KYBERNETIKA ČÍSLO 3, ROČNÍK 5/1969

Über die Fejérschen Polynome und einige diskrete Filter und Signale

LUDVÍK PROUZA

Es wird der Zusammenhang der Fejérschen Polynome und einiger diskreter Filter und Signale näher beleuchtet.

1. EINLEITUNG

Im verflossenen Jahrzehnt hat sich in der Theorie der diskreten Filter und Signale die steigende Bedeutung von Fejérschen Polynomen gezeigt (s. Literatur). Im Weiteren wollen wir mit den elementaren Methoden der ursprünglichen Fejérschen Abhandlung [1] zwei praktisch interessante Resultate herleiten.

Im Jahre 1916 (s. [1]) hat F. Riesz folgende Fejérsche Vermutung bewiesen:

Es sei

$$\tau(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \ldots + \lambda_{n-1} \cos (n-1) t + \mu_{n-1} \sin (n-1) t \tag{1}$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom, welches für jedes reelle t nicht negativ ist. Dann gibt es mindestens ein Polynom der komplexen Veränderlichen z

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_{n-1} z^{n-1}\,, \tag{2}$$

so dass für jedes reelle t gilt

$$\tau(t) = |\gamma(z)|^2_{z=e^{it}}\,. \tag{3}$$

Einige spezielle Fälle davon waren damals bereits bekannt, z.B.

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 = \tag{4}$$

$$= \frac{n + 2(n-1)\cos t + 2(n-2)\cos 2t + \ldots + 2\cos(n-1)t}{n} =$$

$$= \frac{|1 + z + \ldots + z^{n-1}|^2}{n}.$$

Dies ist der aus der Theorie der Fourierreihen bekannte Fejérsche Kern, in der Mitte als ein nichtnegatives Kosinuspolynom, rechts nach Toeplitz mittels eines Polynoms der Art (2) ausgedrückt.

Fejér hat gezeigt, dass allgemein jedes nichtnegative Kosinuspolynom (1) mittels eines Polynoms (2) mit lauter reellen Koeffizienten ausgedrückt werden kann.

Interpretieren wir z als einer Einheitsverschiebung entsprechend, so bedeutet

$$z^{-n+1} \frac{1 + z + \ldots + z^{n-1}}{n} \tag{5}$$

ein der Erzeugung des arithmetischen Mittels entsprechendes diskretes Filter. Das Glied z^{-n+1} wurde hier physikalischer Realisierbarkeit wegen eingeführt und man kann darauf bekanntlich verzichten, wenn in den Anwendungen die Zeitverschiebung keine Rolle spielt.

Aus dem Ausdruck

$$1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} \tag{6}$$

ist es klar, dass die $n - 1$ Wurzeln des (annulierten) Polynoms links in (6) auf dem Einheitskreise in allen komplexen Werten von $\sqrt[n]{1}$ liegen mit der Ausnahme $z = 1$.

Zugleich sieht man aus (6) (und der geometrischen Vorstellung), dass das Filter in (5) als Kaskade eines „Verstärkers“ mit „Verstärkung“ $1/n$, eines Kammfilters mit der Übertragung $1 - z^{-n}$ und eines Summators mit der Übertragung $z/(z - 1)$ realisiert werden kann.

Die selektive Eigenschaft des Fejérschen Kerns und des arithmetischen Mittels war also (diejenige des Letzteren in der mathematischen Statistik sogar seit langem) bekannt, als Fejér in [1] folgenden Satz bewiesen hat:

Unter allen nichtnegativen trigonometrischen Polynomen (1) mit $\lambda_0 = 1$ ist das Polynom in der Mitte in (4) das einzige, das für $t = 0$ den grössten Wert erreicht. Dieser Wert ist n.

Auf Grund dieses Satzes hat Fejér weiter das Polynom gezeigt, das für ein allgemeines $t \neq 0$ $(-\pi < t \leqq \pi)$ mit $\lambda_0 = 1$ das Maximum erreicht. Dieses Maximum ist wieder n und das Polynom entsteht aus (4) durch eine Drehung der Wurzelkonfiguration um den Winkel t (in Übereinstimmung mit der geometrischen Vorstellung).

