

Iteračná metóda identifikácie nelineárnych sústav

IVAN KNEPPO

V práci je popísaná metóda adaptívnej identifikácie nelineárnych sústav obsahujúcich jediný nelineárny prvok. Použitím kritériálneho funkcionálu založeného na sledovaní odchýlky výstupnej veličiny modelu vo fázovej rovine, stáva sa úloha identifikácie takého typu sústav riešiteľná bežnými lineárnymi metódami.

Identifikácia nelineárnych sústav je úlohou nepomerne zložitejšou než identifikácia lineárnych sústav. Príčina tejto náročnosti spočíva hlavne v mnohotvárnosti typov nelinearít a štruktúr nelineárnych objektov. Znalosť štruktúry daného nelineárneho objektu významne zjednodušuje identifikačnú procedúru. Významné miesto medzi identifikačnými metódami zaujímajú metódy optimálnej aproximácie adaptívnym modelom. Štruktúrne bohatstvo nelineárnych objektov i v tomto prípade nepriaznivo ovplyvňuje realizáciu nelineárneho modelu. Jednou z možných ciest zjednodušenia modelu je použitie iného kritéria než všeobecne používaného, založeného na sledovaní a vyhodnocovaní odchýlky výstupov sústavy a modelu. Kritérium, ktoré bolo podrobne popísané v zpráve [1] spočíva v porovnávaní výstupných veličín modelu a sústavy vo fázovej rovine. Toto kritérium je invariantné k nelineárnej charakteristike vyšetrovanej sústavy a preto umožňuje použitie lineárneho modelu k identifikácii nelineárnej sústavy. Predložená práca sa zaoberá metódou adaptívnej identifikácie nelineárnej dynamickej sústavy s jednou nelinearitou. Základom tejto metódy je adaptívna identifikácia lineárnych sústav, popísaná v práci [2], spojená s použitím horespomenutého kritéria.

PODSTATA METÓDY

Daná je stabilná nelineárna sústava, pozostávajúca z kaskádového spojenia časove nepremenného lineárneho impulzného obvodu

$$(1) \quad x_j^* = \sum_{i=0}^j k_i x_{j-i}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

234 a nelineárneho statického obvodu s jednojednoznačnou charakteristikou

$$(2) \quad y_j = f(x_j^*), \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

takže

$$(3) \quad y_j = f\left(\sum_{i=0}^j k_i x_{j-i}\right), \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Ďalej sa predpokladá, že merané veličiny nie sú zaťažené šumom. Impulzná charakteristika lineárneho člena môže byť aproximovaná konečným počtom hodnôt k_i ($i = 0, 1, \dots, N$) tvoriacich $N + 1$ zložkový vektor $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_N)$, kde N je volené tak, aby pre $i > N$ bolo $k_i \doteq 0$. Potom pre $j \geq N$ je

$$(4) \quad y_j = f\left(\sum_{i=0}^N k_i x_{j-i}\right) = f(\mathbf{k}, \mathbf{x}_j)$$

a druhý vektor v skalárnom súčine je $N + 1$ rozmerný vektor vstupného signálu $\mathbf{x}_j = (x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, \dots, x_{j-N})$. Podobne aj členy postupnosti výstupných hodnôt lineárneho modelu sú dané výrazom

$$(5) \quad z_j^{(m)} = \sum_{i=0}^N h_i^{(m)} x_{j-i} = (\mathbf{h}_m, \mathbf{x}_j), \quad (j \geq N),$$

$\mathbf{h}_m = (h_0^{(m)}, h_1^{(m)}, \dots, h_N^{(m)})$ ak ($m = 0, 1, \dots$), je iteračný krok. Ak vstupný signál je realizáciou stacionárneho náhodného procesu, potom je stacionárny i výstupný signál sústavy a medzi hodnotami y_{j+1}, y_{j+2}, \dots sa vyskytne taká, pre ktorú bude platiť $y_{j+r} = y_j$, čiže $f(\mathbf{k}, \mathbf{x}_{j+r}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{x}_j)$. Pretože $f(\cdot)$ je jednojednoznačná funkcia z tejto rovnosti vyplýva, že

$$(6) \quad (\mathbf{k}, \mathbf{x}_{j+r}) - (\mathbf{k}, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{k}, \mathbf{x}_{j+r} - \mathbf{x}_j) = (\mathbf{k}, \Delta \mathbf{x}_j) = 0$$

zatiaľ, čo

$$(7) \quad (\mathbf{h}_m, \mathbf{x}_{j+r}) - (\mathbf{h}_m, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{h}_m, \Delta \mathbf{x}_j) = \Delta z_j^{(m)}.$$

