{12}, \Delta x, a_{21}, a_{22}, \Delta y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2(\bar{x}, \bar{y}) dx dy.$$

Protože měřítko v případě zobrazeném na obr. 2 zůstává zachováno, platí mezi členy tensoru transformace vztahy

$$(13) \quad a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik},$$

kde  $\delta_{ik}$  je Kroneckerův symbol ( $\delta_{ik} = 1$  pro  $i = k$ ,  $\delta_{ik} = 0$  pro  $i \neq k$ ). V našem případě je možné všechny čtyři členy  $a_{ij}$  vyjádřit pomocí jediného úhlu  $\varphi$ , který je vyznačen na obr. 2 a jehož velikost je určena rovnicemi

$$(14) \quad a_{11} = a_{22} = \cos \varphi, \quad a_{12} = -a_{21} = \sin \varphi.$$

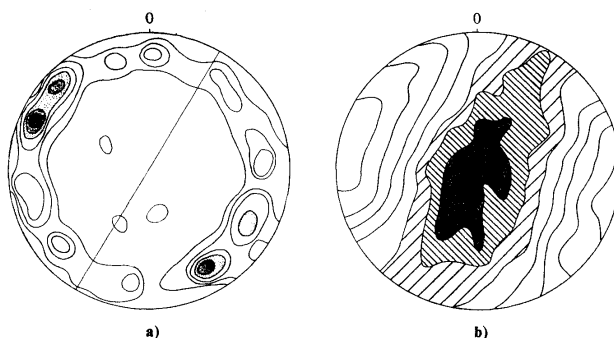
Funkce (12) přejde na funkci tří proměnných

317

$$(15) \quad R_{12}(\Delta x, \Delta y, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2(\bar{x}, \bar{y}) dx dy .$$

### 3. APLIKACE POPSANÉ METODY NA SEISMICKOU PROBLEMATIKU

V seismických aplikacích se často vyskytují fyzikální veličiny, jejichž hodnoty jsou funkcemi směru v prostoru. Jsou to kupř. rychlosti šíření různých typů seismic-



**Obr. 3.** a) Zobrazení hustotní funkce přednostní orientace  $D(X_i)$ . b) Diagram prostorového rozložení měřených rychlostí  $P$ -vln. Izolinie jsou kresleny v intervalech po 0,05 km/sec. Černá oblast odpovídá hodnotě 6,85 km/sec. V obou případech bylo použito Schmidtovy plochojevné projekce. (Podle Vl. Babušky [5].)

kých vln, geologické vlastnosti prostředí apod. Nezávisle proměnné takových veličin mají vektorový charakter a liší se zásadně od příkladů uvedených na obr. 1 a 2. V seismickém oddělení Geofyzikálního ústavu ČSAV byla vypracována metoda [4] využívající vlastností vzájemné korelační funkce pro kvantitativní posouzení podobnosti mezi dvěma experimentálně určenými veličinami, jejichž velikosti jsou funkcemi směru v prostoru.

Na řadě vzorků krystalického vápence, který je prakticky monominerální horninou, byly vyšetřovány [5] přednostní orientace optických os zrn minerálu a rychlosti šíření podélných elastických vln, tzv.  $P$ -vln. Vizualním porovnáním obou veličin v grafickém vyjádření ve Schmidtově plochojevné projekci na obr. 3 lze dospět k určité inverzní závislosti mezi oběma vyšetřovanými veličinami. Směrům s největší hustotou přednostní orientace odpovídají nejnižší rychlosti  $P$ -vln a naopak. Oproti vizuálnímu srovnání, které bývá vždy zatíženo subjektivní chybou, bylo použitím vzájemné

318 korelační funkce dosaženo objektivního výsledku pro kvantitativní vyjádření podobnosti. Jde o velmi speciální příklad, domníváme se však, že dobře ilustruje vypracovanou metodu, která může být aplikována na další případy.

### 3.1 Funkční charakter porovnávaných veličin

První z obou porovnávaných funkcí, rychlost elastických vln v anizotropních látkách je závislá na směru šíření. Každému směru šíření můžeme přiřadit jednotkový vektor  $x_i$  s koncovým bodem na jednotkové kouli. Složky vektoru  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou souřadnicemi bodu na povrchu jednotkové koule. Rychlost  $v(x_i)$  elastických vln je spojitou funkcí nad uvažovanou kulovou plochou. Protože jde o o funkci středově symetrickou, lze pro její úplné vyjádření uvažovat pouze polokouli.