Es ist klar, dass hier mit den Ausnahmen $t = 0, \pi$ das Polynom (1) kein reines

Kosinuspolynom ist, d.h. es existiert kein Polynom (2) mit lauter reellen Koeffizienten, für das (3) gilt.

2. DIE FEJÉRSCHEN POLYNOME UND EINE KLASSE VON DISKRETEN FILTERN

Der Ausdruck (3) stellt in Betracht auf seine Koeffizienten eine nichtnegative Hermitesche Form dar

$$\tau(t) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma_j|^2 + e^{it} \sum_{j=0}^{n-2} \bar{\gamma}_j \gamma_{j+1} + e^{-it} \sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j \bar{\gamma}_{j+1} + \ldots + e^{i(n-1)t} \bar{\gamma}_0 \gamma_{n-1} + e^{-i(n-1)t} \gamma_0 \bar{\gamma}_{n-1}, \tag{7}$$

wo mit Strich komplex konjugierte Werte bezeichnet werden.

Dabei ist

$$\lambda_0 = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma_j|^2 . \tag{8}$$

Nach dem bekannten fundamentalen Satz über die Extrema der Hermiteschen Formen ist also das Maximum von (7) mit der Nebenbedingung $\lambda_0 = 1$ gleich der grössten Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$H(\varrho) = \begin{vmatrix} 1-\varrho, & e^{it}, & e^{i2t}, \ldots, & e^{i(n-1)t} \\ e^{-it}, & 1-\varrho, & e^{it}, \ldots, & e^{i(n-2)t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-i(n-1)t}, & & \ldots, & 1-\varrho \end{vmatrix} = 0 . \tag{9}$$

Nehmen wir nun das Resultat Fejérs als bekannt an, dass dieses Maximum n ist, so folgt daraus, dass die Gleichung (9) eine einfache Wurzel $\varrho = n$ und eine $n-1$ fache Wurzel $\varrho = 0$ hat.

Denn alle Wurzeln von (9) sind als Eigenwerte, die zur nichtnegativen Form (7) gehören, bekanntlich auch nichtnegativ und es gilt weiter

$$\operatorname{Sp} \boldsymbol{H} = \sum_{j=0}^{n-1} \varrho_j = n . \tag{10}$$

Dabei bedeutet $\boldsymbol{H}$ die Matrix der Form (7) und Sp $\boldsymbol{H}$ ihre Spur. Aus (10) ist unsere Behauptung sofort klar.

Übrigens könnte man auf rekurrente Weise unschwer beweisen, dass

$$H(\varrho) = (n-\varrho)(-\varrho)^{n-1} , \tag{11}$$

wir werden es aber nicht brauchen.

 Es sei nun (k ganz)

$$t = \frac{2k\pi}{n}, \quad t \neq \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix}. \tag{12}$$

In der Wurzelkonfiguration des Fejérschen Maximalpolynoms entspricht dann dem Werte $\exp it$ (der ausgelassenen Wurzel) die Wurzel $\exp(-it)$, durch deren Auslassen ein Polynom der Art (2) entsteht, und zwar ist es das Polynom

$$\Pi(z) = \frac{z^n - 1}{(z - \varepsilon^k)(z - \varepsilon^{-k})} = \frac{z^n - 1}{z^2 - 2z\cos t + 1} = \tag{13}$$
$$= \delta_0 + \delta_1 z + \ldots + \delta_{n-2} z^{n-2},$$

wo ε die primitive $\sqrt[n]{1}$ bedeutet.

Über dieses Polynom wollen wir einen Satz beweisen. Bevor wir das machen, zeigen wir einige seine Eigenschaften.

Die Koeffizienten in (13) sind leicht zu berechnen, und zwar aus der Entwicklung

$$\frac{1}{z^2 - 2z\cos t + 1} = \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \ldots \tag{14}$$

Aus (13), (14) ist effenbar

$$\delta_m = \alpha_{n-m} \quad (m = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{15}$$

Durch Lösung der zu (14) zugehörigen Differenzengleichung mit den Anfangsbedingungen