Iteračný krok spočíva v zmenení vektora \mathbf{h}_m na \mathbf{h}_{m+1} takým spôsobom, že ku každej jeho zložke sa pripočíta veľkosť úmerná odpovedajúcej zložke vektora $\Delta \mathbf{x}_j$. Výsledkom tohoto postupu je nový vektor, ktorý spĺňa vzťah

$$(8) \quad (\mathbf{h}_{m+1}, \Delta \mathbf{x}_j) = 0.$$

Pretože každý iteračný krok znamená i vyhľadanie novej dvojice vektorov \mathbf{x}_j a \mathbf{x}_{j+r} , je $m = j - N$ ($j = N, N + 1, \dots$). Potom je

$$(9) \quad \mathbf{h}_{m+1} = \lambda_m \left(\mathbf{h}_m - \frac{\Delta z_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|^2} \Delta \mathbf{x}_{m+N} \right), \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

kde

$$\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|^2 = \sum_{i=0}^N (x_{m+N+r-i} - x_{m+N-i})^2.$$

Skalárny súčin vektorov \mathbf{h}_{m+1} a \mathbf{x}_{m+N} , s uvážením vzťahu (7) je

$$(10) \quad (\mathbf{h}_{m+1}, \Delta \mathbf{x}_{m+N}) = \lambda_m (\Delta z_{m+N} - \Delta z_{m+N}) = 0,$$

čo skutočne vyhovuje požiadavke danej vzťahom (8). Koeficient λ_m musí byť stanovený tak, aby sa pri každom kroku zachovala nezmenená norma vektora impulznej charakteristiky modelu $\|\mathbf{h}_m\| = M$ ($m = 0, 1, \dots$), čiže

$$\|\mathbf{h}_{m+1}\| = \lambda_m \left\| \mathbf{h}_m - \frac{\Delta z_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|^2} \Delta \mathbf{x}_{m+N} \right\| = M,$$

z čoho

$$(11) \quad \lambda_m = \frac{M}{\left\| \mathbf{h}_m - \frac{\Delta z_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|^2} \Delta \mathbf{x}_{m+N} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{(\mathbf{h}_m, \Delta \mathbf{x}_{m+N})}{\|\mathbf{h}_m\| \|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|} \right)^2 \right]}}.$$

Z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti vyplýva nerovnosť

$$(12) \quad \left(\frac{(\mathbf{h}_m, \Delta \mathbf{x}_{m+N})}{\|\mathbf{h}_m\| \|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|} \right)^2 \leq 1$$

a preto

$$\lambda_m \geq 1, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Geometrická interpretácia postupu v $N+1$ rozmernom Euklidovom priestore E_{N+1} je takáto (obr. 1): Vektor $\Delta \mathbf{x}_{m+N}$ je kolmý k nadrovine Π_{m+N} , v ktorej leží vektor \mathbf{k} . Ortoponálnosť vektorov $\Delta \mathbf{x}_{m+N} \perp \mathbf{k}$ vyplýva zo (6). Vektor \mathbf{h}_m zvierá s \mathbf{k} uhol ϑ_m a obecné neleží v nadrovine Π_{m+N} . Vzdialenosť koncového bodu \mathbf{h}_m od nadroviny Π_{m+N} , $\varrho(\mathbf{h}_m, \Pi_{m+N})$, je rovnaká ako priemet vektora \mathbf{h}_m do smeru vektora $\Delta \mathbf{x}_{m+N}$

$$\varrho(\mathbf{h}_m, \Pi_{m+N}) = \left(\mathbf{h}_m, \frac{\Delta \mathbf{x}_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|} \right).$$

