KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 5/1969

Automatické seřizování v obvodech s rozdělenými parametry

VLADIMÍR KRACÍK

Tento článek navazuje přímo na práci [1] téhož autora. Výsledky z [1] jsou zde rozšířeny na případy s obecnější lineární dynamikou s možností aplikace při seřizování teploty v pecích, kterými prochází nahřívaný materiál, při procesu sušení, atd.

Platnost věty 1 [1] lze snadno rozšířit z obvodu (8) [1] na následující obvod:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_h y_{n-h} = u_n - p_1 r_{n-1} - \ldots - p_l r_{n-l},$$

$$r_n = \sum_{i=0}^{\infty} w_i y_{n-i} \tag{1}$$

a v obrazech

$$Y_U = \frac{1}{A + sPR}, \quad R_Y = W, \tag{1'}$$

kde

$$A = 1 + a_1 s + \ldots + a_h s^h, \quad P = p_1 + p_2 s + \ldots + p_l s^{l-1},$$

a tedy

$$R_U = \frac{W}{A + sPW}.$$

Předpokládáme, že A a P nemají kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Podobně jako lemma 1 [1] dokážeme následující

Lemma 1.

$$R_Y \in \mathscr{R}_j \Leftrightarrow Y_U = (1 - s^{j+1}Q)\frac{1}{A},$$

kde Q nemá kořeny uvnitř jednotkového kruhu. $\mathscr{R}_j$ je množina přenosů typu $R_Y = s^j Z$, které zajišťují stabilitu resp. hranici stability přenosů R_U, Y_U, kde $s = 0$ není pólem Z (přenosy se zpožděním j).

Důkaz. Nechť $R_Y \in \mathscr{R}_j$, tj. $R_Y = s^j Z$, potom

$$Y_U = \frac{1}{A + s^{j+1}PZ} = \left(1 - \frac{s^{j+1}PZ}{A + s^{j+1}PZ}\right)\frac{1}{A};$$

nechť naopak

$$Y_U = (1 - s^{j+1}Q)\frac{1}{A},$$

potom odtud a z (1') je

$$R_Y = \frac{AQs^j}{P(1 - s^{j+1}Q)} \in \mathscr{R}_j . \tag{2}$$

Z tohoto lemmatu vyplývá, že platnost věty 1 [1] lze rozšířit pro obvod (1) s tím, že místo procesu U bude proces U/A. A tedy platí

Věta 1. *Minimum střední kvadratické odchylky výstupu obvodu (1) pro množinu všech regulátorů (seřizování) pracujících se zpožděním j při zachování stability, resp. její hranice pro přenosy R_U, Y_U je rovno minimální chybě predikce pro $j + 1$ kroků procesu U/A, což je výstupní proces při nulovém seřizování ($R_Y = 0$).*

Syntéza optimálního přenosu Z je dána pomocí (11) [1] a (2) při čemž S_u v (11) [1] bude nahrazeno spektrální hustotou výstupního procesu Y při nulovém seřizování.

Zcela analogické tvrzení lze vyslovit i pro spojitý případ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = u(t) - \int_0^T p(v\tau)\, r(t - \tau)\, d\tau , \tag{3}$$

$$r(\tau) = \int_0^\infty w(\tau_1)\, y(\tau - \tau_1)\, d\tau_1$$

a v obrazech Laplaceovy transformace

$$Y_U = \frac{1}{A + PR_Y}, \tag{4}$$

$$R_Y = W; \quad A = a_n + sa_{n-1} + \ldots + s^n ,$$

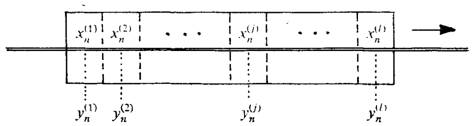
$$P = \frac{1}{v} P_1\left(\frac{s}{v}\right); \quad P_1(s) = \mathscr{L}(p(h)) .$$

Je-li zpoždění t_1, potom místo s^j bude formálně $e^{-t_1 s}$.