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 2\cos t \tag{16}$$

bekommt man

$$\alpha_m = a\varepsilon^{km} + b\varepsilon^{-km} \tag{17}$$

mit

$$a = \frac{\varepsilon^{-k}}{\varepsilon^k - \varepsilon^{-k}}, \quad b = -\frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^k - \varepsilon^{-k}}, \tag{18}$$

also

$$\alpha_m = \frac{\sin(m-1)t}{\sin t}. \tag{19}$$

Aus (15), (17) folgt

$$\alpha_{n-m} = -\alpha_{m+2}, \tag{20}$$
$$\delta_{n-m} = -\delta_{m-2},$$

folglich

$$\delta_m = -\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}. \tag{21}$$

Durch eine leichte Berechnung bekommt man

$$\left|\frac{z^n - 1}{z^2 - 2z\cos t + 1}\right|^2_{z=e^{i\varphi}} = \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{(\cos\varphi - \cos t)^2} \tag{22}$$

(s. [8], wo such andere Eigenschaften von (13) angeführt sind).
Weiter bekommt man

$$\sum_{j=0}^{n-2} \delta_j^2 = \frac{n}{2\sin^2 t}. \tag{23}$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Unter allen Polynomen der Art* (2) *mit reellen Koeffizienten, des Grades* $n-2$ *und mit* $\sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j^2 = 1$ *ist das Polynom*

$$\gamma^*(z) = \sqrt{\left(\frac{2\sin^2 t}{n}\right)}\, \Pi(z) \tag{24}$$

das einzige, dessen Quadrat des Moduls im Punkte (12) *das Maximum erreicht. Dieses Maximum ist* $n/2$.

Beweis. Statt der Hermiteschen Form haben wir jetzt mit der folgenden nicht-negativen quadratischen Form zu tun

$$\tau(t) = \sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j^2 + 2\cos t \sum_{j=0}^{n-3} \gamma_j \gamma_{j+1} + \ldots + 2\cos(n-2)t \,.\, \gamma_0 \gamma_{n-2}. \tag{25}$$

Ihr Maximum bei $\lambda_0 = 1$ gleicht der grössten Wurzel der charakteristischen Gleichung (t aus (12))

$$G(\varrho) = \begin{vmatrix} 1-\varrho, & \cos t, & \cos 2t, & \ldots, & \cos(n-2)t \\ \cos t, & 1-\varrho, & \cos t, & \ldots, & \cos(n-3)t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(n-2)t, & & & \ldots, & 1-\varrho \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Betrachten wir das Gleichungssystem (mit irgendwelchen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}$ und t aus (12)

$$\gamma_0\left(1 - \frac{n}{2}\right) + \gamma_1 \cos t + \ldots + \gamma_{n-2}\cos(n-2)t = 0, \tag{27}$$

$$\gamma_0 \cos t + \gamma_1 \left(1 - \frac{n}{2}\right) + \ldots + \gamma_{n-2} \cos (n-3)\, t = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_0 \cos (n-2)\, t + \ldots + \gamma_{n-2} \left(1 - \frac{n}{2}\right) = 0\,.$$

Ist dieses System mit den Werten (21) erfüllt, so hat die Gleichung (26) die Wurzel $n/2$.

Betrachten wir die $m+1$-te Gleichung aus (27)

$$\delta_0 \cos mt + \delta_1 \cos (m-1)\, t + \ldots + \delta_{m-1} \cos t + \tag{28}$$

$$+ \delta_m + \delta_{m+1} \cos t + \ldots + \delta_{n-2} \cos (n-2-m)\, t = \delta_m \frac{n}{2}\,.$$

Die doppelte linke Seite von (28) kann mit Hilfe von (13) folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\lim_{z \to \varepsilon^k} \left[\frac{z^{n-m} - z^{-m}}{z^2 - 2z \cos t + 1} + \frac{z^{-n+m} - z^m}{z^{-2} - 2z^{-1} \cos t + 1} \right] = \tag{29}$$

$$= \left[\frac{(n-m)\, z^{n-m-1} + mz^{-m-1}}{2(z - \cos t)} + \frac{(n-m)\, z^{-n+m+1} + mz^{m+1}}{2(z^{-1} - \cos t)} \right]_{z=\varepsilon^k} =$$

$$= \frac{n\varepsilon^{-k(m+1)}}{2i \sin t} - \frac{n\varepsilon^{k(m+1)}}{2i \sin t} = -n \frac{\sin (m+1)\, t}{\sin t}\,.$$