Hodnoty  $v(x_i)$  mohou být experimentálně určeny pouze v konečném počtu směrů. Systém směrů, ve kterých jsou rychlosti  $v(x_i)$  měřeny, je rozhodující pro určení „vzorkovací periody“ počítané funkce vzájemné korelace. Rychlosti  $v(x_i)$  byly v uvažovaném případě měřeny na koulových vzorcích ve 133 nezávislých směrech určených systémem poledníků a rovnoběžek s dělením pro  $15^\circ$ .

Druhá funkce přednostní orientace je dána směry optických os náhodně vybraného souboru  $N$  zrn materiálu. Každému z  $N$  zrn odpovídá jeden směr v prostoru. Uvažujeme-li tyto údaje jako funkci, pak pro libovolně zvolený směr v prostoru (nebo pro libovolný bod kulové plochy) je hodnota funkce přednostní orientace 1 nebo 0. V daném směru má funkce hodnotu 1, jestliže v souboru  $N$  zrn existuje zrno, jehož směr optické osy je identický s uvažovaným směrem. Jestliže takové zrno v souboru neexistuje, pak hodnota funkce přednostní orientace je rovna 0. Kladný a záporný smysl optické osy krystalů není definován, takže funkce přednostní orientace je opět středově symetrickou funkcí, která ve  $2N$  bodech povrchu jednotkové koule je rovna 1 a ve všech ostatních bodech definičního oboru je rovna 0. Podobně jako pro rychlosti elastických vln stačí také pro funkci přednostní orientace uvažovat jako definiční obor pouze polokouli. Přednostní orientace optických os byla měřena mikroskopicky pro soubor  $N = 200$  náhodně vybraných zrn. Měření orientace optických os spadá do problematiky petrografických metod a proto zde není popisováno. Technika měření a petrografické zpracování vzorků byly popsány v práci [5], odkud byl také převzat experimentální materiál.

Vzájemně korelovat obě popsané funkce v uvedeném tvaru není možné. Hlavní potíže vnáší do výpočtu funkce přednostní orientace, která má diskrétní charakter s nekonstantní vzorkovací periodou.\* Pokud by byl znám analytický tvar pro spojitou funkci  $v(x_i)$ , bylo by principiálně možno použít při výpočtu vzájemné korelační funkce nepravidelné rozdělení směrů přednostní orientace jako vzorkovací periody,

\* Termín nekonstantní vzorkovací perioda resp. vzorkovací perioda vůbec v našem případě nevystihuje plně poměry na kulové ploše. Pojem vzorkovací periody bývá v regulační technice obvykle spojen s veličinou jedné proměnné — času a byl zde použit proto, že přesnou charakteristiku uvažované veličiny by zřejmě bylo možno provést jedině opisem.

Vzhledem k tomu, že hodnoty  $v(x_i)$  jsou známy pouze v bodech daných systémem měření, není přímý výpočet vzájemné korelační funkce možný.

319

### 3.2 Zavedení funkce hustoty předností orientace

Nevhodný diskretní charakter jedné z korelovaných veličin lze odstranit tím, že místo funkce předností orientace zavedeme novou funkci – hustotu předností orientace  $D(x_i)$ . Funkci  $D(x_i)$  jsme v tomto případě definovali jako počet zrn, jejichž optické osy leží uvnitř rotačního kužele s osou ve směru  $x_i$ , který na jednotkové kouli vytíná vrchlık s jednotkovou plochou, tj. kužel s objemovým úhlem  $\Omega = 1$ . Uvažovanému kuželi odpovídá poloviční vrcholový úhel  $\omega = 32^\circ 46'$ . Hustotní funkci  $D(x_i)$  můžeme tedy také definovat jako počet zrn z celého souboru  $N$  zrn, pro která úhel mezi vektorem  $x_i$  a směrem optické osy  $n$ -tého zrna  ${}^n x_i$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) je menší nebo roven  $\omega$ . Zavedení hustotní funkce  $D(x_i)$  lze pochopitelně provést i podle jiného pravidla než je uvedeno.