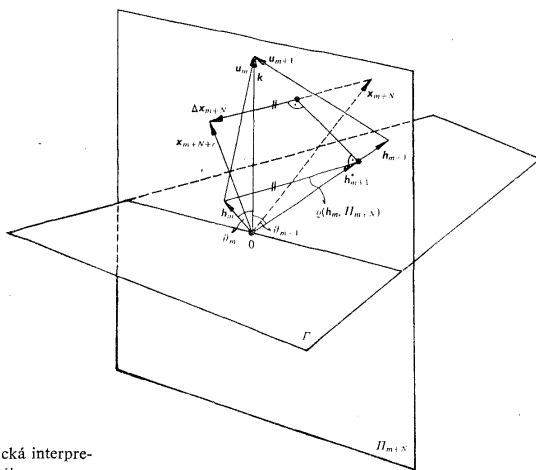
Vektor \mathbf{h}_{m+1}^* , ktorý vznikne pripočítaním

$$-\varrho(\mathbf{h}_m, \Pi_{m+N}) \frac{\Delta \mathbf{x}_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|}$$

ku pôvodnému \mathbf{h}_m ,

$$(13) \quad \mathbf{h}_{m+1}^* = \mathbf{h}_m - \left(\mathbf{h}_m, \frac{\Delta \mathbf{x}_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|} \right) \frac{\Delta \mathbf{x}_{m+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m+N}\|},$$

236 leží v nadrovine Π_{m+N} a zvierá s vektorom \mathbf{k} uhol $\vartheta_{m+1} < \vartheta_m$. To isté platí i pre vektor $\mathbf{h}_{m+1} = \lambda_m \mathbf{h}_m^*$. Nadrovina Γ kolmá na smer vektora \mathbf{k} a prechádzajúca počiatkom O rozdeľuje Euklidov priestor E_{N+1} na dva polopriestory $E_{N+1}^{(+)}$ a $E_{N+1}^{(-)}$, v ktorých je $(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) > 0$, $((\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) < 0)$, ak $\mathbf{h}_m \in E_{N+1}^{(+)}$ ($\mathbf{h}_m \in E_{N+1}^{(-)}$).



Obr. 1. Geometrická interpretácia identifikačného procesu.

KONVERGENCIA METÓDY

Vektor chyby identifikácie pri m -tom iteračnom kroku je

$$(14) \quad \mathbf{u}_m = \mathbf{k} - \mathbf{h}_m.$$

Nech je norma vektora impulznej charakteristiky $\|\mathbf{h}_m\| = M$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) volená tak, aby $M = \|\mathbf{k}\|$, potom norma vektora chyby identifikácie je

$$(15) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u}_m\|^2 &= (\mathbf{k} - \mathbf{h}_m, \mathbf{k} - \mathbf{h}_m) = \|\mathbf{k}\|^2 - 2(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) + \|\mathbf{h}_m\|^2 = \\ &= 2[M^2 - (\mathbf{k}, \mathbf{h}_m)] \end{aligned}$$

a

$$(16) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m\|^2 = 2M^2 - 2 \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{k}, \mathbf{h}_m).$$

Postupnosť skalárnych súčínov $\{(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m)\}$ má tieto vlastnosti:

1. Je ohraničená, $-M^2 \leq (\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) \leq M^2$, pričom dolná a horná hranica je súčasne infimum resp. supremum hodnôt skalárnych súčinov.

2. Je neklesajúca (nerastúca) keď $\mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(+)}$ ($\mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(-)}$).

Vlastnosť 1 plynie priamo z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti

$$|(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m)| \leq \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{h}_m\| = M^2.$$

Dôkaz tvrdenia 2 je nasledovný:

$$(17) \quad (\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) = \left(\mathbf{k}, \lambda_{m-1} \left(\mathbf{h}_{m-1} - (\mathbf{h}_{m-1}, \Delta \mathbf{x}_{m-1+N}) \frac{\Delta \mathbf{x}_{m-1+N}}{\|\Delta \mathbf{x}_{m-1+N}\|^2} \right) \right) = \\ = \lambda_{m-1} (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}),$$

pretože

$$\lambda_m \geq 1, \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

potom

$$(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) \geq (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) \quad \text{ak} \quad (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) > 0,$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) \leq (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) \quad \text{ak} \quad (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) < 0.$$

Ďalším rozvinutím skalárneho súčinu $(\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1})$ pomocou koeficientov λ_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, m-2$) je

$$(18) \quad (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) = \lambda_{m-2} \cdot \lambda_{m-3} \cdot \dots \cdot \lambda_0 (\mathbf{k}, \mathbf{h}_0).$$

Z výrazu (18) je zrejmé, že $\text{sign}(\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) = \text{sign}(\mathbf{k}, \mathbf{h}_0)$ a preto ak bolo zvolené $\mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(+)}$, ($\mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(-)}$) potom je $(\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) > 0$, ($(\mathbf{k}, \mathbf{h}_{m-1}) < 0$).