Uveďme nyní následující aplikaci. Podle obr. 1 nechť $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(l)}$ jsou veličiny charakterizující prostředí v průchodném prostoru (teplota, vlhkost, atd.) v zóně $1, 2, \ldots, l$ během trvání kroku n. Délka kroku odpovída šířce zóny. $y_n^{(j)}$ nechť je veličina charakterizující stav procházejícího materiálu v zóně j na konci kroku n. $y_n^{(l)}$ považujme za výstupní hodnotu.

Označme

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(l)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(l)} \end{pmatrix}.$$



Obr. 1.

Nechť dynamika zařízení je dána rovnicí

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{B}\mathbf{x}_n . \tag{5}$$

Zavedeme nyní automatické seřizování, tj. zmenšíme $x_n^{(j)}$ o $p_j r_{n-1}$ pro $j = 1, 2, \ldots, l$, kde r_n je lineárně závislé na $y_{n-i}^{(l)}$, $i = 0, 1, \ldots$, a tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \mathbf{A}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{B}(\mathbf{x}_n - r_{n-1}\mathbf{p}) , \\ r_n &= \sum_0^\infty w_k y_{n-k}^{(l)} \end{aligned} \tag{6}$$

a v obrazech

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{A}s - \mathbf{E})\,\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{X} - sR\mathbf{B}\mathbf{p} , \\ R &= WY^{(l)} , \end{aligned} \tag{7}$$

kde $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $Y^{(l)}$ jsou obrazy posloupností $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{x}_n$, $y_n^{(l)}$.

Eliminací složek $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(l-1)}$ dostaneme

$$|\mathbf{A}s - \mathbf{E}|\; Y^{(l)} + |\mathbf{U}| - s\,R|\mathbf{P}| = 0 , \tag{8}$$

kde $\mathbf{U}$, resp. $\mathbf{P}$ je matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}s - \mathbf{E}$ záměnou posledního sloupce za sloupec $\mathbf{B}\mathbf{X}$, resp. $\mathbf{B}\mathbf{p}$.

Pro užití věty 1 je však nutno, aby polynom $|\mathbf{P}|$ neměl kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Pišme $\mathbf{P} = \mathbf{A}^+ s - \mathbf{P}^+$, kde $\mathbf{A}^+$ resp. $\mathbf{P}^+$ vznikne z $\mathbf{A}$ resp. z $\mathbf{E}$ záměnou posledního sloupce za nulový resp. za sloupec $(-\mathbf{B}\mathbf{p})$. Potom $|\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^+|\,|\mathbf{P}^{+-1}\mathbf{A}^+ s - \mathbf{E}|$, a tedy pro užití věty 1 je nutno, aby matice $\mathbf{P}^{+-1}\mathbf{A}^+$ neměla vlastní čísla vně jednotkového kruhu. Označíme-li $\mathbf{B}\mathbf{p} = \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_l)$, je $\mathbf{P}^{+-1}$ matice, která vznikne z $\mathbf{E}$ záměnou posledního sloupce za sloupec $(-q_1/q_l, -q_2/q_l, \ldots, -q_{l-1}/q_l, -1/q_l)$.

A tedy konečně matice $\mathbf{P}^{+-1}\mathbf{A}^{+}$ vznikne z matice $\mathbf{A}^{+}$ přičtením posledního řádku násobeného $(-q_i/q_l)$ k i-tému řádku, $i = 1, \ldots, l-1$, a násobením posledního řádku $(-1/q_l)$.

Příklad. Uvažujme proces ohřívání tenkého materiálu. V obr. 1 potom $x_n^{(j)}$ bude značit teplotu v čase n v zóně j a $y_n^{(j)}$ teplotu procházejícího materiálu v zóně j na konci kroku n.