Obecně je volba úhlu  $\omega$  v mezích od 0 do  $\pi/2$  libovolná. Velké hodnoty úhlu  $\omega$  nerespektují rozložení jednotlivých optických os a vyhlazují průběh hustotní funkce  $D(x_i)$ . V mezním případě  $\omega = \pi/2$  je funkce  $D(x_i)$  konstantní a rovna  $N$ . Malé hodnoty úhlu  $\omega$  přibližují hustotní funkci původní diskretní funkci předností orientace a v mezním případě  $\omega = 0$  jsou obě funkce totožné. Při volbě velikosti úhlu  $\omega$  je třeba brát v úvahu také systém bodů, ve kterých byly měřeny rychlosti elastických vln.

Vzhledem k tomu, že skalární součin dvou jednotkových vektorů je roven kosinu sevrženého úhlu, můžeme pro  $n$ -té zrno zavést pomocnou funkci  $F_n(x_i)$ , takovou, aby platilo

$$(16) \quad \begin{aligned} F_n(x_i) &= 1 \quad \text{jestliže} \quad |x_i \cdot {}^n x_i| \geq \cos \omega, \\ F_n(x_i) &= 0 \quad \text{jestliže} \quad |x_i \cdot {}^n x_i| < \cos \omega. \end{aligned}$$

Pomocná funkce  $F_n(x_i)$  představuje hustotní funkci  $n$ -tého zrna. Hustotní funkce  $D(x_i)$  celého souboru  $N$  zrn je dána součtem

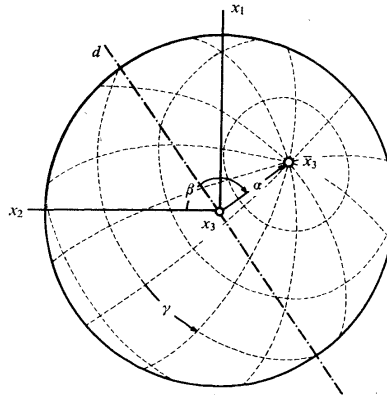
$$(17) \quad D(x_i) = \sum_{n=1}^N F_n(x_i).$$

Funkce  $D(x_i)$ , daná rovnicí (16), je opět středově symetrickou funkcí, která může být numericky stanovena v libovolném směru. Proto je tato funkce schopna korelace s rychlostí elastických vln, jestliže volíme vzorkování shodně se sítí měřených rychlostí  $v(x_i)$ .

### 3.3 Definiční obor vzájemné korelační funkce

Vzájemná korelační funkce je obecně funkcí rozdílů nezávisle proměnných obou korelovaných funkcí, nebo jak bylo uvedeno výše, funkcí použité transformace

320 souřadnic. Obě funkce  $v(x_i)$  a  $D(x_i)$ , které mají být vzájemně korelovány, jsou definovány nad plochami, které tvoří povrch soustředných jednotkových koulí. Obecná transformace (9) souřadnicového systému jedné z obou funkcí se vzhledem k definičnímu oboru funkcí zjednodušuje na obecnou rotaci jako nezávisle proměnnou vyšetřované vzájemné korelační funkce. V našem případě změnu měřítka nebo posunutí



Obr. 4. Souřadnicová transformace v závislosti na třech úhlech otočení  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

není nutno uvažovat. Obecná transformace souřadnic (9) přejde na soustavu tří rovnic

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \bar{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \bar{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

kde opět mezi složkami tenzoru transformace platí vztahy (13). Obecnou rotaci souřadnicové soustavy lze vyjádřit jednak složkami tenzoru transformace  $a_{ij}$ , vhodnými pro numerický výpočet, jednak třemi úhly otočení  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , které názorně představují rotaci souřadnicového systému. Složky tenzoru transformace  $a_{ij}$  jsou funkcemi úhlů otočení  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Fyzikální význam úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  je zřejmý z obr. 4. Libovolnou rotaci lze, jak naznačeno, rozdělit na dvě části. V první je souřadnicová soustava otočena o úhel  $\alpha$  kolem přímky  $d$ . Poloha přímky  $d$  v rovině  $x_1, x_2$  je dána úhlem  $\beta$ . Ve druhé části je soustava otočena kolem osy  $\bar{x}_3$  o úhel  $\gamma$  do své konečné polohy.