Na základe vlastností 1 a 2 je preto správne tvrdenie:

Postupnosť skalárnych súčinov $\{(\mathbf{k}, \mathbf{h}_m)\}$ je konvergentná a má limitu

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{k}, \mathbf{h}_m) = \begin{cases} M^2, & \text{ak } \mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(+)}, \\ -M^2, & \text{ak } \mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(-)}. \end{cases}$$

Limita normy vektora identifikačnej chyby je potom

$$(19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m\| = \begin{cases} 0, & \text{pre } \mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(+)}, \\ 2M, & \text{pre } \mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(-)}. \end{cases}$$

V prvom hraničnom prípade sa aproximačný vektor stotožnil s vektorom \mathbf{k} , v druhom prípade ležia oba vektory v jednej priamke, sú však opačne orientované. Všeobecne je číslo M volené $M \neq \|\mathbf{k}\|$, potom

$$(20) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{h}_m = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \mathbf{k}, & \text{pre } \mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(+)}, \\ -\frac{1}{\alpha} \mathbf{k}, & \text{pre } \mathbf{h}_0 \in E_{N+1}^{(-)}, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{k}\|}{M} > 0.$$

Tretia možnosť voľby počiatočného vektora $\mathbf{h}_0 \in \Gamma$, nezaručuje konvergenciu metódy, pretože všetky vektory \mathbf{h}_m , ($m = 1, 2, \dots$) zostávajú v deliacej nadrovine Γ . Tento prípad je však málo pravdepodobný a vhodným spôsobom výberu \mathbf{h}_0 sa dá úplne vylúčiť.

Z horeuvedeného nevyplývajú pre vstupný signál žiadne špecifickejšie požiadavky. Nezávislosť konvergencie metódy na vlastnostiach vstupného signálu bola experimentálne potvrdená v citovanej práci (2).

Tým bolo dokázané, že použitie kritéria identifikácie tvaru

$$(21) \quad Q = \Delta z_m = (\mathbf{h}_m, \mathbf{x}_{m+r} - \mathbf{x}_m), \quad (m = 1, 2, \dots),$$

kde \mathbf{x}_{m+r} a \mathbf{x}_m splňujú vzťah

$$(\mathbf{k}, \mathbf{x}_{m+r}) = (\mathbf{k}, \mathbf{x}_m), \quad (m = 1, 2, \dots),$$

dovoľuje vyšetriť dynamické vlastnosti danej nelineárnej sústavy bez ohľadu na statický nelineárny obvod v nej obsiahnutý. Statická charakteristika $f(\cdot)$ sa získa sledovaním výstupných veličín modelu a sústavy fázovej roviny ZY počas pôsobenia signálu $\{x_j\}$ na ich vstupoch. Pretože platí

$$z_j^{(\infty)} = \lim_{m \rightarrow \infty} z_j^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{h}_m, \mathbf{x}_j) = \pm \left(\frac{\mathbf{k}}{\alpha}, \mathbf{x}_j \right) = \pm \frac{1}{\alpha} x_j^*, \quad (j \geq N),$$

získaná závislosť $y_j = \varphi(z_j^{(\infty)})$ v rovine ZY aproximuje charakteristiku nelineárneho statického prvku $y_j = f\left[\frac{1}{\alpha} x_j^*\right]$ z roviny X^*Y . Získaná statická charakteristika sa líši od skutočnej len merítkom na osi premennej x , daným konštantou úmernosti α , ktorá je zahrnutá v impulznej charakteristike lineárneho modelu.