Wegen (21) stimmt das mit der rechten Seite von (28) überein. In (29) haben wir die Hospitalsche Regel benutzt und die Relationen

$$\varepsilon^{kn} = 1\,, \tag{30}$$

$$\varepsilon^k - \cos t = \mathrm{i} \sin t\,.$$

Also ist $\varrho = n/2$ die Wurzel von (26). Da diese Gleichung nur nichtnegative Wurzeln hat und

$$\operatorname{Sp} \boldsymbol{G} = \sum_{j=0}^{n-2} \varrho_j = n - 1\,, \tag{31}$$

wo $\boldsymbol{G}$ die Matrix von (25) ist, so ist die Wurzel $n/2$ offenbar einfach und maximal.

Wegen (23) ist also somit der Satz 1 bewiesen.

Das zur Übertragungsfunktion (13) zugehörige Filter kann man offenbar als eine Kaskade vom Kammifilter und dem Resonanzfilter mit den Polen exp it, exp$(-\mathrm{i}t)$ realisieren. Durch das Parallelschalten mehrerer Resonanzfilter (entsprechend mehreren Werten von k in (12)) mit passenden Gewichtskoeffizienten können diskrete Filter mit mannigfachen Übertragungsfunktionen realisiert werden (s. [5] und [8]) – die Filterklasse von B. F. Logan.

3. DIE FEJÉRSCHEN POLYNOME UND EINE KLASSE VON DISKRETEN SIGNALEN

Es sei $\{\gamma_m\}$ eine reelle Folge, in der die Glieder ausser $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ Null sind. Weiter ist $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_{n-1} \neq 0$. Die Folge interpretieren wir als ein Signal, das von einem „zeitverschobenen" Signal $\{\gamma_{m+\nu}\}$, $(\nu \neq 0)$ abgesondert werden soll.

Als Mass der Absonderung nehmen wir nach Woodward den Ausdruck

$$\sum_{m=0}^{n-1} (\gamma_m - \gamma_{m+\nu})^2 , \tag{32}$$

wobei wieder $\lambda_0 = \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m^2 = 1$ gilt. Der Ausdruck (32) soll für $\nu \neq 0$ „gross" sein. Eine kleine Berechnung zeigt, dass es dasselbe ist als zu verlangen, dass der Ausdruck

$$\lambda_\nu = 2 \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m \gamma_{m+\nu} \quad (\nu \neq 0) \tag{33}$$

(s. auch (25)) „klein" sein soll (bei $\lambda_0 = 1$).

Die Folge $\lambda_0, \frac{1}{2}\lambda_1, \ldots$ heisst die „Korrelationsfolge" des Signals und wird bekanntlich entweder durch Multiplizieren nach (33) oder mittels eines besonderen „signalangepassten" Filters erzeugt. Die „Kleinheit" wird im gewöhnlichen Sinn verlangt, es sind also die absolut grossen negativen Werte zulässig, ja erwünscht.

Setzen wir voraus, dass die „Verschiebung" $\nu \neq 0$ verschieden sein kann. Dann scheint es natürlich zu verlagen

$$2 \sum_{\nu \neq 0} \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m \gamma_{m+\nu} = \sum_{\nu \neq 0} \lambda_\nu = \min \tag{34}$$

mit der Nebenbedingung $\lambda_0 = 1$.

Satz 2. *Das Minimum von* (34) *bei* $\lambda_0 = 1$ *wird durch alle Signale erfüllt, für welche*

$$\sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m = 0 \tag{35}$$

gilt. Das Minimum gleicht -1.

Beweis. Durch Vergleich von (34) mit (7), (9), (25) und (26) bei $t = 0$ sieht man, dass das Minimum von (34) bei $\lambda_0 = 1$ der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$F(\sigma) = \begin{vmatrix} -\sigma, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & -\sigma, & 1, & \dots, & 1 \\ & & \vdots & & \\ 1, & 1, & & \dots, & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{36}$$

Die Determinante hat n Reihen. Setzen wir

$$-\sigma = 1 - \varrho \,, \tag{37}$$

so sehen wir nach (11), dass die kleinste Wurzel von (36) gleicht -1. Durch Lösung des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{F} \,.\, \boldsymbol{x} = (-1) \,.\, \boldsymbol{x} \tag{38}$$

kann man sich leicht überzeugen, dass noch (35) zu $\lambda_0 = 1$ beitritt. Somit ist der Satz 2 bewiesen.

Ohne die allgemeine Lösung zu untersuchen, sehen wir sofort, dass für ein gerades n die beiden Bedingungen durch Binärsignale erfüllt sind, in denen

$$|\gamma_0| = |\gamma_1| = \dots = |\gamma_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{39}$$

und die Anzahl der Plus- und Minusvorzeichen dieselbe ist.

Die praktische Brauchbarkeit des Signals hängt von der Vorzeichenanordnung ab. Es ist ersichtlich, dass der ungünstigste Fall dem regelmässigen Vorzeichenwechsel entspricht. Dann ist

$$\lambda_2/2 = \gamma_0\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \dots + \gamma_{n-3}\gamma_{n-1} = \frac{n-2}{n} \tag{40}$$

und das ist (im Vergleich mit $\lambda_0 = 1$ und für nicht zu kleine n) nicht klein.

Der günstigste Fall ist natürlich durch

$$\min_{(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})} \; \max_{\nu \neq 0} \lambda_\nu \tag{41}$$

gegeben. Es scheint leider, dass es bisher keine Lösung zu (41) bekannt ist (abgesehen von der empirischen „exhaustiven“ Methode). Es scheint, eine Art „Unregelmässigkeit“ der Vorzeichenfolge im Signal sei für die Lösung charakteristisch, ebenso wie es in [3], [4] der Fall ist oder bei den sog. Pseudozufallfolgen, wo es sich ebenso um bisher ungelöste Probleme handelt.

(Eingegangen am 3. Mai 1968.)

[1] Fejér, L.: Über trigonometrische Polynome. Journ. f. d. reine und angew. Math. (1916), 53—82.
[2] Grenander, U. - Szegö, G.: Toeplitz Forms and Their Applications. Univ. of Calif. Press, Berkeley 1958.
[3] Huffman, D. A.: The Generation of Impulse-Equivalent Pulse Trains. IRE Trans. *IT-8* (1962), 5, 10—16.
[4] Chaffmen, D. A.: Issledovanie signalov, ekvivalentnych impulsu. Radiotechn. (1964), 8, 3—8.
[5] Golden, R. M.: Digital Computer Simulation of a Sampled — Data Voice — Excited Vocoder. Jour. Acoust. Soc. Amer. (1963), 9, 1358—1366.
[6] Capon, J.: Optimum Weighting Finctions for the Detection of Sampled Signals in Noise. IEEE Trans. *IT-10* (1964), 2, 152—159.
[7] Robinson, E. A.: Optimum Weighting Functions for the Detection of Sampled Signals in Noise. IEEE Trans. *IT-11* (1965), 3, 452—453.
[8] Rader, C. M. - Gold, B.: Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain. Proc. IEEE (1967), 2, 149—171.

VÝTAH

O Fejérových mnohočlenech a některých diskrétních filtrech a signálech

LUDVÍK PROUZA

V článku se dokazují tyto dvě věty:

Věta 1. *Mezi všemi mnohočleny*

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_{n-2} z^{n-2}$$

s reálnými koeficienty a s

$$\sum_{m=0}^{n-2} \gamma_m^2 = 1$$

má právě mnohočlen

$$\gamma^*(z) = \sqrt{\left(\frac{2 \sin^2 t}{n}\right)} \frac{z^n - 1}{z^2 - 2z \cos t + 1}$$

vlastnost, že pro $z = \exp \mathrm{i}t$, *kde* $t = 2k\pi/n$, *k celé*, $t \neq 0, \pi$, *výraz* $|\gamma^*(z)|^2$ *nabývá maxima. Toto maximum je* $n/2$.

Věta 2. *Minimum výrazu*

$$2\sum_{\nu \neq 0} \sum_{m=0}^{n-2} \gamma_m \gamma_{m+\nu}$$

při

$$\sum_{m=0}^{n-2} \gamma_m^2 = 1$$

je dáno podmínkou

$$\sum_{m=0}^{n-2} \gamma_m = 0 \, .$$

Toto minimum je -1.

Ukazuje se význam obou vět pro diskrétní filtry a signály.

Dr. Ludvík Prouza, CSc., Ústav pro výzkum radiotechniky, Opočínek, p. Lány na Důlku.