Potom můžeme psát

$$y_n^{(j)} = y_{n-1}^{(j-1)} + a(x_j^{(j)} - y_{n-1}^{(j-1)}) + b(y_{n-1}^{(j-2)} - 2y_{n-1}^{(j-1)} + y_{n-1}^{(j)}) \tag{9}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b, & 0, & . & . & 0 \\ 1-a-2b, & b, & 0, & . & 0 \\ b, & 1-a-2b, & b, & 0, & . \\ 0, & b, & 1-a-2b, & b, & . \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & b, & 1-a-2b, & b \end{pmatrix} \times \tag{10}$$

$$\times \begin{pmatrix} y_{n-1}^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1}^{(l)} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Bez ztráty obecnosti předpokládejme, že veličiny $y_n^{(j)}$, $x_n^{(j)}$ jsou měřeny od svých středních hodnot.

Při srovnání (10) s (5) máme $\mathbf{B} = a\mathbf{E}$. Zkušební matici $\mathbf{P}^{+-1}\mathbf{A}^{+}$ získáme snadno podle popsané procedury.

Ve speciálním jednoduchém případě, kdy je možno zanedbat sdílení tepla v materiálu (kusový materiál) tj. $b = 0$, je $|\mathbf{A}s - \mathbf{E}| = \pm 1$, tj. podle (8) v obvodu s nulovou regulací není zpětná vazba (obvod (2) [1]).

Vraťme se nyní ještě k základnímu obvodu (1), (1′) a naznačme postup (metodou Wienerovou - Hopfovou) při syntéze optimálního seřizování a stanovení minimální chyby výstupu za obecného předpokladu, že P je libovolný polynom (viz např. také [2] str. 353).

Nechť $\mathscr{R}'_j$ je množina přenosů $R_Y = s^j Z$, kde $s = 0$ není pólem Z, které zajišťují stabilitu R_U a tedy také Y_U, při čemž P je libovolný polynom, potom platí

Lemma 2.

$$R_Y \in \mathscr{R}'_j \Leftrightarrow Y_U = (1 - s^{j+1}PQ)\frac{1}{A},$$

kde Q je stabilní, tj. regulární na jednotkovém kruhu.

 Důkaz. Nechť $R_Y = s^j Z$, potom

$$Y_U = \left(1 - \frac{s^{j+1}PZ}{A + s^{j+1}PZ}\right)\frac{1}{A},$$

naopak, nechť

$$Y_U = (1 - s^{j+1}PQ)\frac{1}{A},$$

potom podle (1') je

$$R_Y = \frac{As^jQ}{1 - s^{j+1}PQ} \in \mathscr{R}'_j. \tag{11}$$

Poznámka. Touto úpravou Y_U se docílí toho, že R_Y nemá ve jmenovateli P, čímž je zajištěna stabilita $R_U = Y_U R_Y$ i v případě, že P má kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Místo P je možno ovšem vzít jenom součin kořenových činitelů P s kořeny uvnitř jednotkového kruhu.

Potom problém optimalizace je převeden na úlohu minimalizace funkcionálu

$$J_1 = \overline{y^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_k (1 - s^{j+1}PQ)\,(1 - \overline{s^{j+1}PQ})\,\frac{1}{A\bar{A}}\,S_u\,\frac{ds}{s}$$

přes stabilní Q (pruh značí záměnu s za $1/s$).

V souvislosti s touto úlohou uveďme následující obecnější úlohu minimalisace $\overline{y^2} + \lambda\overline{r^2}$.

Podle (11) a lemmatu 2 je zřejmě $R_U = Y_U R_Y = s^j Q$.

Potom

$$J_2 = \overline{y^2} + \lambda\overline{r^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_k \left[(1 - s^{j+1}PQ)\,(1 - \overline{s^{j+1}PQ})\,\frac{1}{A\bar{A}} + \lambda Q\bar{Q}\right] S_u\,\frac{ds}{s}.$$

Parametr λ lze charakterisovat jako cenu seřizování s jednotkovým rozptylem.

Celková variace J_2 pro minimalisující Q bude

$$\delta J_2 = \delta_Q J_2 + \delta_{\bar{Q}} J_2 = 2\delta_Q J_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_k \left[-s^{j+1}\,P(1 - \overline{s^{j+1}PQ})\,\frac{1}{A\bar{A}} + \lambda\bar{Q}\right] S_u\,\delta Q\,\frac{ds}{s} = 0,$$

kde δQ je libovolné stabilní. Odtud pro integrand plyne

$$\left[\bar{Q}\left(\frac{P\bar{P}}{A\bar{A}} + \lambda\right) S_u - \frac{s^{j+1}PS_u}{A\bar{A}}\right]\frac{1}{s} = X(s),$$

kde $X(s)$ je stabilní.

Pišme

$$\left(\frac{P\bar{P}}{A\bar{A}} + \lambda\right) S_u = L\bar{L},$$

kde

$$\bar{L}(s) = L\left(\frac{1}{s}\right),$$

$L(s)$ nemá póly ani nuly na jednotkovém kruhu,

$$\frac{s^{j+1} P S_u}{A \bar{A}} = M ,$$

a tedy máme

$$\bar{Q} \frac{L \bar{L}}{s} - \frac{M}{s} = X .$$

Vzhledem k vlastnostem L je možno poslední vztah upravit:

$$\frac{\bar{Q}\bar{L}}{s} - \frac{M}{sL} = \frac{X}{L} .$$

Dále rozložme

$$\frac{M}{sL} = \left[\frac{M}{sL}\right]_+ + \left[\frac{M}{sL}\right]_- ,$$

kde $[M/sL]_+$ je součet parciálních zlomků s póly uvnitř jednotkového kruhu. Potom

$$\frac{\bar{Q}\bar{L}}{s} - \left[\frac{M}{sL}\right]_+ = \frac{X}{L} + \left[\frac{M}{sL}\right]_- .$$

Jelikož na pravé straně je funkce regulární na jednotkovém kruhu a funkce na levé straně je regulární vně jednotkového kruhu, jsou obě strany rovny konstantě. Ale $\lim_{s \to \infty} \bar{Q}\bar{L}/s = 0$, jelikož $\bar{Q}$ a $\bar{L}$ nemají nevlastní pól a vzhledem k definici také $\lim_{s \to \infty} [M/sL]_+ = 0$. Tedy konstanta je rovna nule a dostáváme

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{\text{opt}} = \frac{s}{\bar{L}} \left[\frac{M}{sL}\right]_+ ,$$

odtud dále podle (11) dostaneme R_Y.

(Došlo dne 3. května 1968).

LITERATURA

[1] V. Kracík: Vyhlazování šumu v jisté jednoduché variantě obvodu s rozloženými parametry. Kybernetika *3* (1967), 5.

[2] V. Strejc: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, 1965.

[3] O. Šefl: Regulace systémů s dopravním zpožděním a teorie predikce. Problémy kybernetiky, NČSAV, 1965.

[4] L. Prouza: Úvod do teorie a aplikací lineárních impulsních soustav. NČSAV, 1967.

Automatic Adjustment in Systems with Distributed Parameters

VLADIMÍR KRACÍK

This paper follows directly on the paper [1] of the same author. The system

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_h y_{n-h} = u_n - p_1 r_{n-1} - \ldots - p_l r_{n-l},$$

$$r_n = \sum_{i=0}^{\infty} w_i y_{n-i}$$

is given.

In this paper the question of minimalization of $\overline{y^2}$ (mean square value of the output y_n) over $\{w_0, w_1, \ldots\}$ by keeping the system stability is solved. Under the assumption that $P(s) = p_1 + p_2 s + \ldots + p_l s^{l-1}$ has no roots on the unit circle and $w_0 = w_1 = \ldots = w_{j-1} = 0$, min $\overline{y^2}$ is equal to the reror of the optimal prediction for $j + 1$ steps of the process $y_n^{(0)}$ on the output of the system with the zero regulation ($r_n = 0$).

The possibility of application is shown when adjusting the temperature in furnaces which the warmed up material passes through and by processes of drying, etc.

Ing. Vladimír Kracík, Vysoká škola strojní a textilní, Hálkova 6, Liberec.