VÝSLEDKY EXPERIMENTÁLNEHO OVERENIA METÓDY

Iteračný postup identifikácie bol modelovaný číslicovým počítačom pre dané štyri nelineárne sústavy:

$$\text{NS 1:} \quad y(t) = \text{sign}(\mathbf{k}, \mathbf{x}(t)) \cdot (\mathbf{k}, \mathbf{x}(t))^2,$$

$$\text{NS 2:} \quad y(t) = \text{arctg}(\mathbf{k}, \mathbf{x}(t)) \cdot (\mathbf{k}, \mathbf{x}(t))^2,$$

kde

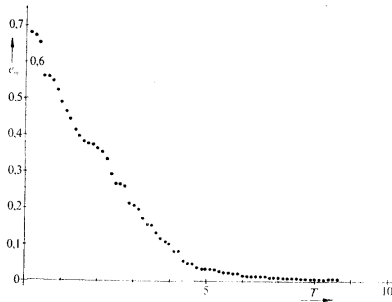
$$(\mathbf{k}, \mathbf{x}(t)) = 1,155 \int_0^t e^{-0,5\tau} \sin 0,866\tau \cdot x(t - \tau) d\tau,$$

NS 3: $y(t) = \text{sign}(k, x(t)) \cdot (k, x(t))^2,$

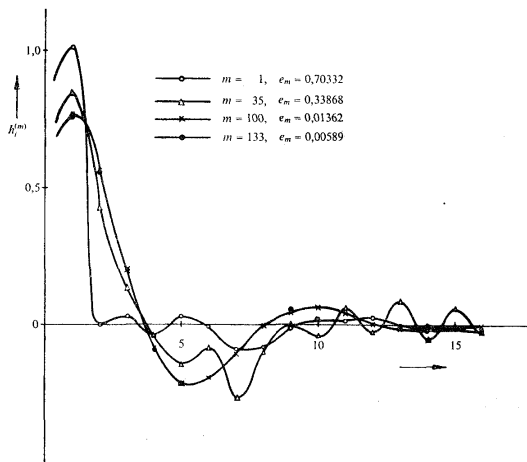
NS 4: $y(t) = \text{arctg}(k, x(t)) \cdot (k, x(t))^2,$

kde

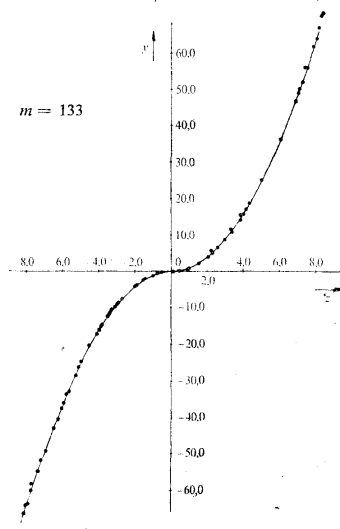
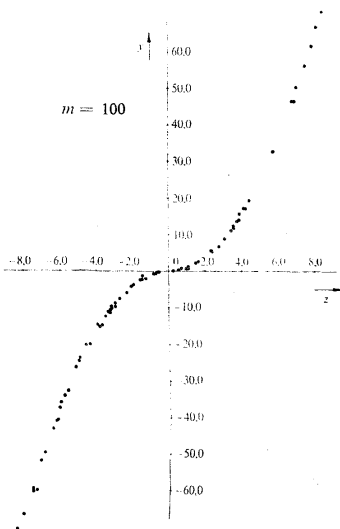
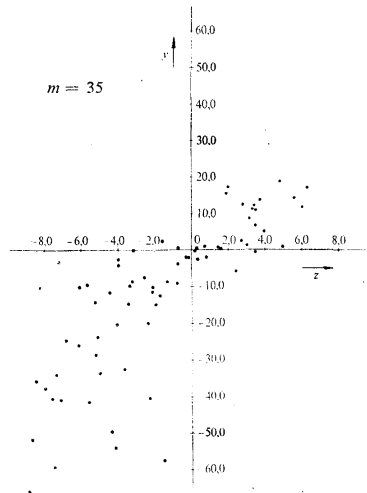
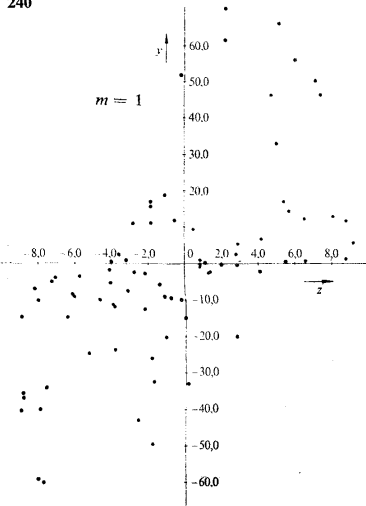
$$(k, x(t)) = 1,0603 \int_0^t e^{-0,219\tau} \cos(0,5621\tau - 1,02) \cdot x(t - \tau) d\tau.$$



Obr. 2. Typická konvergencia normalizovanej chyby identifikácie e_m . Vyšetovaná sústava NS 1, $T = m/N$, $N = 16$.