Pro numerické řešení je nutné, aby obě funkce, které mají být vzájemně korelovány, byly vzorkovány pro shodné hodnoty nezávislé proměnné. Vzhledem k tomu, že vzorkování funkce  $v(x_i)$  je předem dáno sítí měření, je nutné aplikovat transformaci na souřadný systém hustotní funkce  $D(x_i)$ , kterou lze stanovit pro libovolné  $x_i$ .



Vzájemná korelační funkce mezi hustotou přednostní orientace  $D(x_i)$  a rychlostí  $v(x_i)$  je obecně vyjádřena vztahem

$$(19) \quad R_{12}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}) = \int_S D(a_{ij}x_j) v(x_i) dS,$$

kde  $S$  je definiční obor oboru korelovaných funkcí a význam koeficientů  $a_{ij}$  vyplývá z rovnice (18). Funkce  $D(x_i)$  a  $v(x_i)$  jsou středově symetrické a integrace v rovnici (19) se proto provádí pouze po povrchu jednotkové polokoule. Vzhledem k tomu, že složky tenzoru transformace jsou funkcemi úhlů otočení  $\alpha, \beta, \gamma$ , je také  $R_{12}$  v rovnici (19) funkcí argumentů  $\alpha, \beta, \gamma$ . Hodnoty funkce rychlosti  $v(x_i)$  byly měřeny pouze v konečném počtu  $M$  směrů, takže integrace v rovnici (19) přejde na sumaci

$$(20) \quad R_{12}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m=1}^M D(a_{ij}^m x_j) v^m(x_i) \Delta S_m,$$

kde  $^m x_i$  jsou směrové kosiny, odpovídající jednotlivým bodům použité sítě, a  $\Delta S_m$  jsou váhové koeficienty dané systémem měření [6].

Jak již bylo řečeno a jak je zřejmé z obr. 3 existuje mezi funkcemi  $v(x_i)$  a  $D(x_i)$  inverzní závislost. Proto byla při výpočtu vzájemné korelační funkce místo rychlosti  $v(x_i)$  použita její převrácená hodnota. Rovnice (20) tím dostává konečný tvar

$$(21) \quad R_{12}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m=1}^M D(a_{ij}^m x_j) v^{-1}(^m x_i) \Delta S_m.$$

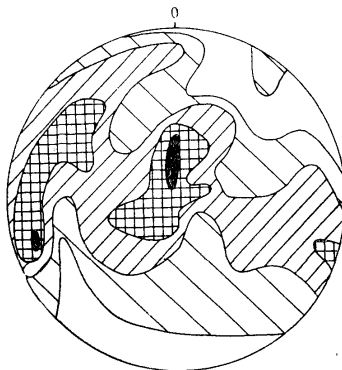
Výpočet vzájemné korelační funkce  $R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$  byl prováděn na počítači Minsk 22. Program byl psán v symbolickém jazyce MAT-4. Vstupní data výpočtu tvoří:

- volba výpočtu podle rovnice (20) nebo (21),
- volba úhlu  $\omega$  pro výpočet funkce  $D(x_i)$ ,
- volba intervalů a kroků pro  $\alpha, \beta, \gamma$ ,
- směry optických os pro  $N$  zrn,
- hodnoty rychlostí  $P$ -vln ve 133 směrech,
- hodnoty váhových koeficientů  $\Delta S_m$ .

Výpočet jednoho bodu funkce  $R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$  trvá přibližně 100s.

Vzhledem k tomu, že počítaná funkce (21) je funkcí tří parametrů, je obtížné ji graficky zobrazit. V uvedeném případě jsme zvolili zobrazení diagramy pomocí vrstevnic. Do těchto diagramů jsou vynášeny hodnoty funkce  $R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$  v závislosti na úhlech  $\alpha$  a  $\beta$ , úhel  $\gamma$  je parametrem. Na obr. 5 jsou průběhy vzájemné korelace mezi funkcemi  $v^{-1}(x_i)$  a  $D(x_i)$  z obr. 3 pro hodnotu úhlu  $\gamma = 0^\circ$ . Funkce  $R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$  byla počítána pro  $\alpha = 0, 15, \dots, 90^\circ$ ;  $\beta = 0, 36, \dots, 324^\circ$ ; a  $\gamma = 0, 60, \dots, 300^\circ$ . Extrémní hodnoty vzájemné korelační funkce pro uvažované hodnoty úhlu  $\gamma$  jsou v tab. 1. Absolutní extrémny jsou vytištěny tučně.

Z fyzikálního hlediska byla ve vyšetřovaném případě očekávána maximální vazba pro nulovou transformaci. Nenulová transformace nutná k dosažení extrémní hodnoty vzájemné korelační funkce ukazuje vliv neuvažovaných fyzikálních závislostí. Po zpracování většího počtu vzorků bude možno říci, zda jde o vliv systematický nebo o náhodnou fluktuaci.



Obr. 5. Průběh vzájemné korelační funkce  $R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$  pro úhel  $\gamma = 0^\circ$ . Úhel  $\alpha$  je vynášen od středu kruhu k jeho okraji a úhel  $\beta$  od označení 0 ve směru otáčení hodinových ručiček. Izolinie jsou kresleny s krokem po 0,5. Černá plocha odpovídá hodnotě větší než 117,5.

Tabulka 1.

Hodnoty vzájemné korelační funkce

$\gamma^\circ$	maximální			minimální		
	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$R_{12}(\alpha, \beta, \gamma)$
0	15	180	<b>117,89</b>	90	252	115,41
60	15	180	117,38	90	216	115,10
120	90	324	117,27	45	216	115,26
180	30	252	117,77	30	72	115,28
240	15	0	117,31	90	36	115,07
300	30	180	117,13	45	36	<b>115,05</b>

#### 4. ZÁVĚR

V článku jsme popsali použití metody vzájemné korelace dvou funkcí s vektorovými argumenty pro kvantitativní vyjádření podobnosti jejich průběhu.

Aplikace popsané metody předpokládá znalost jedné z korelovaných funkcí pro libovolné hodnoty argumentu.

Domníváme se, že zavedením obecné transformace souřadnic jako argumentu vzájemné korelační funkce se rozšiřuje možnost užití korelačních metod, zejména při studiu vztahů mezi vlastnostmi různých fyzikálních jevů.

(Došlo dne 12. července 1968.)

#### LITERATURA

- [1] J. Beneš: Statistická dynamika regulačních obvodů. SNTL, Praha 1961.
- [2] T. W. Lee: Statistical Theory of Communication. J. Wiley and Sons, London 1960.
- [3] M. Brdička: Mechanika kontinua. ČSAV, Praha 1959.
- [4] K. Klíma, O. Kulhánek: Quantitative Correlation Between Preferred Orientation of Grains and Elastic Anisotropy of Marble. IEEE Trans. *GE-6* (1968), 3, 132—143.
- [5] V. Babuška: Elastic Anisotropy of Igneous and Metamorphic Rocks. *Studia geoph. et geod. 12* (1968), 3, 291—303.
- [6] K. Klíma, O. Kulhánek, V. Babuška: Quantitative Relation Between Elastic Anisotropy and Preferred Orientation of Crystalline Calcite. *Travaux Inst. Géophys. Acad. Tchécosl. Sci.* V tisku.

---

## The Cross-correlation Function in Dependence on the General Transformation of Coordinates

OTA KULHÁNEK, KAREL KLÍMA

The methods of computing the cross-correlation for functions of one variable have been elaborated in detail. The intention of the authors was to extend the use of the cross-correlation function to objective evaluations of the similarity of two functions with more variables, especially to functions with vector arguments. For this type of functions the simple shift (delay), which represents the argument of the cross-correlation function with one variable, must be substituted by a general transformation of coordinates.

The method was applied to the quantitative expression of the similarity between the function of the velocity of longitudinal elastic waves in an anisotropic sample and the spacial orientation of the optical axes of grains (the so-called preferred orientation), which forms the considered sample. The interval of definition of both correlated functions is a spherical surface. As a result of the transformation of coordinates, it is necessarily required that at least one of the two functions would be defined in all points of the interval of definition. The original function of preferred orientation was, therefore, transformed in order to meet the mentioned requirement.

*Ing. Ota Kulhánek, CSc., RNDr Karel Klíma, CSc., Geofyzikální ústav ČSAV, Božní II, Praha 4.*