KYBERNETIKA ČÍSLO 3, ROČNÍK 4/1968

О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито

Р. З. Хасьминский

В настоящей работе применяется принцип усреднения для исследования обобщения системы стохастических дифференциальных уравнений (1.1). Предполагается, что не только медленное ($X_\varepsilon(t)$), но и быстрое ($Y_\varepsilon(t)$) движение представляет собой процесс диффузионного типа. Показывается, что при некоторых предположениях справедлив результат, аналогичный результату в [1], если усреднение в формулах (0.2) понимать в некотором другом смысле.

0. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что важным приемом исследования систем автоматического регулирования является принцип успреднения. В последние годы этот принцип широко применяется и для исследования работы систем, подверженных воздействию случайных помех. В работе [1] доказаны, в частности, теоремы о поведении решений параболических и эллиптических дифференциальных уравнений, позволяющие получить принцип усреднения для систем стохастических дифференциальных уравнений Ито. Соответствующий результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть коэффициенты системы уравнений

$$\mathrm{d}X_\varepsilon(t) = A(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{l} \sigma_r(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)\,\mathrm{d}\xi_r(t)\,, \tag{0.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y_\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon}$$

(X, A, σ_r — векторы из l-мерного евклидова пространства E_l) удовлетворяют условию Липшица по x равномерно относительно y и равномерно относительно x, t существуют пределы средних

(0.2)
$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} A(x, y)\,\mathrm{d}y = \bar{A}(x)\,;$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\sum_{r=1}^{l}\sigma_r^{(i)}\sigma_r^{(j)}(x, y)\,\mathrm{d}y = a_{ij}(x)\,.$$

Тогда конечномерные распределения процесса $X_\varepsilon(t)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса $X_0(t)$, удовлетворяющего системе уравнений

$$\mathrm{d}X_0(t) = \bar{A}(X_0)\,\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{l}\bar{\sigma}_r(X_0)\,\mathrm{d}\xi_r(t)\,,$$

где матрица $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_l)$ представляет собой квадратный корень из симметричной матрицы $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$.

В работах И. И. Гихмана [2] и И. Вркоча [3] принцип усреднения был обоснован непосредственно для стохастических уравнений, причем рассматривались стохастические уравнения более общей природы, чем (0.1) и изучались в основном, условия, когда решение сходится к пределу в среднем квадратическом. (Поэтому в [2] и [3] вместо второго условия (0.2) авторам пришлось наложить гораздо более ограничительное условие.)

В настоящей работе будет предполагаться, что не только медленное ($X_\varepsilon(t)$), но и быстрое ($Y_\varepsilon(t)$) движение представляет собой процесс диффузионного типа. Будет показано, что при некоторых предположениях справедлив результат, аналогичный вышеприведенному, если усреднение в формулах (0.2) понимать в некотором другом смысле.

Отметим, что это расширение существенно при исследовании работы нелинейных систем автоматического регулирования, близких к гамильтоновым (см. § 5).

1.

Пусть $(X_r^{(\varepsilon)}(t), Y_r^{(\varepsilon)}(t))$ — семейство марковских случайных процессов в E_l, описываемое системой стохастических уравнений Ито

(1.1)
$$\mathrm{d}X_i^{(\varepsilon)}(t) = A_i(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\,\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{l}\sigma_i^{(r)}(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)}),\,\mathrm{d}\xi_r(t)\,,$$

$$\mathrm{d}Y_j^{(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{\varepsilon}B_j(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{r=1}^{l}\varphi_j^{(r)}(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\,\mathrm{d}\xi_r(t)$$

$$(i = 1, \ldots, l_1;\; j = 1, \ldots, l_2;\; l_1 + l_2 = l)$$

 и начальным условием

$$X^{(\varepsilon)}(0) = x_0\ ;\quad Y^{(\varepsilon)}(0) = y_0\,, \tag{1.2}$$

где $\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$ — независимые между собой винеровские процессы, удовлетворяющие условиям

$$\mathsf{M}\xi_r(t) = 0\ ;\quad \mathsf{M}\xi_r^2(t) = t\,. \tag{1.3}$$

Будем обозначать $\mathscr{N}_t$ σ-алгебру событий, порожденных событиями вида $\{\xi_r(s) < x_r;\ r = 1, \ldots, l; s \leqq t\}$.

Процесс $X^{(\varepsilon)}(t)$ естественно назвать „медленной", а процесс $Y^{(\varepsilon)}(t)$ — „быстрой" компонентой рассматриваемого движения.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(A1) Векторы A, $\sigma^{(r)}$ из E_{l_1} и B, $\varphi^{(r)}$ из E_{l_2} удовлетворяют условию Липшица по x, y и кроме того, выполнено неравенство

$$|A(x, y)| + \sum_{r=1}^{l} |\sigma^{(r)}(x, y)|^2 \leqq c(1 + |x|^2)\,. \tag{1.4}$$

(A2) Для процесса $Y^{(x,y)}(t)$, описываемого стохастическим уравнением Ито

$$\mathrm{d}Y^{(x,y)}(t) = B(x, Y^{(x,y)}(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{l} \varphi^{(r)}(x, Y^{(x,y)}(t))\,\mathrm{d}\xi_r(t) \tag{1.5}$$

и начальным условием

$$Y^{(x,y)}(0) = y\,, \tag{1.6}$$

существуют функции $\bar{A}(x)$ и $a_{ij}(x)$ такие, что для некоторой функции $\alpha(\tau)$, стремящейся к нулю при $\tau \to \infty$, выполнены неравенства

$$\left|\mathsf{M}\,\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} A(x, Y^{(x,y)}(s))\,\mathrm{d}s - \bar{A}(x)\right| < \alpha(\tau)(1 + |x|^2)\,, \tag{1.7}$$

$$\left|\mathsf{M}\,\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \sum_{r=1}^{l} \sigma_i^{(r)}\sigma_j^{(r)}(x, Y^{(x,y)}(s))\,\mathrm{d}s - a_{ij}(x)\right| < \alpha(\tau)(1 + |x|^2)\,. \tag{1.8}$$

Для некоторых приложений (см. § 5) условия (1.4), (1.7), (1.8) слишком ограничительны. Поэтому вместо условий (A1), (A2), мы будем рассматривать часто условия:

(B1) Векторы A, $\sigma^{(r)}$, B, $\varphi^{(r)}$ удовлетворяют условию Липшица по x, y и, кроме того, существует такая $\mathcal{N}_t$-измеримая случайная величина $Z(t)$, что $\mathsf{M}Z(t) < < c < \infty$ для $t \in [0, T]$, и при всех $\varepsilon > 0$, $t \geqq s \geqq 0$ почти наверное выполнены соотношения

$$(1.9) \qquad \mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(t)|^2 / \mathcal{N}_s\} \leqq Z(s); \ \mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(t)|^4 / \mathcal{N}_s\} \leqq Z(s) .$$

(B2) Выполнены условия (A2) с заменой функции $\alpha(\tau)(1 + |x|^2)$ на функцию $\alpha(\tau)(1 + |x|^2 + |y|^2)$ в правой части неравенств (1.7) и (1.8).

Основной целью этой статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть для процесса* $(X^{(\varepsilon)}(t), Y^{(\varepsilon)}(t))$ *определяемого системой* (1.1) *и условиями* (1.2), *выполнены условия* (A1) *и* (A2) *или условия* (B1) *и* (B2). *Тогда процесс* $X^{(\varepsilon)}(t)$ *слабо сходится на отрезке* $0 \leqq t \leqq T$ *при* $\varepsilon \to 0$ *к марковскому случайному процессу* $X^{(0)}(t)$, *являющемуся решением задачи*

$$(1.10) \qquad \mathrm{d}X^{(0)}(t) = \bar{A}(X^{(0)})\,\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{l} \bar{\sigma}^{(r)}(X^{(0)})\,\mathrm{d}\xi_r(t), \quad X^{(0)}(0) = x_0 ,$$

где $\bar{\sigma}(x) = ((\sigma_i^{(r)}(x)))$ — *квадратный корень из симметричной матрицы* $((a_{ij}(x)))$.

Доказательство этой теоремы будет выведено из ряда лемм, которые мы докажем в следующем параграфе.

2.

В этом параграфе мы постоянно будем пользоваться тем широко известным фактом (см., например, [4]), что из неравенств $0 \leqq y(t) \leqq A + B \int_s^t y(u)\,\mathrm{d}u$ $(t \geqq s)$ вытекает неравенство

$$(2.1) \qquad y(t) \leqq A \exp\{B(t - s)\} .$$

В дальнейшем без специального упоминания будет считаться, что все неравенства, в которые входят условные математические ожидания справедливы п. н. (почти наверное).

Лемма 2.1. *Если выполнены условия* (A1) (*или* (B1)), *то для всех* $0 \leqq h \leqq t$; $0 \leqq s < t \leqq T$, $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$(2.2) \qquad \mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 / \mathcal{N}_s\} \leqq c_1\{|X^{(\varepsilon)}(s)|^2 + Z_1(s)\} ,$$

$$(2.3) \qquad \mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}(t + h) - X^{(\varepsilon)}(t)|^2 / \mathcal{N}_t\} \leqq c_1 h(|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 + Z_1(t)) ,$$

$$(2.4) \qquad \mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}(t + h) - X^{(\varepsilon)}(t)|^4 / \mathcal{N}_t\} \leqq c_1 h^2(|X^{(\varepsilon)}(t)|^4 + Z_1(t)) .$$

(Здесь и далее в §§ 2—4, $Z_i(t)$ обозначаются любые $\mathcal{N}_t$-измеримые случайные величины с ограниченным на отрезке $[0, T]$ математическим ожиданием, а c, c_i — постоянные.)

Доказательство проведем лишь для случая выполнения условий (B1), так как изменения, которые нужно внести в это доказательство, если выполнены условия (A1), очевидны. Из соотношения

$$(2.5) \qquad X^{(\varepsilon)}(t) - X^{(\varepsilon)}(s) = \int_s^t A(X^{(\varepsilon)}(u), Y^{(\varepsilon)}(u))\,\mathrm{d}u + \sum_{r=1}^{l}\int_s^t \sigma^{(r)}(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\,\mathrm{d}\xi_r(u)\,,$$

применяя условие Липшица, свойства стохастического интеграла и (1.9), получим неравенство

$$\mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 / \mathcal{N}_s\} \leqq |X^{(\varepsilon)}(s)|^2 + c_2\int_s^t [\mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}(u)|^2 / \mathcal{N}_s\} + 1 + Z(s)]\,\mathrm{d}u\,.$$

Отсюда и из (2.1) вытекает неравенство

$$\mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 / \mathcal{N}_s\} \leqq c_1[|X^{(\varepsilon)}(s)|^2 + c_2(t-s)(Z(s)+1)]$$

эквивалентное (2.2). Возводя теперь (2.5) в квадрат и в четвертую степень, и производя аналогичные выкладки, получим (2.3) и (2.4). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь разбиение интервала $[0, T)$ на интервалы Δ_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ длины Δ, так что $\Delta_k = [k\Delta, (k+1)\Delta)$ $(\Delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0)$. Построим вспомогательные процессы $\hat{Y}_\varepsilon(t)$, $\hat{X}_\varepsilon(t)$, $\check{X}_\varepsilon(t)$ с помощью формул

$$\hat{Y}_\varepsilon(t) = Y^{(\varepsilon)}(k\Delta) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{k\Delta}^t B(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{r=1}^{l}\int_{k\Delta}^t \varphi^{(r)}(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}\xi_r(s)$$

$$(2.6) \qquad (t \in \Delta_k)\,,$$

$$(2.7) \qquad \hat{X}_\varepsilon(t) = X_\varepsilon(k\Delta) \quad \text{для} \quad t \in \Delta_k\,,$$

$$(2.8) \qquad \check{X}_\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t A(\hat{X}_\varepsilon(s), \hat{Y}_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s + \sum_{r=1}^{l}\int_0^t \sigma^{(r)}(\hat{X}_\varepsilon(s), \hat{Y}_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}\xi_r(s)\,.$$

Ясно, что построенные таким способом процессы $\hat{X}_\varepsilon(t)$ и $\hat{Y}_\varepsilon(t)$ кусочно-непрерывны, а процесс $\check{X}_\varepsilon(t)$ — непрерывен с вероятностью 1.

В следующих двух леммах предполагается, что выполнены условия (A1) или (B1).

Лемма 2.2. *Функцию $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ можно выбрать таким образом, что $\Delta\varepsilon^{-1} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ и, кроме того, справедливы соотношения*

$$\mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(t) - \hat{Y}_\varepsilon(t)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\} < k(\varepsilon)(|X^{(\varepsilon)}((k\Delta)|^2 + Z_2(k\Delta)) \tag{2.9}$$

для $t \in \Delta_k$, причем $k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{M}|X^{(\varepsilon)}(t) - \check{X}_\varepsilon(t)|^2 \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0\,. \tag{2.10}$$

Доказательство. Из (2.6) и (1.1) для $t \in \Delta_k$ получим

$$\mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(t) - \hat{Y}_\varepsilon(t)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\} = \mathsf{M}\left\{\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{k\Delta}^{t}[B(X^{(\varepsilon)}(s), Y^{(\varepsilon)}(s)) - B(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s))]\,\mathrm{d}s\, + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{r=1}^{l}\int_{k\Delta}^{t}[\varphi^{(r)}(X^{(\varepsilon)}(s), Y^{(\varepsilon)}(s)) - \varphi^{(r)}(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s))]\,\mathrm{d}\xi_r(s)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\right\} \leqq$$

$$\leqq c\left\{\frac{\Delta}{\varepsilon^2}\int_{k\Delta}^{t}\mathsf{M}\{|B(X^{(\varepsilon)}(s), Y^{(\varepsilon)}(s)) - B(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s))|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\right\}\mathrm{d}s\, +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{r=1}^{l}\int_{k\Delta}^{t}\mathsf{M}\{|\varphi^{(r)}(X^{(\varepsilon)}(s), Y^{(\varepsilon)}(s)) - \varphi^{(r)}(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s))|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\}\,\mathrm{d}s\,.$$

Из последнего неравенства, применяя условие Липшица и (2.3), получим соотношение

$$\mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(t) - \hat{Y}_\varepsilon(t)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\} \leqq$$

$$\leqq c\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\Delta}{\varepsilon^2}\right)\left[\int_{k\Delta}^{t}\mathsf{M}\{|X^{(\varepsilon)}|(s) - X^{(\varepsilon)}(k\Delta)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\}\,\mathrm{d}s\, +\right.$$

$$\left.+\int_{k\Delta}^{t}\mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(s) - \hat{Y}_\varepsilon(s)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\}\,\mathrm{d}s\right] \leqq$$

$$\leqq c\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\Delta}{\varepsilon^2}\right)\Delta^2\,\{|X^{(\varepsilon)}(k\Delta)|^2 + Z_2(k\Delta)\}\, +$$

$$+\,c\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\Delta}{\varepsilon^2}\right)\int_{k\Delta}^{t}\mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(s) - \hat{Y}_\varepsilon(s)|^2 / \mathcal{N}_{k\Delta}\}\,\mathrm{d}s\,.$$

Из этого соотношения и (2.1) вытекает (2.9), если положить $k(\varepsilon) = \Delta(\Delta/\varepsilon + \Delta^2/\varepsilon^2)\exp\{c(\Delta^2/\varepsilon^2 + \Delta/\varepsilon)\}$. Заметим теперь, что $k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, если положить

$$\Delta(\varepsilon) = \varepsilon\sqrt[8]{(\ln 1/\varepsilon)}\,. \tag{2.11}$$

 Из (2.9) следует, в частности, что

$$(2.12) \qquad \sup_{t\in[0,T]} \mathsf{M}|Y^{(\varepsilon)}(t) - \hat{Y}_\varepsilon(t)|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,,$$

для такого выбора $\Delta = \Delta(\varepsilon)$.

Аналогично предыдущему из (1.1) и (2.8) с учетом условия Липшица и (2.11) получим интегральное неравенство, из которого с помощью (2.1) вытекает (2.10). Лемма доказана.

Следствие. *Из* (2.9) *вытекает, что*

$$\mathsf{M}\{|\hat{Y}_\varepsilon(s)|^2 /\mathcal{N}_{k\Delta}\} \leqq 2k(\varepsilon)\,\{|X^{(\varepsilon)}(k\Delta)|^2 + Z_2(k\Delta) + 4\mathsf{M}[|Y^{(\varepsilon)}(s)|^2 /\mathcal{N}_{k\Delta}]\}\,.$$

Отсюда, вычисляя математическое ожидание при условии $\mathcal{N}_t$ $(t < k\Delta)$, применяя (1.5) и лемму 2.1, получим соотношение

$$(2.13) \qquad \mathsf{M}\{|\hat{Y}_\varepsilon(s)|^2 /\mathcal{N}_t\} \leqq Z_3(t)\,,$$

где, как и раньше, $Z_3(t)$ – некоторая $\mathcal{N}_t$-измеримая случайная величина с ограниченным на отрезке $[0, T]$ математическим ожиданием.

Лемма 2.3. *Если функция* $\Delta(\varepsilon)$ *выбрана согласно* (2.11), *то для процесса* $\check{X}_\varepsilon(t)$ *справедливо также соотношение*

$$(2.14) \qquad \sup_{t\in[0,T]} \mathsf{M}|X^{(\varepsilon)}(t) - \check{X}_\varepsilon(t)|^4 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\,.$$

Доказательство этой леммы почти не отличается от доказательства леммы 2.2. Сначала, используя (2.4) и условие Липшица, получим аналогично (2.9) неравенство

$$\mathsf{M}\{|Y^{(\varepsilon)}(t) - \hat{Y}_\varepsilon(t)|^4 /\mathcal{N}_{k\Delta}\} \leqq k_1(\varepsilon)\,\{|X^{(\varepsilon)}(k\Delta)|^4 + Z_3(k\Delta)\}$$

$$(k_1(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0)\,.$$

Опираясь на это неравенство и (2.4), легко получить (2.14) аналогично тому, как из (2.9) получается неравенство (2.10).

Из доказанных в этом параграфе лемм вытекает в частности компактность семейства мер, связанных с процессами $\check{X}_\varepsilon(t)$, в пространстве непрерывных функций. В самом деле, из (2.4) вытекают для $0 < t < T$, $0 < t + h < T$, соотношения

$$\mathsf{M}|X^{(\varepsilon)}(t)|^4 < c; \quad \mathsf{M}|X^{(\varepsilon)}(t+h) - X^{(\varepsilon)}(t)|^4 \leqq h^2 c\,.$$

Отсюда и из (2.14) ясно, что

$$\mathsf{M}|\check{X}_\varepsilon(t)|^4 < c; \quad \mathsf{M}|\check{X}_\varepsilon(t+h) - \check{X}_\varepsilon(t)|^4 \leqq ch^2 + \alpha(\varepsilon)\,,$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Как известно, [5], этих двух условий достаточно для указанной выше компактности. Отсюда и из [6] вытекает, что для любой последовательности значений ε, стремящейся к нулю, можно выбрать подпоследовательность $\varepsilon_n \to 0$ такую, что определенные в некотором другом вероятностном пространстве $(\Omega', \mathbf{A}', P')$ процессы $X'_{\varepsilon_n}(t)$ имеют те же конечномерные распределения, что и $\check{X}_{\varepsilon_n}(t)$ и, кроме того, при $n \to \infty$

$$X'_{\varepsilon_n}(t) \to X_0(t) \qquad \text{по вероятности.}$$

При этом $X_0(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс. В § 4 будет показано, что конечномерные распределения любого случайного процесса, полученного таким путем, совпадают.

Для этого нам потребуется ряд свойств процесса $\check{X}_\varepsilon(t)$, которые будут доказаны в § 3.

3.

При доказательстве следующих двух лемм предполагается, что выполнены условия (B), так как в случае выполнения условий (A) доказательство проводится по тому же плану, но значительно проще.

Лемма 3.1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то для условного математического ожидания приращения процесса* $\check{X}_\varepsilon(t)$ *справедлива оценка*

$$\left|\mathsf{M}\{[\check{X}_\varepsilon(t_2) - \check{X}_\varepsilon(t_1)] / \mathcal{N}_{t_1}\} - \sum_{k=[t_1/\Delta]}^{[t_2/\Delta]} \mathsf{M}\{\bar{A}(\check{X}_\varepsilon(k\Delta)) / \mathcal{N}_{t_1}\}\, \Delta\right| \leqq$$

$$\leqq k(\varepsilon)\left\{|\check{X}_\varepsilon(t_1)|^2 + Z_1(t)\right\} \quad (\text{п. н.})\,,$$

где $k(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Из (2.8) и известных свойств стохастического интеграла Ито вытекает равенство

$$\mathsf{M}\{\check{X}_\varepsilon(t_2) - \check{X}_\varepsilon(t_1) / \mathcal{N}_{t_1}\} = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{M}\{A(\hat{X}_\varepsilon(s), \hat{Y}_\varepsilon(s)) / \mathcal{N}_{t_1}\}\, \mathrm{d}s\,.$$

 Отсюда и из (2.2) получаем неравенство

$$\left|\mathsf{M}\{(\check{X}_\varepsilon(t_2) - \check{X}_\varepsilon(t_1)) / \mathcal{N}_{t_1}\} - \sum_{k=[t_1/\Delta]}^{[t_2/\Delta]} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \mathsf{M}[A(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s)) / \mathcal{N}_{t_1}] \, ds\right| \leqq$$

$$\leqq c\Delta(|X^{(\varepsilon)}(t_1)|^2 + Z_1(t_1)) . \tag{3.1}$$

Для оценки каждого члена суммы, входящей в левую часть (3.1), наряду с процессом $\hat{Y}_\varepsilon(t)$ на отрезке Δ_k рассмотрим процесс $Y_\varepsilon^{(x,y)}(t)$, определяемый уравнением

$$Y_\varepsilon^{(x,y)}(t) = y + \frac{1}{\varepsilon}\int_{k\Delta}^{t} B(x, Y_\varepsilon^{(x,y)}(s)) \, ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{r=1}^{l} \int_{k\Delta}^{t} \varphi^{(r)}(x, Y_\varepsilon^{(x,y)}(s)) \, d\xi_r(s) . \tag{3.2}$$

Используя то обстоятельство, что при любом $\varepsilon > 0$ процесс $\tilde{\xi}_r(s_1) = 1/\sqrt{\varepsilon}\,.$ $.\,\xi_r(\varepsilon s_1)$ также является винеровским и удовлетворяет условиям (1.3) и делая замену $s = \varepsilon s_1$, легко получим, что процесс $Y_\varepsilon^{(x,y)}(\varepsilon t_1)$ с вероятностью 1 совпадает с марковским процессом $Z^{(x,y)}(t_1)$, определяемым стохастическим уравнением

$$Z^{(x,y)}(t_1) = y + \int_{k\Delta/\varepsilon}^{t_1} B(x, Z^{(x,y)}(s_1)) \, ds_1 + \sum_{r=1}^{l} \int_{k\Delta/\varepsilon}^{t_1} \varphi^{(r)}(x, Z^{(x,y)}(s_1)) \, d\tilde{\xi}_r(s_1) . \tag{3.3}$$

Отсюда и из условия (B2) вытекает для всех $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\mathsf{M}\frac{1}{\varepsilon\tau}\int_{t}^{t+\varepsilon\tau} A(x, Y_\varepsilon^{(x,y)}(s)) \, ds - \bar{A}(x)\right| < \alpha(\tau)\,(1 + |x|^2 + |y|^2) , \tag{3.4}$$

где $\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Из единственности решения стохастического уравнения (3.2) следует равенство $\hat{Y}_\varepsilon(t) = Y_\varepsilon^{(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), Y^{(\varepsilon)}(k\Delta))}(t)$. Из этого равенства и определения процессов $\hat{Y}_\varepsilon(t)$ и $Y^{(x,y)}(t)$ легко получим соотношение

$$\mathsf{M}[A(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s)) / \mathcal{N}_{k\Delta}] = [\mathsf{M}A(x, Y_\varepsilon^{(x,y)}(s))]|_{x=X^{(\varepsilon)}(k\Delta),\, y=Y^{(\varepsilon)}(k\Delta)} . \tag{3.5}$$

(Это соотношение доказывается аналогично тому, как в [7] доказано марковское свойство решения стохастического уравнения Ито.)

Из (3.4) и (3.5) вытекает неравенство

$$\left|\mathsf{M}\left\{\left[\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} A(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s)) \, ds - \Delta\bar{A}(X^{(\varepsilon)}(k\Delta))\right] \Big/ \mathcal{N}_{k\Delta}\right\}\right| \leqq$$

$$\leqq \Delta\alpha\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)(1 + |X^{(\varepsilon)}(k\Delta)|^2 + |Y^{(\varepsilon)}(k\Delta)|^2) .$$

Из этого неравенства и (2.2), учитывая соотношение ($t < k\Delta < s$)

$$\mathsf{M}[A(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s)) / \mathcal{N}_t] = \mathsf{M}\{\mathsf{M}[A(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s)) / \mathcal{N}_{k\Delta}] / \mathcal{N}_t\},$$

легко получаем для некоторой $\mathcal{N}_t$-измеримой случайной величины $Z_4(t)$ с ограниченным на отрезке $[0, T]$ математическим ожиданием и для всех $t_i \in [0, T]$ оценку

$$(3.6)\qquad \left| \sum_{k=[t_1/\Delta]}^{[t_2/\Delta]} \left\{ \left[\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \mathsf{M}[A(X^{(\varepsilon)}(k\Delta), \hat{Y}_\varepsilon(s)) / \mathcal{N}_{t_1}] \, ds - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \Delta \mathsf{M}[\bar{A}(X^{(\varepsilon)}(k\Delta)) / \mathcal{N}_{t_1}] \right] \right\} \right| \leqq c\alpha\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right) [|X^{(\varepsilon)}(t_1)|^2 + Z_4(t)].$$

Из (3.6), (3.1) и (2.11) вытекает утверждение леммы.

Лемма 3.2. *Если выполнены условия теоремы 1, то для условных моментов процесса $\check{X}_\varepsilon(t)$ справедливы оценки*

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} &|\mathsf{M}\{(\check{X}_\varepsilon^{(i)}(t + h) - \check{X}_\varepsilon^{(i)}(t))(\check{X}_\varepsilon^{(j)}(t + h) - \check{X}_\varepsilon^{(j)}(t)) / \mathcal{N}_t\} - \\ &- \Delta \sum_{k=[t/\Delta]}^{[(t+h)/\Delta]} \mathsf{M}\{a_{ij}(\check{X}_\varepsilon(k\Delta)) / \mathcal{N}_t\}| \leqq \\ &\leqq c(h^{3/2} + k(\varepsilon))(|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 + Z_5(t)), \end{aligned}$$

($k(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1. Сначала, опираясь на соотношения (2.2), (2.13) а также на свойства стохастического интеграла, получаем оценку

$$(3.8)\qquad |\mathsf{M}\{(\check{X}_\varepsilon^{(i)}(t + h) - \hat{X}_\varepsilon^{(i)}(t))(\check{X}_\varepsilon^{(j)}(t + h) - \check{X}_\varepsilon^{(j)}(t)) / \mathcal{N}_t\} -$$
$$- \sum_{r=1}^{l} \int_t^{t+h} \mathsf{M}\{\sigma_i^{(r)}\sigma_j^{(r)}(\hat{X}_\varepsilon(s), \hat{Y}_\varepsilon(s)) \, ds / \mathcal{N}_t\} | \leqq ch^{3/2}(|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 + Z_5(t)).$$

Затем вполне аналогично (3.6) получим неравенство

$$(3.9)\qquad \left| \sum_{r=1}^{l} \int_t^{t+h} \mathsf{M}\{\sigma_i^{(r)}\sigma_j^{(r)}(\hat{X}_\varepsilon(s), \hat{Y}_\varepsilon(s)) \, ds / \mathcal{N}_t\} - \right.$$
$$\left. - \Delta \sum_{k=[t/\Delta]}^{[(t+h)/\Delta]} \mathsf{M}\{a_{ij}(X^{(\varepsilon)}(k\Delta)) / \mathcal{N}_t\} \right| < c\alpha\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)(|X^{(\varepsilon)}(t)|^2 + Z_6(t)).$$

Из (3.8) и (3.9) следует (3.7).

Леммы §§ 2 – 3 позволяют путем предельного перехода доказать ряд свойств процесса $X_0(t)$, построенного в конце § 2.

Лемма 4.1. *Процесс $X_0(t, \omega')$, построенный в конце § 2, обладает свойствами*

$$\mathsf{M}'\{X_0(t_2, \omega') - X_0(t_1, \omega') / \mathcal{N}'_{t_1}\} = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{M}\{\bar{A}(X_0(s, \omega') / \mathcal{N}'_{t_1})\, ds, \tag{4.1}$$

$$|\mathsf{M}'\{(X_0^{(i)}(t + h, \omega') - X_0^{(i)}(t, \omega'))(X_0^{(j)}(t + h, \omega') - X_0^{(j)}(t, \omega')) / \mathcal{N}'_t\} - \\ - \int_t^{t+h} \mathsf{M}\{a_{ij}(X_0(s, \omega')) / \mathcal{N}'_t\}\, ds| \leqq ch^{3/2}(|X_0(t, \omega')|^2 + Z_7(t, \omega')). \tag{4.2}$$

Доказательство этой леммы опирается на леммы 2.2, 3.1 и 3.2 и вполне аналогично доказательству леммы 3.3 работы [8].

Лемма 4.2. *Процесс $\tilde{X}(t) = X_0(t) - \int_0^t \bar{A}(X_0(s))\, ds$ имеет непрерывные траектории и является мартингалом, причем для всех $0 < t_1 < t_2 < T$ выполнено соотношение*

$$\mathsf{M}\{(\tilde{X}^{(i)}(t_2) - \tilde{X}^{(i)}(t_1))(\tilde{X}^{(j)}(t_2) - \tilde{X}^{(j)}(t_1)) / \mathcal{N}'_{t_1}\} = \\ = \mathsf{M}'\left\{\int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(X_0(s))\, ds / \mathcal{N}'_{t_1}\right\}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы непосредственно вытекает из теоремы 3.2 главы VI монографии [9]. Таким образом, при $t_1 < t_2$ справедливо равенство

$$\mathsf{M}'(\tilde{X}(t_2) / \mathcal{N}_{t_1}) = \tilde{X}(t_1). \tag{4.4}$$

Далее из соотношений (4.2) и (4.4) равенство (4.3) выводится точно также, как соотношение (3.22) главы VI монографии [9]. Лемма доказана.

Дальнейшее изложение существенно опирается на многомерное обобщение леммы 5.3 главы VI книги [9]. Проведенное в [9] доказательство не допускает непосредственно обобщения на многомерный случай. Поэтому для этого случая ниже приводится другое доказательство.

Лемма 4.3. *Пусть $(X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t)), \mathcal{N}_t)$ — мартингал, непрерывный с вероятностью* 1, *причем* $\mathsf{M}|X(t)|^2 < \infty$ *для* $t \in [0, T]$ *и, кроме того,* *существует симметричная неотрицательно-определенная матрица* $\mathbf{A} = ((a_{ij}(t, \omega)))$, *элементы которой* $\mathcal{N}_t$-*измеримы, такая, что*

$$\mathsf{M}[(X_i(t_2) - X_i(t_1))(X_j(t_2) - X_j(t_1)) / \mathcal{N}_{t_1}] = \mathsf{M}\left[\int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(t, \omega)\, \mathrm{d}t / \mathcal{N}_{t_1}\right].$$

Тогда в расширенном, быть может, вероятностном пространстве существуют независимые винеровские процессы $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ *такие, что*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s, \omega)\, \mathrm{d}y(s)\,, \tag{4.5}$$

где $y(s)$ — *вектор столбец с координатами* $y_i(s)$, $\sigma = \sqrt{\mathbf{A}}$.

Доказательство. 1. Предположим сначала, что матрица $\mathbf{A}$ невырождена с вероятностью 1, то-есть ее определитель $|\mathbf{A}| \neq 0$ для почти всех t, ω. Тогда таким же свойством обладает, конечно и матрица $\sigma(t, \omega)$. Вектор $y(t)$ из E_n определим выражением

$$y(t) = \int_0^t \sigma^{-1}(s, \omega)\, \mathrm{d}X(s, \omega)\,. \tag{4.6}$$

Из теорем Дуба (см. [9] гл. IX) вытекает, что $y(t)$ — мартингал с непрерывными траекториями. Рассмотрим теперь случайный процесс $Z(t)$, определенный скалярным произведением $Z(t) = (c, y(t))$, где c — вектор из E_n длины 1. Этот процесс также является мартингалом с непрерывными траекториями. Кроме того, используя известные свойства стохастического интеграла по мартингалу ([9], гл. IX) без труда получим равенство

$$\mathsf{M}\{|Z(t_2) - Z(t_1)|^2 / \mathcal{N}_{t_1}\} = t_2 - t_1\,.$$

Отсюда с помощью известной теоремы П. Леви вытекает, что $Z(t)$ — винеровский процесс, удовлетворяющий условиям (1.3). Так как вектор c произволен, то, следовательно, $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — тоже винеровские процессы, независимые между собой. Так как из (4.6) очевидным образом вытекает (4.5), то для всюду невырожденной матрицы $\mathbf{A}$ соотношение (4.5) доказано.

2. Пусть теперь матрица $\mathbf{A}$ — произвольная неотрицательно определенная. Тогда наряду с процессом $X(t)$ рассмотрим (расширив, если это необходимо, исходное вероятностное пространство) независимые между собой и от $X(t)$ винеровские процессы $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$. Процесс $X_\varepsilon(t) = X(t) + \varepsilon\xi(t)$ при каждом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям леммы с матрицей $\mathbf{A}_\varepsilon(t, \omega) = \mathbf{A}(t, \omega) + \varepsilon \mathbf{J}$ ($\mathbf{J}$ — единичная матрица). Матрица $\mathbf{A}_\varepsilon$, очевидно, невырождена для почти всех t, ω. Применяя теперь утверждение, доказанное в п. 1, получим, что при каждом

$\varepsilon > 0$ существуют винеровские процессы $y_1^{(\varepsilon)}(t), \ldots, y_n^{(\varepsilon)}(t)$ такие, что справедливо представление

$$X(t) + \varepsilon\xi(t) = X(0) + \varepsilon\xi(0) + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}y^{(\varepsilon)}(s)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{A}_\varepsilon}$. Из равенств

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{-1};\ \boldsymbol{A}_\varepsilon = \boldsymbol{U}(\Lambda + \varepsilon I)\,\boldsymbol{U}^{-1};\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{U}\sqrt{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1};\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{U}\sqrt{(\Lambda + \varepsilon I)}\,\boldsymbol{U}^{-1}$$

($\boldsymbol{U}$ — ортогональная, Λ — диагональная матрица) ясно, что

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(t, \omega) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \boldsymbol{\sigma}(t, \omega) \quad (\text{п. н.}).$$

Применяя теперь разработанную А. В. Скороходом [6] технику, можно на некотором новом вероятностном пространстве Ω' построить процессы X', ξ', $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$, $\boldsymbol{\sigma}'$, $y^{(\varepsilon)\prime}$ такие, что их совместные конечномерные распределения совпадают с конечномерными распределениями процессов X, ξ, $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\sigma}$, $y^{(\varepsilon)}$ и $y^{(\varepsilon_n)\prime} \to y'(t)$ по вероятности при каждом t для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$. Очевидно, что $y'(t)$ — также многомерный винеровский процесс.

Отсюда и из теоремы § 3 главы 2 монографии [6] вытекает справедливость представления

$$X'(t, \omega') = X'(0) + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}'(s, \omega')\, \mathrm{d}y'(s, \omega')\,.$$

Построив теперь винеровский процесс $y(t, \omega)$ на исходном вероятностном пространстве так, чтобы конечномерные распределения троек $(X(t, \omega), \boldsymbol{\sigma}(t, \omega), y(t, \omega))$ и $(X'(t, \omega'), \boldsymbol{\sigma}'(t, \omega'), y'(t, \omega'))$ совпадали, получим требуемое соотношение (4.5). Лемма доказана.

Применяя две последние леммы, легко закончить доказательство теоремы 1. В самом деле, из этих лемм вытекает, что процесс $X_0(t)$, построенный в конце § 2, удовлетворяет уравнению и начальному условию (1.10) для некоторых винеровских процессов $\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$. Из единственности решения задачи (1.10) вытекает, что конечномерные распределения процесса $\check{X}_\varepsilon(t)$, а значит, в силу леммы 2.2, и процесса $X^{(\varepsilon)}(t)$, сходятся к конечномерным распределениям марковского процесса $X_0(t)$, являющегося решением задачи (1.10). Отсюда, из леммы 2.1 и теоремы 2.1 работы [5] вытекает слабая сходимость семейства распределений в пространстве непрерывных функций, связанных с процессами $X^{(\varepsilon)}(t)$, к распределению, порождаемому решением задачи (1.10). Теорема 1 полностью доказана.

Покажем, что теорема 1 позволяет с общих позиций подойти к некоторым конкретным задачам, решавшимся ранее различными методами.

1. Прежде всего, из теоремы 1 вытекает принцип усреднения в той форме, как он был сформулирован во введении, причем вместо равномерного по x существования пределов в (0.2) достаточно потребовать выполнения несколько более слабых условий (1.7), (1.8), а сама сходимость имеет место в несколько более сильном смысле. Рассмотрим пример уравнения в E_1

$$\mathrm{d}X_\varepsilon(t) = \sin\left(X_\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\xi(t)\,; \quad X_\varepsilon(0) = 0\,. \tag{5.1}$$

Так как очевидно

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\sin^2(x + y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{\tau}\,,$$

то применение теоремы 1 позволяет заключить, что процесс (5.1) при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к винеровскому процессу $\tilde{\xi}(t)$ с нулевым сносом и такому, что $\mathsf{M}[\xi(t)]^2 = \frac{1}{2}t$. Заметим, что условия упомянутых во введении теорем Гихмана и Вркоча в данном случае не выполнены.

2. Условия (1.7), (1.8) теоремы 1 не являются слишком ограничительными, если процесс $Y^{(x,y)}(t)$, являющийся решением задачи (1.5), (1.6), эргодический. В этом случае коэффициенты $\bar{A}(x)$ и $a_{ij}(x)$ получаются усреднением коэффициентов $A(x, y)$ и $\sum_r \sigma_i^{(r)}(x, y)\,\sigma_j^{(r)}(x, y)$ по инвариантной мере $\mu_x(\mathrm{d}y)$ процесса $Z^{(x,y)}(t)$. Таким путем можно получить некоторые из результатов работ [10, 1] относительно предельного поведения решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной.

3. Рассмотрим механическую систему, описываемую системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p} + \varepsilon f_1(p, q) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{r=1}^{n}\sigma_r^{(1)}(p, q)\,\dot{\xi}_r(t)\,, \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + \varepsilon f_2(p, q) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{r=1}^{n}\sigma_r^{(2)}(p, q)\,\dot{\xi}_r(t)\,, \\ q &= (q^{(1)}, \ldots, q^{(n)})\,; \quad p = (p^{(1)}, \ldots, p^{(n)})\,; \quad H = H(p, q)\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь $\dot{\xi}_r(t)$ — „белые шумы", см., например, [11].

Уравнения (5.2) описывают движение системы, близкой к гамильтоновой, при наличии малого трения (f_1, f_2) и малого случайного белого шума переменной интенсивности.

Теорема 1 позволяет обосновать применимость принципа усреднения для исследования этой системы. Для этого нужно перейти к новым переменным, так, чтобы разделить „медленные" и „быстрые" движения. Размерность системы медленных движений зависит от числа первых интегралов невозмущенной гамильтоновой системы

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}\,; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,. \tag{5.3}$$

В число этих интегралов всегда входит, конечно, энергия системы $H(p, q)$ и, быть может, некоторые другие физические величины $K_1(p, q), \ldots, K_s(p, q)$, определяемые законами сохранения. Легко понять, что если эти величины $H(p, q)$, $K_1(p, q), \ldots, K_s(p, q)$ взять в качестве новых переменных и присоединить к ним недостающее число $2n - (s + 1)$ уравнений из системы (5.2), то получим систему, в которой быстрые и медленные движения разделены (при этом дифференциалы функций H, $K_1, \ldots, K_s$ следует вычислять по формуле Ито, см. [7]). Если система (5.3) на гиперповерхности $H = \mathrm{const}$; $K_1 = \mathrm{const}; \ldots$ $\ldots K_s = \mathrm{const}$ эргодична и ее инвариантная мера есть μ, то при некоторых не слишком органичительных дополнительных предположениях можно применить теорему 1. Она позволяет заключить, что $(s + 1)$-мерный процесс

$$X_\varepsilon(t) = (H(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)), K_1(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)), \ldots, K_s(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)))$$

на отрезке времени длины порядка $O(1/\varepsilon)$ может быть приближен марковским, локальные характеристики которого получаются из локальных характеристик процесса $X_\varepsilon(t)$ усреднением по мере μ. Для одномерного случая соответствующие выкладки имеются в работе автора [11].

4. В ряде работ, начиная с известной статьи Крамерса [12], изучался вопрос о том, при каких условиях броуновское движение в фазовом пространстве может быть приближено процессом броуновского движения в координатном. В [13], в части, строго доказаны некоторые утверждения Крамерса и найдены следующие члены асимптотического разложения по степеням малого параметра соответствующей краевой задачи. Покажем, что главный член этого асимптотического разложения может быть получен значительно проще, если воспользоваться теоремой 1.

Пусть в жидкости, имеющей вязкость η и температуру (измеренную в энергетических единицах) T движется шар радиуса l и массы m находящийся в поле сил $\mathscr{F}(x)$. Как известно (см., например, [12]) движение такой частицы можно описать следующей системой уравнений, в которых $X(t)$ означает координату движущейся частицы, $Y(t)$ — ее скорость, $A = 6\pi\eta l$ — коэффициент трения:

(5.4) $$\frac{dX}{dt} = Y; \quad m\,dY(t) = [-AY + \mathscr{F}(X)]\,dt + \sqrt{(TA)}\,d\xi(t);$$

$$X(0) = x^{(0)}; \quad Y(0) = y^{(0)}.$$

Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным координатам. С этой целью введем „характерное время“ τ, которое можно интерпретировать, как промежуток времени между двумя наблюдениями движущейся частицы. Безразмерное время, координата, скорость, масса могут быть определены формулами

$$t_0 = \frac{t}{\tau}; \quad x_0 = \frac{x}{l}; \quad y_0 = \frac{y\tau}{l} = \frac{y}{V}; \quad m_0 = \frac{m}{A\tau}.$$

В координатах t_0, x_0, y_0 система (5.4) примет вид

$$dx_0 = y_0\,dt_0; \quad m_0\,dy_0 = \left[-y_0 + \frac{\mathscr{F}(lx_0)}{AV}\right]dt_0 + \frac{1}{l}\sqrt{\left(\frac{T\tau}{A}\right)}\,d\xi_1(t_0),$$

где $\xi_1(t_0) = \xi(\tau t_0)/\sqrt{\tau}$ — также винеровский процесс, удовлетворяющий условиям (1.3).

Введем теперь новое безразмерное время

(5.5) $$s = m_0 t_0$$

и еще раз преобразуем уравнение (5.4), придав ему вид

$$\frac{dx_0}{ds} = \frac{y_0}{m_0}; \quad m_0\,dy_0 = \left(-\frac{y_0}{m_0} + \mathscr{F}_0(x_0)\right)ds + \sqrt{T_0}\,d\xi_2(s).$$

В этом уравнении $T_0 = T/mV^2$ — безразмерная температура, $\mathscr{F}_0(x_0) = (\tau/Vm)\,\mathscr{F}(lx_0)$ — безразмерная сила, действующая на броуновскую частицу.

Наконец, введем новую координату $Z = x_0 + m_0 y_0$. Тогда без труда получим систему

(5.6) $$dZ(s) = \mathscr{F}_0(X_0(s))\,ds + \sqrt{T_0}\,d\xi_2(s),$$

$$\frac{dX_0}{ds} = \frac{Z(s) - X_0(s)}{m_0^2}.$$

Если безразмерная масса $m_0 = m/A\tau$ является малым параметром задачи, то к исследованию системы (5.6) можно применить теорему 1. Нужно проверить лишь, что выполнены условия (B1) и (B2).

Проверим сначала, что функция $X_0(s)$ удовлетворяет условиям (1.9), если $\mathscr{F}_0(x_0)$ удовлетворяет условию Липшица.

Из (5.6) получим, полагая для удобства $m_0^2 = \varepsilon$,

$$X_0^{(\varepsilon)}(s) = x^{(0)} \exp(-s/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s Z^{(\varepsilon)}(u) \exp\left\{\frac{u-s}{\varepsilon}\right\} \mathrm{d}u\,,$$

$$Z_0^{(\varepsilon)}(s) = x^{(0)} + \sqrt{\varepsilon}y^{(0)} + \int_0^s \mathscr{F}_0(X_0^{(\varepsilon)}(u))\,\mathrm{d}u + \sqrt{T_0}(\xi_2(s) - \xi_2(0))\,.$$

Отсюда и из неравенства $|\mathscr{F}(x)| < c(1 + |x|)$ легко выводятся оценки, справедливые на интервале $0 < s < S$

$$|X_0^{(\varepsilon)}(s)| < |x^{(0)}| + \max_{0\leqq u\leqq s} |Z^{(\varepsilon)}(u)|\,,$$

$$\max_{0\leqq u\leqq s} |Z^{(\varepsilon)}(u)| \leqq |x^{(0)}| + \sqrt{\varepsilon}|y^{(0)}| + c\int_0^s (1 + |x_0^{(0)}| + \max_{0<u_1<u} |Z^{(\varepsilon)}(u_1)|)\,\mathrm{d}u_1 + \sqrt{T_0}\max_{0\leqq u\leqq s} |\xi_2(u) - \xi_2(0)|\,.$$

Из этих оценок с учетом (2.1) вытекают неравенства

$$\max_{0\leqq u\leqq s} |Z^{(\varepsilon)}(u)| \leqq A_1 + \sqrt{T_0}\max_{0\leqq u\leqq s} |\xi_2(u) - \xi_2(0)| + \mathrm{e}^{cs}\,,$$

$$(5.7)\qquad |X_0^{(\varepsilon)}(s)| \leqq |x^{(0)}| + A_1 + \sqrt{T_0}\max_{0\leqq u\leqq s} |\xi_2(u) - \xi_2(0)|\,\mathrm{e}^{cs} \leqq$$

$$\leqq A_2 + A_3 \max_{0\leqq u\leqq s} |\xi_2(u) - \xi_2(0)|\,.$$

(Здесь A_i — некоторые постоянные, зависящие от $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, S.) Возводя неравенство (5.7) в квадрат и в четвертую степень и вычисляя затем математическое ожидание при условии $\mathscr{N}_t$ $(t \leqq s)$ получим, что условие (1.9) выполнено. Осталось проверить условие (1.7), так как условие (1.8) выполнено тривиально. Уравнение (1.5) в данном случае имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}X^{(x,z)}}{\mathrm{d}s} = z - X^{(x,z)}\,.$$

Поэтому

$$X^{(x,z)}(s) = z + (x - z)\,\mathrm{e}^{-s}\,.$$

Отсюда и из неравенства

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\mathscr{F}(z+(x-z)\,\mathrm{e}^{-s})\,\mathrm{d}s-\mathscr{F}(z)\right|<\frac{c}{\tau}|x-z|$$

вытекает, что условие (1.5) тоже выполнено. Применение теоремы 1 позволяет теперь заключить, что процесс $Z^{(\varepsilon)}(s)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к одномерному марковскому процессу $Z^{(0)}(t)$, определяемому стохастическим уравнением

$$\mathrm{d}Z^{(0)}(s)=\mathscr{F}_0(Z^{(0)})\,\mathrm{d}s+\sqrt{T_0}\,\mathrm{d}\xi_2(s)\,. \tag{5.8}$$

Выкладка, аналогичная приведенной выше, при доказательстве неравенства (5.7), показывает, что

$$\mathsf{M}(\sqrt{\varepsilon}Y_0^{(\varepsilon)}(s)+x^{(0)}e^{-s/\varepsilon})^2=\mathsf{M}\left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}X_0^{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}s}+x_0e^{-s/\varepsilon}\right)^2\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0\,.$$

С учетом предыдущего отсюда и из соотношения $Z^{(\varepsilon)}(s)=X_0^{(\varepsilon)}(s)+\sqrt{\varepsilon}Y_0^{(\varepsilon)}(s)$ вытекает слабая сходимость процесса $X_0^{(\varepsilon)}(s)$ к $Z^{(0)}(s)$ для всех $s>s_0$, где s_0 — любая постоянная, большая нуля.

Полученный результат можно трактовать следующим образом. Пусть $(X^{(\varepsilon)}(t), Y^{(\varepsilon)}(t))$ — двумерный марковский процесс, описываемый уравнением (5.4). Пусть безразмерная массе $m_0=m/(A\tau)$ мала. Тогда в новом „медленном" времени $s=m_0t_0$ (то-есть при в $1/m_0$ раз более редких наблюдениях) процесс $X_0^{(\varepsilon)}$ близок к марковскому процессу, определяемому уравнением (5.8). Можно показать, опираясь, например, на результаты работы [2], что в данном случае имеет место и сходимость в среднем квадратическом.

Замечание. В ряде работ изучалось асимптотическое поведение решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для случая, когда „быстрое" движение асимптотически устойчиво. (См. обзорную статью А. Б. Васильевой [14] и там дальнейшую библиографию.) Пользуясь теоремой 1, можно получить некоторые результаты о этом направлении и для систем „медленное" движение в которых - диффузионный процесс. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, заметив только, что последний пример можно рассматривать и с этой точки зрения. Отметим также, что с точки зрения теории дифференциальных уравнений с частными производными результаты этой статьи представляют собой результаты о поведении решения задачи Коши некоторых уравнений параболического или ультрапараболического типа с малым параметром.

(Поступило 11. июля 1967 г.)

[1] Р. З. Хасьминский: О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией. Теор. вероятн. и ее применен. *8* (1963), 1, 3—25.

[2] И. И. Гихман: Дифференциальные уравнения со случайными функциями. В сб. „Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике", Киев 1964.

[3] I. Vrkoč: Extension of the averaging method to stochastic equations. Чех. матем. журн. *16* (1966), 518—544.

[4] В. В. Немыцкий, В. И. Степанов: Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, Москва 1949.

[5] Ю. В. Прохоров: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теор. вероятн. и ее применен., *1* (1956), 2, 177—238.

[6] А. В. Скороход: Исследования по теории случайных процессов. Изд-во Киевского университета, Киев 1961.

[7] И. И. Гихман, А. В. Скороход: Введение в теорию случайных процессов. Физматгиз, Москва 1965.

[8] Р. З. Хасьминский: Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Теор. вероятн. и ее применен. *11* (1966), 3, 444—462.

[9] Дж. Дуб: Вероятностные процессы. ИЛ, Москва 1956.

[10] Р. З. Хасьминский: О диффузионных процессах с малым параметром. Изв. АН СССР, сер. матем. *27* (1963), 6, 1281—1300.

[11] Р. З. Хасьминский: О работе консервативной системы при воздействии малого трения и малого случайного шума. Прикл. матем. и мех. *28* (1964), 5, 931—935.

[12] H. A. Kramers: Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. Physica *7* (1940), 284—304.

[13] А. М. Ильин, Р. З. Хасьминский: Об уравнениях броуновского движения. Теор. вероятн. и ее применен. *11* (1966), 3, 466—491.

[14] А. Б. Васильева: Асимтотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных диференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Успехи мат. наук *18* (1963), 3, 15—86.

VÝTAH

O metodě průměrů pro Itovy stochastické diferenciální rovnice

R. Z. CHASMINSKIJ

Je dobře známo, že důležitou metodou zkoumání systémů automatické regulace je metoda průměrů. V poslední době je tato metoda často používána ke studiu činnosti systémů ovlivňovaných náhodnými poruchami. Tato práce obsahuje zobecnění výsledků, dosažených v tomto směru v [1].

Nechť $(X^{(\varepsilon)}(t), Y^{(\varepsilon)}(t))$ je soubor markovských náhodných procesů v E_l, popsaných systémem Itových stochastických rovnic (1.1) a počáteční podmínkou (1.2), přičemž

$\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$ jsou navzájem nezávislé wienerovské procesy, vyhovující podmínkám (1.3). Označíme $\mathcal{N}_t$ σ-algebru, vytvořenou jevy $\{\xi_r(s) < x_r;\ r = 1, \ldots, l;\ s \leqq t\}$.

Předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky:

(A 1) Vektory A, $\sigma^{(r)}$ z E_{l_1} a B, $\varphi^{(r)}$ z E_{l_2} vyhovují Lipschitzově podmínce v x, y a kromě toho je splněna nerovnost (1.4).

(A 2) K procesu $Y^{(x,y)}(t)$, popsanému Itovou stochastickou rovnicí (1.5) a počáteční podmínkou (1.6) existují funkce $\bar{A}(x)$ a $a_{ij}(x)$ takové, že pro nějakou funkci $\alpha(\tau)$, konvergující k nule pro $\tau \to \infty$, jsou splněny nerovnosti (1.7) a (1.8).

V některých případech je vhodnější místo podmínek (A 1) a (A 2) uvažovat podmínky:

(B 1) Vektory A, $\sigma^{(r)}$, B, $\varphi^{(r)}$ vyhovují Lipschitzově podmínce v x, y a kromě toho existuje taková $\mathcal{N}_t$-měřitelná náhodná veličina $Z(t)$, že $\mathsf{M}Z(t) < c < \infty$ pro $t \in \in [0, T]$, a při všech $\varepsilon > 0$, $t \geqq s \geqq 0$ jsou skoro jistě splněny vztahy (1.9).

(B 2) Je splněna podmínka (A 2) se záměnou funkce $\alpha(\tau)(1 + |x|^2)$ funkcí $\alpha(\tau) . . (1 + |x|^2 + |y|^2)$ v pravé části nerovnosti (1.7) a (1.8).

Hlavní věta dokázaná v práci má tento tvar:

Teorém 1. *Nechť proces* $(X^{(\varepsilon)}(t), Y^{(\varepsilon)}(t))$ *splňuje podmínky* (A 1) *a* (A 2) *nebo podmínky* (B 1) *a* (B 2). *Pak proces* $X^{(\varepsilon)}(t)$ *slabě konverguje na intervalu* $0 \leq t \leq T$ *při* $\varepsilon \to 0$ *k markovskému náhodnému procesu* $X^{(0)}(t)$, *který je řešením úlohy* (1.10), *kde* $\bar{\sigma}(x) = ((\sigma_i^{(r)}(x)))$ *je odmocnina ze symetrické matice* $((a_{ij}(x)))$.

Jak je ukázáno v § 5, je toto zobecnění výsledku z [1] podstatné pro studium činnosti nelineárních systémů automatické regulace blízkých k Hamiltonovým.

Р. З. Хасьминский, Институт проблем передачи информации АН СССР; Авиамоторная 8, корп. 2, Москва Е—24. СССР.