Obr. 3. Impulzné charakteristiky lineárneho modelu, $h_m = (h_1^{(m)}, h_2^{(m)}, \dots, h_{16}^{(m)})$, dosiahnuté pri počte iterácií m .



Vstup bol tvorený postupnosťou 1500 náhodných hodnôt s normálnym rozdelením. Norma vektora \mathbf{h}_m , ($m = 0, 1, 2, \dots$) bola volená tak, aby $\|\mathbf{h}_m\| = M = \|\mathbf{k}\|$ a počítačový vektor $\mathbf{h}_0 = (h_0^{(0)}, h_1^{(0)}, \dots, h_N^{(0)}) = (M, 0, \dots, 0)$. Presnosť výberu dvojice výstupných hodnôt určoval vzťah

$$|y_j - y_{j+1}| \leq 10^{-2}|y_j|, \quad (j \geq N).$$

Normalizovaná chyba identifikácie definovaná vzťahom

$$(22) \quad e_m = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{h}_m\|}{M}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

môže nadobúdať hodnoty $0 < e_m < \sqrt{2}$. Počet vyšetřovaných zložiek $N = 8, 16$. Proces identifikácie vo všetkých príkladoch prebiehal v podstate rovnako. Na obrázku

Tabuľka 1.

N	$e_m/\sqrt{2}$	10%	5%	1%
		$T = m/N$		
8		2,16	3,06	5,75
16		4,53	5,29	8,29

2, 3 a 4 je znázornený typický priebeh konvergencie procesu identifikácie sústavy NS 1. Tabuľka 1 zhrňuje výsledky identifikácie daných štyroch nelineárnych sústav.

ZÁVER

Bola popísaná iteračná metóda identifikácie nelineárnych sústav typu: dynamický lineárny člen + statický nelineárny obvod. Pomocou kritéria identifikácie, ktoré je invariantné k nelinearite vyšetřovanej sústavy, rozdelí sa proces identifikácie na dve etapy: 1. Identifikácia impulznej charakteristiky lineárnej časti sústavy. 2. Identifikácia statickej nelineárnej charakteristiky. Vstupným signálom pri identifikácii je náhodný proces, čo dovoľuje využiť metódu počas normálneho pracovného režimu objektu. Sú uvedené výsledky simulácie popísanej metódy číslivým počítačom.

(Došlo dňa 4. júla 1968.)

Obr. 4. Zobrazenie hodnôt výstupnej veličiny vyšetřovanej sústavy a modelu v rovine ZY pre cca 100 náhodne zvolených vstupných vektorov \mathbf{x}_j ($j = 1, \dots, 100$), po dosiahnutí počtu iterácií m . Plnou čiarou je znázornená skutočná statická charakteristika nelineárneho člena $y = x^{*2} \text{sign } x^*$.

- [1] Metódy identifikácie sústav s použitím dynamických modelov. Správa Z — 30. Ústav technickej kybernetiky SAV, Bratislava 1968.
- [2] J. Nagumo, A. Noda: Learning Method for System Identification. IEEE Trans. on Aut. Control *AC* — 12 (1967), 3, 282—287.

SUMMARY**Iterative Method of Identification of Nonlinear Systems**

IVAN KNEPPO

Nonlinear systems formed by serial connection of a linear dynamical part and a nonlinear static circuit form a large class of controlled systems. Using the criterion of identification invariant to the nonlinearity of the system the parameters of the linear part can be investigated by means of the linear identification method. When measuring the pairs of input vectors for which the output of the nonlinear system takes the same value, we obtain the basis for forming a proper criterion. To each pair of vectors corresponds one iteration step by which the approximative weighting function is being brought to accuracy successively.

The convergence of the method follows from the boundedness and monotonicity of the sequence of weighting functions. The nonlinear characteristic is investigated in the phase plane by the simultaneous observing of outputs of the nonlinear system and of the obtained approximative nonlinear model.

The input signal is random, whereby no special demands are taxed to its statistical properties.

The use of the method is shown on four examples.

Ing. Ivan Kneppo, CSc., Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava.