Kybernetika

Strategické hry

1/6

KAREL WINKELBAUER

ACADEMIA
PRAHA

Kybernetika

ROČNÍK 3/1967

Časopis Československé kybernetické společnosti při ČSAV

Vydává:

Ústav teorie informace a automatizace Československé akademie věd

Redakce:

Vyšehradská 49, Praha 2 - Nové Město

Doc. Dr. Karel Winkelbauer, DrSc.

STRATEGICKÉ HRY

Příloha časopisu Kybernetika

Část I. Strategické hry a konfliktní situace

Cílem první části této stati je především seznámit čtenáře s procesem abstrakce, jímž se dospívá od konkrétních konfliktních situací k jejich matematickým modelům různého stupně obecnosti — kterémukoli takovému matematickemu modelu se říká *strategická hra* — a dále popsat obsahově i formálně všechny základní pojmy, které se potřebují jak při konstrukci těchto modelů, tak při použití těchto modelů k vyšetřování racionálního jednání účastníků konfliktní situace.

Důraz budeme klást na motivaci pojmů a jejich precisaci. Matematické prostředky potřebné k precisování pojmů patří do základů teorie množin a jsou běžně známé. Přesto je v poznámkách zařazených v textu stručně vyložíme, abychom neodradili čtenáře nematematika od studia této stati odkazy na matematická pojednání, neboť ta je v první řadě určena právě pro něho. Z toho důvodu formálně matematické důkazy v této stati nikde neprovádíme a zájemce je najde v odborné literatuře. Odkazy na tuto literaturu budou uvedeny samostatně až na konci stati.

O způsobech použití matematických modelů konfliktních situací k rozboru racionálního jednání pojednáme v druhé části této stati.

1. ZÁKLADNÍ DATA O KONFLIKTNÍ SITUACI

Schéma konfliktní situace

Strategická hra jako matematický model konfliktní situace představuje abstraktní popis té části reality, která v sobě zahrnuje jevy, při nichž se střetávají různorodé zájmy jednotlivců nebo celých skupin. Všímáme-li si nejzákladnějších rysů společných všem jevům v sociální sféře a v jiných oblastech, jež obsahují konflikt zájmů, dospíváme k popisu konfliktní situace, který je vyjádřen v tomto schématu:

Skupina jedinců stojí v situaci, která vyústí v jeden z řady možných výsledků. Každý z těchto jedinců má zájem na výsledcích, které mohou nastat; tento zájem pramení z osobních preferencí, které charakterisují jeho postoj k možným výsledkům, a obecně se různí od zájmů ostatních jedinců ve skupině. Dále každý má možnost alespoň částečně ovlivnit konečný výsledek vlastním jednáním, přičemž skutečný výsledek je určen jednáním všech jedinců, kteří se účastní na této situaci, obsahující konflikt mezi jejich zájmy; tento výsledek nemusí být deterministického charakteru, neboť nelze vyloučit ani případný vliv náhody.

V uvedeném schematickém popisu konfliktní situace vystupují tyto základní údaje, seřazené zde podle stupně jejich složitosti:

(1) výčet všech účastníků konfliktní situace;

(2) souhrn všech představitelných výsledků, v něž může konfliktní situace vyústit;

(3) subjektivní hodnocení těchto výsledků jednotlivými účastníky konfliktní situace;

(4) možnosti, které účastníci mají, aby ovlivnili výsledek konfliktní situace, a způsob, jímž je určen skutečný výsledek.

Přistoupíme nyní k charakterisování matematických ekvivalentů uvedených základních dat o konfliktní situaci.

Množina hráčů

V každé konfliktní situaci je třeba nejprve specifikovat její jednotlivé účastníky. V konkrétních případech to mohou být jednotlivci nebo instituce resp. organisace nebo skupiny jednotlivců se společnými zájmy; např. politické, sociální nebo hospodářské skupiny, výrobní podniky, státní orgány apod. Jednotlivé účastníky konfliktní situace budeme při jejím matematickém popisu nazývat *hráči*. V souhlase se shora uvedeným schematickým popisem považujeme v konfliktní situaci za podstatné jenom to, aby každý hráč mohl svým jednáním zasahovat do průběhu konfliktu a aby bylo možno charakterisovat jeho zájem na výsledku konfliktu. Proto abstrahujeme od konkrétního obsahu pojmu účastníka konfliktní situace a matematicky vymezíme pojem hráče jako prvek dané konečné neprázdné množiny, kterou všude v dalším označíme symbolem I.

Poznámka. Pod pojmem množiny chápeme souhrn nějakých věcí, jež nazýváme prvky množiny. Abychom vyznačili, že věc x je prvkem množiny X, píšeme $x \in X$. Při naší úmluvě bude tedy znamenat výraz $i \in I$, že i je hráč. Množina je neprázdná, když obsahuje alespoň jeden prvek, a je konečná, když obsahuje jenom konečný počet prvků. Symbol $\{x, y, \ldots, z\}$ označuje množinu, která se skládá z prvků $x, y, \ldots, z$.

Dostali jsme tak první základní údaj o konfliktní situaci, totiž *množinu hráčů I*. Konečnost této množiny odpovídá skutečnosti, že se na každé konfliktní situaci podílí jenom konečný počet účastníků. Nicméně v určitých souvislostech byly teoreticky studovány případy, v nichž se vyskytuje hráčů nekonečně mnoho. Takové případy však ze svých úvah vyloučíme, neboť v nich běží jen o formálně matematické aspekty teorie.

Označíme-li počet všech hráčů písmenem n, můžeme v matematickém modelu representovat množinu I jako množinu prvních n přirozených (tj. celých kladných) čísel, což symbolicky zapíšeme ve tvaru rovnosti

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{1.1}$$

Počet hráčů n při této úmluvě o representaci stačí tedy k vymezení prvního základního údaje o konfliktní situaci, totiž množiny I. Podle toho modely konfliktních situací, na nichž se podílí n účastníků, nazýváme *strategické hry o n hráčích*.

Jak vidíme, nevylučujeme v matematické teorii případ, kdy $n = 1$. Takový případ je ovšem z obsahového stanoviska degenerovaný, poněvadž při něm nevzniká konflikt zájmů. Jsou tedy strategické hry o jednom hráči matematickým modelem situací, kde jediný účastník má úplný vliv na konečný výsledek a řídí se ve svém jednání výhradně svými vlastními zájmy. Rozbor takových situací tvoří ovšem nutný předběžný krok k pochopení racionálního jednání při konfliktu zájmů.

Prostor výsledků

Konfliktní situace nakonec vyústí v některý z možných výsledků. Co lze považovat v dané konkrétní konfliktní situaci za a priori možný výsledek, bývá někdy teprve stanoveno v průběhu abstrakce vycházející z potřeb, pro něž se taková situace vyšetřuje, což ovšem leží za hranicemi matematické teorie. Jednou z mnoha potíží vyskytujících se v aplikacích je právě vymezení množiny všech a priori možných výsledků, totiž toho, o co v konfliktu jde. Je zřejmé, že jenom takové situace s konfliktem zájmů, které jsou nějakými pravidly dostatečně schematisovány, mohou být předmětem matematického bádání. Zejména proto, že obvyklé hry, které slouží společenské zábavě, jako např. šachy, dáma, halma, různé karetní hry apod., představují jednoduché konfliktní situace schematisované více či méně přesnými pravidly, byl obsah pojmu hra rozšířen tak, aby zahrnoval všechny dostatečně schematisované konfliktní situace. V takových konfliktních situacích, které jsou dostatečně schematisovány, jako jsou právě společenské hry, jsou všechny možné výsledky jasně vymezeny. Např. v šachu mohou být těmito konečnými výsledky jenom výhra bílého nebo remisa nebo výhra černého.

Matematickým ekvivalentem odpovídajícím souhrnu všech a priori možných výsledků je tedy prostě nějaká daná neprázdná množina, kterou budeme nadále vždy označovat symbolem Ω. Množinu Ω budeme nazývat *prostor výsledků* a vztah $\omega \in \Omega$ bude ekvivalentní výroku, že ω je *výsledek*. Další podmínky, které budeme klást na prostor výsledků, si uvedeme ve čtvrté kapitole této stati.

Systémy preferencí

Zájem účastníka konfliktní situace na konečném výsledku plyne z jeho postoje k možným výsledkům. Při charakterisování tohoto postoje vycházíme z pozorované skutečnosti, že ať předložíme účastníkovi konfliktní situace jakékoli dva různé možné výsledky, je schopen nám říci, zda buď dává přednost jednomu z nich nebo zda se staví k oběma výsledkům indiferentně, tedy je mu lhostejné, který z nich nastane. Celkový postoj hráče k jednotlivým výsledkům je tak charakterisován systémem jeho osobních preferencí, to znamená údajem pro každou dvojici výsledků (ω_1, ω_2), zda preferuje ω_1 proti ω_2, nebo zda preferuje ω_2 proti ω_1, nebo zda je mezi ω_1 a ω_2 indiferentní.

Z provedené úvahy vyplývá, že systém preferencí účastníka konfliktní situace lze matematicky popsat dvěma relacemi v prostoru výsledků, relací preference a relací indiference. Matematicky pohodlnější je nahradit obě tyto relace relací jedinou, a to relací slabé preference, kterou interpretujeme takto: hráč slabě preferuje výsledek ω_1 proti výsledku ω_2, když buď preferuje ω_1 proti ω_2 nebo je mezi ω_1 a ω_2 indiferentní.

Poznámka. Relací v dané množině X rozumíme vztah, který platí pro některé uspořádané dvojice (x_1, x_2) prvků množiny X. Je-li R relace v množině X a jsou-li x_1 a x_2 prvky množiny X, pak symbol $x_1 R x_2$ znamená, že relace R platí mezi prvky x_1 a x_2. Relaci R v množině X nazýváme *totální*, když pro každou (uspořádanou) dvojici (x_1, x_2) prvků množiny X je buď $x_1 R x_2$ nebo $x_2 R x_1$.

Předcházející rozbor nás vede k formální definici systému preferencí. Libovolnou totální relaci v prostoru výsledků Ω nazveme *systémem preferencí*. Tedy systém preferencí U je relace v Ω, která má vlastnost, že buď $\omega U \omega'$ nebo $\omega' U \omega$ pro libovolné $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$; vztah $\omega U \omega'$ čteme, že ω je slabě preferováno proti ω' (vzhledem k systému preferencí U).

V konfliktní situaci je každému jejímu účastníku, hráči i, přiřazen jeho systém preferencí, který označíme symbolem U_i. Toto přiřazení zapisujeme formálně znakem $\{U_i\}_{i \in I}$. Jsou-li hráči representováni přirozenými čísly podle (1.1), můžeme přiřazení $\{U_i\}_{i \in I}$ napsat v méně kompaktním, ale zřetelnějším tvaru $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$. Tedy

$$\{U_i\}_{i \in I} \quad \text{resp.} \quad (U_1, U_2, \ldots, U_n)\,, \tag{1.2}$$

kde pro každé $i \in I$ je U_i systém preferencí (tj. totální relace v Ω), tzv. *systém preferencí hráče i*, tvoří třetí základní údaj o konfliktní situaci. Toto přiřazení (1.2) budeme nazývat *preferenčním schématem hry*. Vidíme, že preferenční schéma zachycuje subjektivní hodnocení výsledků u všech hráčů.

Zavedeme si následující symboliku a terminologii, která bude ve shodě s našimi úvahami. Když pro některé $\omega, \omega' \in \Omega$ je současně $\omega U_i \omega'$ a $\omega' U_i \omega$, řekneme, že hráč i je *indiferentní* mezi ω a ω', a tuto skutečnost zapisujeme jako $\omega \sim_i \omega'$. Je-li $\omega U_i \omega'$ a není-li $\omega' U_i \omega$ (tedy neplatí $\omega \sim_i \omega'$), pravíme, že hráč i *preferuje* ω proti ω', a píšeme $\omega \succ_i \omega'$ (resp. $\omega' \prec_i \omega$). Místo $\omega U_i \omega'$ budeme také psát $\omega \succsim_i \omega'$ (resp. $\omega' \precsim_i \omega$) a říkat, že hráč i *slabě preferuje* ω proti ω'. Představuje tedy znak $\sim_i$ relaci indiference, znak $\succ_i$ (resp. $\prec_i$) relaci preference, kdežto U_i samo nebo $\succsim_i$ (resp. $\precsim_i$) relaci slabé preference hráče i.

Strategie

Účastník konfliktní situace ovlivňuje její konečný výsledek vlastním jednáním. Podle toho, co tímto jednáním rozumíme a v jakém stupni obecnosti charakterisujeme možnosti jednotlivého hráče při působení na výsledek, dostáváme různé matematické modely konfliktních situací. Když tyto možnosti chápeme jako různé možné zásahy účastníka konfliktní situace do jejího průběhu v různých okamžicích, nabude formální popis těchto možností značné složitosti; matematické modely konfliktních situací, které všechnu tuto složitost jednání hráčů v konfliktních situacích rozvíjejících se v čase podrobně odrážejí, nazývají se *strategické hry v rozvinutém tvaru*. Když jednání jednotlivého účastníka chápeme jako jeden z parametrů, na němž závisí konečný výsledek, a abstrahujeme přitom od časového průběhu konfliktu, dospějeme k matematickým modelům nazývaným *strategické hry v normálním tvaru*. Když navíc možnosti jednání charakterisujeme jenom nepřímo ve formě možných dohod mezi jednotlivými hráči o zabezpečení dosažitelného výsledku, vede matematický popis k modelům, které budeme nazývat *strategické hry v koaličním tvaru*.

Formálně a v jistém smyslu i obsahově je normální tvar hry nejjednodušší, a proto jím začneme. Jednáním hráče v konfliktní situaci budeme rozumět volbu některé z a priori daných alternativ jednání, o nichž předpokládáme, že je má v této konfliktní situaci k disposici. Libovolné dané alternativě jednání hráče i se v této souvislosti říká *strategie hráče i*, neboť ji interpretujeme jako vyčerpávající popis jeho jednání v celém průběhu konfliktu. Např. v šachu strategie bílého je popsána tím, že bílý před zahájením partie určí pro každou vůbec možnou posici, v níž má táhnout, předem tah, který v ní provede; strategií bílého je tak dán podrobný návod pro bílého k provedení hry ještě před zahájením partie, bez ohledu na to, jak vlastní partie potom skutečně proběhne. V tomto a jenom v tomto smyslu budeme interpretovat pojem strategie.

Množině všech a priori možných strategií tj. vyčerpávajících návodů k jednání v dané konfliktní situaci pro hráče i říkáme *prostor strategií hráče i* a značíme ji symbolem A_i. Každému hráči $i \in I$ je tím přiřazen prostor jeho strategií A_i. Toto přiřazení, které zapisujeme podobně jako (1.2) ve tvaru

$$(1.3) \qquad \{A_i\}_{i \in I} \quad \text{resp.} \quad (A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

kde pro $i \in I$ je A_i neprázdná množina (prostor strategií hráče i), je dalším základním údajem o konfliktní situaci. Strategie hráče i budeme značit generickým symbolem a_i (s případnými rozlišovacími indexy psanými nahoře); tj. $a_i \in A_i$.

Výsledková funkce

V matematickém popisu konfliktní situace musíme ještě zachytit způsob, jímž je určen výsledek. Ze shora uvedeného schematického popisu víme, že konečný výsledek konfliktní situace je určen jednáním všech jejích účastníků. V našem případě, kdy vycházíme z pojmu strategie, je výsledek konfliktu určen jednotlivými strategiemi všech účastníků, kteří se na konfliktní situaci podílejí. Např. v šachu je strategií bílého a strategií černého zřejmě předurčen celý průběh partie (při použití některého pravidla o ukončení hry, třeba pravidla o třikrát opakované posici), a tím i její výsledek. Je-li n počet hráčů a je-li množina hráčů I representována prvními n přirozenými čísly podle (1.1), pak podle našeho předpokladu libovolná n-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ taková, že pro každé $i \in I$ je a_i strategie hráče i, tj. $a_i \in A_i$, určuje jednoznačně výsledek, který označíme symbolem $\varrho(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; n-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in I$, přiřazuje hráči i některou jeho strategii a_i a toto přiřazení můžeme označit podobně jako v případech (1.2) a (1.3) symbolem $\{a_i\}_{i \in I}$.

Libovolné přiřazení $\{a_i\}_{i \in I}$ resp. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_i \in A_i$ $(i \in I)$, nazveme *vektorem strategií*. Množinu všech vektorů strategií označíme písmenem A; množinu A budeme nazývat *prostor vektorů strategií*. Zobrazení prostoru vektorů strategií A do prostoru výsledků Ω nazýváme *výsledková funkce*. Z předcházející úvahy vyplývá, že způsob určení výsledku je matematicky popsán jako některá daná výsledková funkce, kterou označujeme všude v dalším znakem ϱ. Hodnota

$$\varrho(a) = \varrho(\{a_i\}_{i \in I}), \quad \varrho(a) \in \Omega,$$

výsledkové funkce ϱ v bodě $a = \{a_i\}_{i \in I} \in A$ se nazývá *výsledek pro vektor strategií a*.

Poznámka. Zobrazení množiny X do množiny Y je předpis, jímž je přiřazen každému prvku množiny X právě jeden prvek množiny Y. Místo zobrazení X do Y se také říká funkce na množině X (s hodnotami v množině Y). Označuje-li písmeno f funkci na množině X, pak se prvek jednoznačně přiřazený funkcí f danému prvku x množiny X nazývá hodnota funkce f v prvku x a označuje se znakem $f(x)$ nebo bez závorek fx, nemůže-li dojít k záměně s obvyklým označením součinu. Množinám všech prvků určité kategorie, které jsou významné z hlediska některého teoretického vyšetřování, bývá v matematice zvykem říkat prostory a jejich prvkům body.

Ze schematického popisu, který jsme uvedli na začátku této kapitoly, plyne, že výsledková funkce ϱ je posledním základním údajem, který potřebujeme o konfliktní situaci znát, opíráme-li se o globální pojem strategie.

Naposledy vyšetřovaná dvojice základních údajů, totiž prostory strategií jednotlivých hráčů spolu s výsledkovou funkcí, symbolicky

$$(\{A_i\}_{i \in I}, \varrho), \tag{1.4}$$

se nazývá *pravidla hry*, nebo určitěji *pravidla hry v normálním tvaru*.

Interpretace základních dat

V dosud studovaném případě je matematický popis konfliktní situace úplně vyčerpán těmito údaji: (1) množinou hráčů I; (2) prostorem výsledků Ω; (3) preferenčním schematem hry $\{U_i\}_{i \in I}$; (4) pravidly hry $(\{A_i\}_{i \in I}, \varrho)$. Symbolicky zapíšeme tyto údaje jako čtveřici:

$$(I, \Omega, \{U_i\}_{i \in I}, (\{A_i\}_{i \in I}, \varrho)). \tag{1.5}$$

Tuto čtveřici interpretujeme podle následujících zásad:

1. *Princip realisace hry*: Každý hráč $i \in I$ provede volbu některé své strategie a_i v prostoru svých strategií A_i, aniž zná volby ostatních hráčů (požadavek úplné

neinformovanosti). Tím je určen některý vektor strategií $\{a_i\}_{i\in I}$, kterému je přiřazen výsledkovou funkcí ϱ výsledek $\varrho(\{a_i\}_{i\in I}) \in \Omega$.

2. *Princip motivace jednání*: Každý hráč $i \in I$ se řídí ve svém jednání výhradně podle svého systému preferencí U_i, což znamená, že když z nějakého důvodu očekává, že volba strategie $a_i \in A_i$ povede k výsledku ω a volba strategie $a'_i \in A_i$ povede k výsledku ω', přičemž preferuje výsledek ω proti ω', tj. $\omega \succ_i \omega'$, nikdy nezvolí strategii a'_i.

Princip motivace jednání má negativní charakter, ježto se v něm mluví o tom, kterou strategii hráč za určitých okolností nikdy nezvolí, ale nic se neříká o jeho skutečné volbě strategie. Tento princip nemá ještě nic společného s racionalitou jednání účastníků konfliktní situace, neboť důvody k očekávání určitých výsledků mohou mít zcela iracionální charakter. Hovoří se zde jenom o tom, v jakém smyslu je třeba chápat systémy preferencí jednotlivých hráčů z hlediska provedení hry.

Abychom osvětlili smysl matematického modelu konfliktní situace daného čtveřicí (1.5) ještě z jiné stránky, chceme zdůraznit, že trojice

$$(I, \Omega, (\{A_i\}_{i\in I}, \varrho)), \tag{1.6}$$

tedy specifikace účastníků i výsledků a pravidla hry tvoří to, co bychom mohli nazvat *objektivní basí* konfliktní situace resp. *hry*, kdežto preferenční schéma hry $\{U_i\}_{i\in I}$ charakterisuje její subjektivní stránku, totiž konflikt zájmů samotný. Změní-li se systém preferencí některého hráče, dostaneme novou konfliktní situaci, i když se stejnou objektivní basí. Např. když zkušený šachový hráč chce povzbudit nováčka tím, že ho nechá v určité partii vyhrát, znamená to, že změnil svůj systém preferencí, a tedy že se jedná z našeho hlediska o jinou hru, než jsou šachy s obvyklými preferencemi výhry proti remise i prohře.

Čtveřici (1.5), která představuje všechny základní údaje o konfliktní situaci, budeme krátce říkat *hra*, podrobněji *strategická hra v normálním tvaru*. O dalších podmínkách, které budeme klást na čtveřici (1.5), pojednáme později v kapitole 4.

Na závěr této kapitoly je třeba říci, že v každém modelu konfliktní situace, jímž se vůbec zabývala matematická teorie, je vždy explicitně, ale většinou jen implicitně zastoupena první trojice základních údajů, množina hráčů, prostor výsledků a preferenční schéma hry. Co se model od modelu mění, je matematické vyjádření pravidel hry — o tom se přesvědčíme v následujících kapitolách.

2. ÚPLNÁ INFORMACE

Posice

V předcházející kapitole jsme vybudovali model konfliktní situace, v němž nikde nefiguroval časový faktor, neboť jsme s pomocí pojmu strategie, daného a priori, obešli skutečnost, že účastníci mohou zasahovat do průběhu konfliktní situace v určitém časovém sledu, přičemž mají různé informace o předchozích zásazích jak vlastních, tak i ostatních hráčů.

Abychom pronikli hlouběji do pojmu strategie, musíme provést rozbor konfliktních situací na detailnějším matematickém modelu, v němž jsou možnosti, které účastníci mají k ovlivnění výsledku, popsány z hlediska vývoje konfliktu v čase. Jinými slovy to znamená, že pravidla hry, popsaná v předcházejícím modelu dvojicí (1.4), bude třeba nahradit komplikovanějším matematickým popisem, plynoucím z našich představ o časovém průběhu konfliktu. V matematickém modelu, který tak dostaneme, přestane být strategie pojmem apriorním, tj. primitivním pojmem teorie, a stane se pojmem aposteriorním, který lze definovat s pomocí jednodušších pojmů.

Začneme nejjednodušším případem konfliktní situace, v níž každý hráč v okamžiku, kdy má provést zásah do hry, je úplně informován o jejím stavu, do něhož do toho okamžiku došla, a to v tom smyslu, že zná všechny zásahy své a ostatních hráčů, které byly v dosavadním průběhu do rozvíjející se konfliktní situace provedeny. Matematické modely takových konfliktních situací představují speciální případ her v rozvinutém tvaru, jimž se říká *strategické hry s úplnou informací.*

Při matematickém popisu konfliktních situací, v němž chceme zachytit i časovou stránku konfliktu, vycházíme z představy, že konfliktní situace prochází ve svém vývoji jednotlivými stavy, které vznikají postupnými zásahy účastníků do jejího průběhu. Každý takový a priori možný stav konfliktní situace se nazývá *posice.* Ve formálním modelu je posice definována jako prvek nějaké dané neprázdné konečné množiny, kterou v našich úvahách budeme značit písmenem Z a kterou nazveme *prostor posic.* Prostor posic Z představuje tedy první základní údaj o pravidlech hry v našem novém matematickém modelu konfliktní situace.

Graf posic

Každým zásahem některého účastníka do průběhu konfliktu se změní stav konfliktní situace; je-li z posice zachycující stav bezprostředně před zásahem a z' posice, která vznikne bezprostředně po zásahu, charakterisuje dvojice (z, z') provedený zásah do konfliktní situace (zvaný tah). Různými možnými zásahy do konfliktní situace, která je v jedné a téže posici z, dostáváme různé posice z' bezprostředně následující po posici z. Množinu těch posic, které mohou vzniknout zásahem některého hráče do konfliktu v posici z, označíme všude v dalších úvahách symbolem Γz. Množina všech dvojic (z, z'), kde $z' \in \Gamma z$ pro dané $z \in Z$, representuje všechny možné zásahy do průběhu konfliktu v posici z.

Po formálně matematické stránce představuje Γ zobrazení prostoru posic Z do systému všech podmnožin prostoru Z, takže dvojice (Z, Γ) je ve smyslu obvyklé matematické terminologie graf; zobrazení Γ je tak druhým základním údajem o pravidlech hry pro rozvinutý tvar konfliktní situace.

Poznámka 1. Jsou-li X a Y množiny, pravíme, že X je podmnožina množiny Y, a píšeme $X \subset Y$, když každý prvek množiny X patří do množiny Y. Poněvadž předpokládáme, že množina je určena svými prvky, je rovnost $X = Y$ množin X a Y charakterisována podmínkou, že současně platí $X \subset Y$ a $Y \subset X$; není-li tato podmínka splněna, množiny si nejsou rovny, tj. $X \neq Y$. Prázdnou množinu, tj. množinu, která neobsahuje žádné prvky, označujeme jako obvykle znakem $\emptyset$; prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Poznámka 2. Množina, jejímiž prvky jsou množiny, tj. množina množin, se obyčejně nazývá systém množin. Je-li X množina a Φ zobrazení množiny X do systému všech podmnožin množiny X, nazývá se dvojice (X, Φ) graf. Je-li (X, Φ) graf, definujeme $\Phi^{-1}x$ jako množinu těch prvků $y \in X$, pro něž $x \in \Phi y$. Graf (X, Φ) se nazývá konečný, je-li X konečná množina.

O zobrazení Γ učiníme tyto předpoklady:

(1) existuje právě jeden prvek v Z — označíme jej $z^{(0)}$, tedy $z^{(0)} \in Z$ —, pro který $\Gamma^{-1}z^{(0)} = \emptyset$;

(2) pro každý prvek $z \in Z$ různý od $z^{(0)}$ obsahuje množina $\Gamma^{-1}z$ právě jeden prvek;

(3) pro každý prvek $z \in Z$ různý od $z^{(0)}$ existuje celé kladné číslo k a prvky $z^{(1)}$, $z^{(2)}, \ldots, z^{(k-1)}, z^{(k)}$, takové, že $z^{(k)} = z$ a $z^{(j)} \in \Gamma z^{(j-1)}$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$.

Jsou-li všechny tři předpoklady splněny, nazveme dvojici (Z, Γ) *grafem posic*. Posici $z^{(0)}$ jednoznačně určené požadavkem (1) říkáme *výchozí posice* (na daném grafu posic). Je-li $z \in Z$, $z \neq z^{(0)}$, nazveme prvek z' jednoznačně určený podle požadavku (2) vztahem $\Gamma^{-1}z = \{z'\}$ posice *bezprostředně předcházející* posici z (na daném grafu posic).

Předpoklad (3) odráží přirozený požadavek na průběh konfliktní situace, který lze vyslovit tak, že z výchozí posice lze dospět postupnými zásahy do každé jiné posice. Smysl prvních dvou požadavků, které klademe na graf posic, je intuitivně zřejmý; tedy např. požadavek (2) říká, že každé posici, která není výchozí, předchází právě jedna posice, z níž daná posice některým zásahem do průběhu konfliktu vznikne.

K tomu je nutno si uvědomit, že obvyklý pojem posice známý např. ze šachu splňuje sice požadavek (3) — každou šachovou posici lze odvodit postupnými tahy z posice počáteční, pokud se tato posice může v některé partii vyskytnout —, ale nevyhovuje prvním dvěma požadavkům, takže neodpovídá abstraktnímu pojmu posice, které jsme zavedli axiomaticky požadavky (1) až (3). Smluvená šachová posice počáteční může totiž vzniknout ze čtyř různých šachových posic tahy černými jezdci, takže není splněn požadavek (1). Samozřejmě, že jedna a táž šachová posice může vzniknout z různých šachových posic (rozumí se jedním tahem), takže není splněn požadavek (2). Navíc ovšem z šachové posice chápané v obvyklém smyslu není zřejmé, je-li možné provést některou rošádu nebo braní mimochodem, pokud jsou pro tuto posici tyto údaje relevantní.

Lze se však snadno přesvědčit, že jednoduchou modifikací pojmu šachová posice můžeme docílit, aby graf nově pojatých šachových posic splňoval vedle požadavku (3) také první dva předpoklady. Stačí, když za šachovou posici v novém smyslu prohlásíme tuto skupinu údajů: (a) šachovou posici v původním smyslu, tj. postavení jednotlivých kamenů na šachovnici spolu s určením hráče, který je na tahu; (b) údaj, zda některý hráč táhl králem nebo některou z věží; (c) údaj, zda je možné brát některého pěšce mimochodem; (d) seznam všech šachových posic (v původním smyslu) předcházejících šachové posici dané sub (a) od posledního braní nebo od posledního tahu pěšcem, spolu s údajem, kolikrát se v dosavadním průběhu partie opakovaly — přitom posicí, která se třikrát opakovala, pokládáme partii za ukončenou (s nerozhodným výsledkem). Jak snadno nahlédneme, údaje (b) a (c) zabezpečují pro každou posici z jednoznačné určení množiny Γz všech bezprostředně následujících posic; údaj (d) zabezpečuje splnění obou požadavků (1) a (2), přičemž požadavek (3) je automaticky splněn, jestliže jej splňují šachové posice brané v původním smyslu. Konečnost množiny všech posic v novém smyslu je zajištěna podmínkou o nemožnosti více než třikrát opakované posice.

Lze dokázat zcela obecně, že libovolný konečný graf, který splňuje požadavek (3) pro některý prvek $z^{(0)}$, je možno nahradit konečným grafem, který vyhovuje všem třem předpokladům (1), (2) a (3) s výchozí posicí $z^{(0)}$, aniž se přitom, zhruba řečeno, zobrazení definující původní graf podstatně změní. Odtud vyplývá, že shora uvedeným požadavkům na stavy konfliktní situace lze vždy vyhovět, zvolíme-li pro vyšetřovanou konfliktní situaci vhodnou obsahovou definici pojmu posice.

Z právě provedeného rozboru vidíme, že graf posic (Z, Γ) charakterisuje pro libovolnou konfliktní situaci první komplexní údaj o pravidlech hry pro rozvinutý tvar.

Výsledková funkce pro rozvinutý tvar

Začneme několika formálními definicemi. Prvek $z \in Z$ na daném grafu posic (Z, Γ) se nazývá *výsledná posice*, když $\Gamma z = \emptyset$. Z předpokladů kladených na graf posic plyne, že existuje aspoň jedna výsledná posice, tj. taková posice, v níž již nelze provést žádný další zásah do průběhu konfliktní situace. V našem modelu budeme předpokládat, že konflikt je ukončen, jakmile dospěje do některé výsledné posice, kdy už hráči vyčerpali všechny své možnosti zásahů do průběhu konfliktní situace.

Trajektorie délky k, kde k je celé nezáporné číslo, na grafu posic je $(k + 1)$-členná posloupnost $(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ posic, která splňuje požadavek, že $z_j \in \Gamma z_{j-1}$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$. V definici je zahrnut i případ $k = 0$, což znamená, že posice považujeme za trajektorie délky 0. Trajektorie $(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ délky k taková, že $z_0 = z^{(0)}$ a $\Gamma z_k = \emptyset$, se nazývá *partie o k tazích*. Řekneme, že π je *partie na grafu posic*, když existuje nezáporné celé číslo k, že π je partie o k tazích. Jinými slovy, partie je trajektorie začínající ve výchozí posici a končící v některé výsledné posici. Množinu všech partií na grafu posic označíme písmenem $\mathscr{P}$.

Trajektorie délky 1 na grafu posic, tj. dvojice (z_0, z_1), kde $z_1 \in \Gamma z_0$, nazýváme *tahy*. Představují tedy tahy možné zásahy do konfliktní situace. Je-li $\pi = (z_0, z_1, \ldots, z_k)$ partie, pak dvojici (z_{j-1}, z_j), kde $1 \leqq j \leqq k$, nazveme *j-tým tahem v partii π*. Z předpokladů o grafu posic plyne důležitý fakt, že *v každé partii* (a obecněji na každé trajektorii) *se vyskytne každá posice nejvýše jednou* (jde o tzv. orientovatelnost grafu posic).

Řekneme, že na grafu posic trajektorie $(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ spojuje posici z s posicí z', když $z_0 = z$ a $z_k = z'$. Požadavek (3) na graf posic říká, že výchozí posici lze spojit některou trajektorií s libovolnou jinou posicí, tedy i s libovolnou výslednou posicí. Odtud plyne, že na grafu posic existuje alespoň jedna partie, tedy $\mathscr{P} \neq \emptyset$. Poznamenejme, že našimi požadavky není vyloučen degenerovaný případ, že výchozí posice je současně i výsledná, takže je možná jenom jediná partie délky 0, neobsahující žádné tahy.

Při obsahové interpretaci předcházejících pojmů vidíme, že každá partie representuje některý možný průběh konfliktní situace (což platí i obráceně), takže množina $\mathscr{P}$ představuje vůbec všechny možné průběhy konfliktní situace. Tahy v partii představují uskutečněné zásahy do průběhu konfliktu. Poněvadž celý průběh konfliktní situace od výchozí posice až do některé výsledné posice jednoznačně odpovídá jednání všech hráčů během konfliktu, musí být ve shodě se schématem konfliktní situace, uvedeným v minulé kapitole, tímto průběhem výsledek již jednoznačně určen. To znamená, že každé partii je přiřazen její výsledek některým zobrazením množiny $\mathscr{P}$ všech partií do prostoru výsledků Ω; toto zobrazení, které budeme značit symbolem $\varrho_{\mathscr{P}}$ a nazývat *výsledková funkce pro rozvinutý tvar*, tvoří další základní údaj o pravidlech hry v rozvinutém tvaru.

Index tahu

Stav konfliktní situace, tj. posici, lze interpretovat jako dobu mezi dvěma zásahy do vývoje konfliktu mezi jeho účastníky. Každý zásah provádí jenom jeden z účastníků, takže pro každou posici je předem známo, který hráč zásah provede. Je tedy každé posici přiřazen některý z hráčů, který má zasáhnout do hry. Toto přiřazení čili zobrazení prostoru posic Z do množiny hráčů I budeme značit písmenem θ, takže $\theta(z) \in I$ pro $z \in Z$ označuje hráče, který, jak říkáme, *je na tahu* v posici z. Zobrazení θ, které tvoří další základní údaj o pravidlech hry v rozvinutém tvaru, nazýváme *index tahu*, což je zkrácené vyjádření pro jméno neboli index hráče, který je na tahu.

Jeden z podstatných znaků hráče, který nesmí chybět v žádném matematickém popisu konfliktní situace, záleží v tom, že výsledek je ovlivněn jeho vlastním jednáním. Možnosti jednání, které má hráč k disposici, tvoří v matematickém modelu součást pravidel hry. V případě, jímž jsme se zabývali v minulé kapitole, bylo jednání hráče popsáno jako volba některé jeho strategie, a to dříve, než se konfliktní situace započne, což nám umožnilo abstrahovat od časového faktoru. Když matematický model zachycuje konflikt rozvinutý v čase, je jednání hráče charakterisováno jeho zásahy do rozvíjené konfliktní situace.

Řekli jsme, že nejprve vyšetříme nejjednodušší případ, kdy hráč v každém okamžiku kdy zasahuje do hry, má úplnou informaci o všech předcházejících zásazích, které byly do toho okamžiku učiněny kterýmkoli z hráčů, a tedy i jím samým. To znamená, že v tom okamžiku zná úplně stav konfliktní situace, tj. posici. Na druhé straně, aby se hráč vůbec mohl zúčastnit hry, musí znát její pravidla, tedy pro danou posici z, v níž je na tahu, musí znát i množinu Γz všech posic bezprostředně následujících po posici z. Představujeme si tedy, že hráč $\theta(z)$, který je na tahu v posici z, zvolí jako jednu ze svých možných alternativ některou posici $z' \in \Gamma z$, neboli že učiní tah (z, z'). Množina Γz tudíž representuje zároveň souhrn všech možných alternativ, které má hráč jsoucí na tahu v posici z k disposici a z nichž má jednu zvolit.

Z provedené úvahy vyplývá, že v případě úplné informace jsou trojicí

$$((Z, \Gamma), \varrho_{\mathscr{P}}, \theta)\,, \tag{2.1}$$

kde (Z, Γ) je graf posic, $\varrho_{\mathscr{P}}$ výsledková funkce pro rozvinutý tvar a θ index tahu, tj. některé zobrazení prostoru Z do množiny I, pravidla hry již úplně popsána; tuto trojici údajů o konfliktní situaci námi vyšetřovaného typu budeme nazývat na rozdíl od dvojice (1.4) *pravidla hry s úplnou informací.*

Hra s úplnou informací

Čtveřici

$$(I, \Omega, \{U_i\}_{i \in I}, ((Z, \Gamma), \varrho_{\mathscr{P}}, \theta)), \tag{2.2}$$

kde první člen čtveřice je množina hráčů, druhý člen prostor výsledků, třetí člen preferenční schéma hry a čtvrtý člen čtveřice jsou pravidla hry s úplnou informací, budeme nazývat *strategická hra s úplnou informací.* Tuto čtveřici interpretujeme podle zásad, které jsou obdobou principů uvedených v předcházející kapitole:

1. *Princip realisace hry*: Je-li pro výchozí posici $z^{(0)}$ množina $\Gamma z^{(0)}$ prázdná, tedy $z^{(0)}$ je také výsledná posice, je $(z^{(0)})$ partie a výsledek hry je $\varrho_{\mathscr{P}}(z^{(0)})$. Není-li $z^{(0)}$ výsledná posice, provede hráč $\theta(z^{(0)})$ volbu některé své alternativy, tj. posice $z^{(1)} \in \in \Gamma z^{(0)}$, z těch, které má k disposici v posici $z^{(0)}$. Tím stav hry přejde v posici $z^{(1)}$ a hráč $\theta(z^{(1)})$ zvolí některou svou alternativu $z^{(2)} \in \Gamma z^{(1)}$, pokud $z^{(1)}$ není výsledná posice. Když již hráč $\theta(z^{(j)})$ zvolil alternativu $z^{(j+1)} \in \Gamma z^{(j)}$ pro $j = 0, 1, \ldots, k - 1$, aniž hra dospěla do některé výsledné posice, takže také $\Gamma z^{(k)} \neq \emptyset$, zvolí hráč $\theta(z^{(k)})$ některou svou alternativu $z^{(k+1)} \in \Gamma z^{(k)}$. Hra pokračuje tak dlouho, dokud pro některé m není posice $z^{(m)}$ zvolená hráčem $\theta(z^{(m-1)})$ výslednou posicí; pak $(z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = = \pi$ je partie a výsledek hry je $\varrho_{\mathscr{P}}(\pi)$.

2. *Princip motivace jednání*: V každé posici $z \in Z$ se hráč $\theta(z)$ řídí ve svém jednání výhradně podle svého systému preferencí $U_{\theta(z)}$, což znamená, že když z nějakého důvodu očekává, že volba alternativy $z' \in \Gamma z$ povede k výsledku ω' a volba alternativy $z'' \in \Gamma z$ povede k výsledku ω'', přičemž preferuje výsledek ω' proti ω'', tj. $\omega' \succ_{\theta(z)} \omega''$, nikdy nezvolí alternativu z''.

Rozvinuté strategie

Jak jsme již řekli na začátku této kapitoly, je ve hrách v rozvinutém tvaru strategie pojem definovaný v rámci teorie. *Strategie hráče i* ($i \in I$) ve hře s úplnou informací dané čtveřicí (2.2) je definována jako funkce a_i na množině

$$\{z : z \in Z; \theta(z) = i, \Gamma z \neq \emptyset\} \tag{2.3}$$

s hodnotami v prostoru Z, která splňuje podmínku, že $a_i(z) \in \Gamma z$ pro každé z, které je prvkem množiny (2.3). Množinu všech strategií hráče i ve hře (2.2) budeme značit stejně jako v první kapitole symbolem A_i; je-li množina (2.3) prázdná, pak A_i obsahuje jedinou strategii — prázdné zobrazení. Bude-li třeba zdůraznit aposteriorní charakter strategie ve hře v rozvinutém tvaru, budeme mluvit o rozvinuté strategii a podle toho budeme nazývat A_i *prostor rozvinutých strategií* hráče i.

Poznámka. Je-li $V(x)$ výrok týkající se x, který má smysl pro každý prvek x dané množiny X (tj. $V(x)$ buď platí, nebo neplatí), pak symbol $\{x: x \in X;\ V(x)\}$ označuje množinu těch $x \in X$, pro něž výrok $V(x)$ platí. Tedy výraz (2.3) representuje množinu všech těch posic, v nichž je na tahu hráč i a které zároveň nejsou výslednými posicemi na grafu posic.

O obsahové interpretaci pojmu strategie jsme mluvili již v první kapitole, kde jsme jako příklad vzali hru v šachy. Šachy jsou typickým příkladem her s úplnou informací, a proto mnoho z terminologie šachové přešlo v nomenklaturu teorie her, zvláště her v rozvinutém tvaru. Jako příklad hry s úplnou informací o více než dvou hráčích můžeme uvést halmu. Zopakujme tedy, že rozvinutá strategie přiřazuje každé posici, v níž je hráč na tahu (a není konec partie), některou určitou jeho alternativu vzatou z možných bezprostředně následujících posic — tedy provádí volbu pokračování ve hře místo samotného hráče.

Definujeme-li nyní prostor vektorů strategií A stejně jako v první kapitole, snadno nahlédneme, že vektor strategií $a = \{a_i\}_{i \in I} \in A$ můžeme chápat jako funkci definovanou na množině $\{z: z \in Z;\ \Gamma z \neq \emptyset\}$, tj. na množině těch posic, které nejsou výsledné, vztahem

$$a(z) = a_{\theta(z)}(z)\,; \quad z \in Z\,, \quad \Gamma z \neq \emptyset\,.$$

Řekneme, že partie π je *vytvořena* vektorem strategií a, když

$$\pi = (z_0, z_1, \ldots, z_k)\,, \quad z_j = a(z_{j-1}) \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, k\,;$$

jinými slovy, když partii π dostaneme postupným aplikováním funkce a na výchozí posici, tj. $z_0 = z^{(0)}$, $z_1 = a(z^{(0)})$, $z_2 = a(a(z^{(0)}))$, atd., tak dlouho, až se dostaneme do některé výsledné posice. Intuitivně je jasné a dá se formálně dokázat, že pro každý vektor strategií a existuje právě jedna partie vytvořená vektorem a; tuto partii jednoznačně přiřazenou tímto předpisem vektoru strategií a označíme symbolem $\pi(a)$. Lze dokázat, že také obráceně pro každou partii π existuje alespoň jeden vektor strategií a (může jich být i více) takový, že jím je partie π vytvořena, tj. že $\pi = \pi(a)$. Položíme-li pro každý vektor strategií $a \in A$

$$\varrho(a) = \varrho_{\mathscr{P}}(\pi(a))\,,$$

představuje ϱ výsledkovou funkci ve smyslu předcházející kapitoly, tj. zobrazení prostoru vektorů strategií do prostoru výsledků, kterou nazveme *normalisovanou výsledkovou funkcí* hry (2.2).

Definicemi prostorů (rozvinutých) strategií A_i $(i \in I)$ a normalisované výsledkové funkce ϱ jsme dostali z pravidel hry s úplnou informací nová pravidla, totiž pravidla hry v normálním tvaru (1.4). Těmto odvozeným pravidlům hry, které mají tvar (1.4), říkáme *normalisovaná pravidla hry s úplnou informací* a interpretujeme je stejně jako v první kapitole podle tam uvedeného principu o realisaci hry.

Tento přechod od pravidel hry s úplnou informací k normalisovaným pravidlům se nazývá *normalisací hry* s úplnou informací. Takto odvozenou strategickou hru v normálním tvaru nazýváme pak *normalisovaným tvarem hry* s úplnou informací. Ukázali jsme tak, že *každou hru s úplnou informací lze převést na hru v normálním tvaru*, nebo jak stručně říkáme, *lze ji normalisovat*. V převážné většině případů, kdy provádíme rozbor racionálního jednání hráčů, stačí se omezit na normalisovaný tvar hry, kdy hráči místo volby tahů během hry zvolí některou ze svých strategií ještě před jejím zahájením.

Na závěr této kapitoly chceme zdůraznit, že každou strategickou hru v rozvinutém tvaru lze normalisovat, což si ukážeme v následující kapitole.

3. NEÚPLNÁ INFORMACE

Informační množiny

Při matematickém popisu konfliktní situace z hlediska jejího průběhu v čase se v našem výkladu omezujeme na případ, že se stav konfliktní situace mění s časem diskrétně. V teorii strategických her se studují rovněž případy, v nichž změny stavu konfliktní situace probíhají v závislosti na čase spojitě; studium takových případů vyžaduje náročného matematického aparátu, avšak z hlediska pojmové analysy nepřináší nic podstatně nového. Proto podržíme předpoklad o diskrétní změně stavu konfliktu i při vyšetřování obecnějšího typu konfliktních situací, ve kterých účastníci nemají úplnou informaci o předcházejícím průběhu konfliktu v okamžicích, kdy do něho zasahují.

To znamená, že především setrváme u předpokladu, že prostor posic tj. stavů, jimiž konflikt ve svém vývoji může procházet, je konečný. Stejně tak jako v případě úplné informace dále předpokládáme, že hráči zasahují do průběhu konfliktu postupně, přičemž každý zásah způsobí změnu stavu konfliktní situace, takže graf posic (Z, Γ), definovaný v předcházející kapitole požadavky (1), (2), (3) na zobrazení Γ, představuje první základní údaj o pravidlech hry v rozvinutém tvaru i pro případ neúplné informace.

V matematickém modelu konfliktní situace s neúplnou informací se tedy nezmění ani definice pojmu partie, charakterisující skutečný celkový průběh konfliktu, jako trajektorie na grafu posic začínající ve výchozí posici a končící v některé výsledné posici, takže symbol $\mathscr{P}$ bude značit jako v minulé kapitole množinu všech možných partií. Dostaneme tedy podobně jako pro případ úplné informace, že dalším základním údajem o pravidlech hry v rozvinutém tvaru zůstává i v případě neúplné informace výsledková funkce pro rozvinutý tvar, tj. některé zobrazení $\varrho_{\mathscr{P}}$ množiny $\mathscr{P}$ do prostoru výsledků Ω, přiřazující každé partii $\pi \in \mathscr{P}$ výsledek $\varrho_{\mathscr{P}}(\pi) \in \Omega$.

V každé posici, do níž konfliktní situace dospěje, musí být na tahu právě jeden z hráčů, ať má nebo nemá v této posici úplnou informaci o minulém průběhu konfliktu; tudíž index tahu, tj. některé zobrazení θ prostoru posic Z do množiny hráčů I, tvoří rovněž základní údaj o konfliktní situaci s neúplnou informací. Tedy

$$(3.1) \qquad (Z, \Gamma), \varrho_{\mathscr{P}}, \theta$$

jsou tři základní údaje o pravidlech hry v rozvinutém tvaru, bez ohledu na to, jde-li o matematický popis konfliktní situace s úplnou nebo s neúplnou informací.

Z předcházející kapitoly víme, že údaje (3.1) zcela postačily k matematickému popisu pravidel hry s úplnou informací (srovn. (2.1)), kdežto při neúplnosti informace tomu tak není. Neúplnost informace znamená, že účastník konfliktní situace nezná v okamžiku svého zásahu do průběhu konfliktu posici, do níž konfliktní situace dospěla, jinými slovy, nezná skutečnou okamžitou posici hry. Představujeme si, že hráč v okamžiku, kdy má provést zásah do konfliktní situace, je pouze informován o tom, že skutečná okamžitá posice hry leží v některé množině posic. Tuto množinu posic, která představuje hráčovu informaci o skutečné posici v okamžiku zásahu, nazýváme *informační množinou* hráče, který je na tahu.

Např. v bridži je skutečná posice při sehrávce v okamžiku, kdy má do hry zasáhnout některý z hráčů, charakterisována předcházejícím průběhem sehrávky a údajem o listech jednotlivých hráčů včetně stolu. Hráč, který má zasáhnout do hry odhozem některé karty ze svého listu, zná sice předcházející průběh sehrávky, ale nezná listy spoluhráčů, tj. karty, které spoluhráčům v tom okamžiku zbývají v ruce. Jeho informaci v okamžiku zásahu lze tedy vyjádřit jako množinu těch posic, z nichž každá odpovídá některému rozložení zbývajících karet mezi spoluhráče, a to těch, které ještě do toho okamžiku nebyly během sehrávky odhozeny na některý zdvih nebo které nemá ve svém listě ani neleží na stole. Průběh licitace včetně znalosti užitého licitačního systému a obvyklé konvence mezi hráči na lince obránců o provedení sehrávky umožňují hráči bližší orientaci o skutečné okamžité posici v jeho informační množině, ale tato dodatečná informace nemůže být součástí pravidel hry.

Opakujeme, že skutečná okamžitá posice je prvkem informační množiny hráče, který je v daném okamžiku na tahu. V průběhu konfliktu, tj. v jedné a téže partii, se každá posice vyskytne nejvýše jednou, jak plyne z vlastností grafu posic. Poněvadž informační množina představuje z hlediska jedné partie časový okamžik, v němž zasahuje některý hráč do jejího průběhu, nemohou dvě různé posice, které se vyskytnou v téže partii, být prvky jedné a téže informační množiny; názorně řečeno, každá partie projde danou informační množinou nejvýše jednou. Tento požadavek na informační množiny nazývají někteří autoři podmínkou isovalence mezi prvky jedné a téže informační množiny.

Doposud studujeme konfliktní situace, do jejichž průběhu zasahují jenom jejich účastníci a nikoli náhoda. Matematickým modelům takových konfliktních situací říkáme *strategické hry bez náhodových tahů* (rozumí se, že jde o hry v rozvinutém tvaru). V těchto hrách tedy každá posice, která není výsledná, musí být prvkem některé informační množiny, a to informační množiny toho hráče, který je v této posici na tahu. V našem matematickém formalismu budeme požadovat, aby také každá výsledná posice byla prvkem některé informační množiny. Smysl informační množiny obsahující výsledné posice je v tom, že hráč jsoucí na tahu nemá už možnost zásahu, což znamená, že se konflikt skončil. Z tohoto pojetí vyplývá, že informační množina obsahující aspoň jednu výslednou posici se musí skládat již jenom ze samých výsledných posic.

Poněvadž v jedné a téže posici, do níž konflikt dospěje, nemůže mít hráč jsoucí v ní na tahu dvojí různou informaci, plyne ze smyslu informační množiny přirozený požadavek, že jedna a táž posice není prvkem dvou různých informačních množin.

Shrneme-li všechny právě provedené úvahy o vlastnostech informačních množin, dojdeme k závěru, že systém všech informačních množin, který budeme v dalším textu značit písmenem $\mathscr{J}$, je matematicky popsán jako rozklad prostoru posic Z, jenž splňuje následující *podmínku isovalence*:

Když $J \in \mathscr{J}$, $z \in J$, $z' \in J$, $z \neq z'$, *pak neexistuje trajektorie na grafu posic* (Z, Γ), *která spojuje posici* z *s posicí* z'. Jinými slovy, dvě různé posice z a z' v téže informační množině J se nemohou vyskytnout v jedné a téže partii.

Poznámka. Jsou-li X a Y množiny, znamená symbol $X \cap Y$ množinu těch prvků, které současně leží v X a v Y; tato množina se nazývá průnik množin X a Y. Množiny X a Y jsou disjunktní, když $X \cap Y = \emptyset$, tj. jestliže X a Y nemají společných prvků. Systém množin se nazývá disjunktní, jsou-li každé dvě množiny v něm ležící disjunktní. Systém $\mathscr{X}$ podmnožin některé dané množiny M budeme nazývat rozklad množiny M, je-li $\mathscr{X}$ disjunktní systém množin takový, že pro každé $x \in M$ existuje $X \in \mathscr{X}$, pro něž $x \in X$.

Podmínka, že systém všech informačních množin je rozklad prostoru posic, odpovídá shora uvedeným požadavkům, aby dvě různé informační množiny neměly společné prvky a aby současně každá posice byla prvkem některé informační množiny. Vztah mezi pojmy informační množina a index tahu odpovídá v matematickém vyjádření podmínce mezi θ a $\mathscr{J}$:

$$\text{(3.2)} \qquad \textit{když} \; J \in \mathscr{J}\,, \quad z \in J\,, \quad z' \in J\,, \quad \textit{pak} \quad \theta(z) = \theta(z')\,,$$

která říká, že na dané informační množině je na tahu stále jeden a tentýž hráč. Klademe-li definitoricky

$$\text{(3.3)} \qquad \theta^*(J) = \theta(z) \quad \text{pro některé} \quad z \in J \quad (J \in \mathscr{J})\,,$$

plyne z podmínky (3.2), že θ^* je jednoznačně definováno jako funkce na systému informačních množin $\mathscr{J}$ s hodnotami v množině hráčů I. Přitom hodnota $\theta^*(J)$ bývá nazývána *určení hráče* na informační množině J.

Označíme-li jako Z_i množinu všech posic, v nichž je na tahu hráč i, tj.

$$Z_i = \{z : z \in Z; \theta(z) = i\}\,,$$

tvoří množinový systém

$$\text{(3.4)} \qquad \{J : J \in \mathscr{J}; \theta^*(J) = i\}$$

rozklad množiny Z_i, který se nazývá *informační schéma hráče* i $(i \in I)$. Informační schéma hráče i se skládá ze všech informačních množin, na nichž je hráč i na tahu. Označuje-li $\mathscr{J}_i$ informační schéma hráče i, tj. množinový systém (3.4), lze dvojici základních údajů θ a $\mathscr{J}$ nahradit jediným údajem, a to přiřazením $\{\mathscr{J}_i\}_{i \in I}$, které přiřazuje každému hráči jeho informační schéma a tedy splňuje podmínky, že (1) pro $i \in I$ je $\mathscr{J}_i$ disjunktní systém podmnožin prostoru Z a (2) systém $\{Z_i : i \in I\}$, kde

$$Z_i = \{z : z \in Z;\ \text{existuje } J \in \mathscr{J}_i \text{ tak, že } z \in J\}\ , \quad i \in I\ ,$$

je rozklad prostoru Z.

Závěrem konstatujeme, že systém informačních množin $\mathscr{J}$ representuje nový základní údaj o pravidlech hry v rozvinutém tvaru pro případ neúplné informace. Úplnost informace hráče $\theta(z)$, který je na tahu v posici z, je matematicky vyjádřena vztahem $\{z\} \in \mathscr{J}$, což znamená, že jednoelementová množina obsahující právě prvek z je informační množinou hráče $\theta(z)$. Ve hře s úplnou informací lze tedy definovat systém informačních množin $\mathscr{J}$ vztahem

$$\mathscr{J} = \{\{z\} : z \in Z\}\ ; \tag{3.5}$$

jinak řečeno, hru s úplnou informací můžeme chápat jako speciální případ hry s neúplnou informací, o čemž se přesvědčíme také v dalším výkladu.

Alternativy

Zásahem hráče $\theta(z_0)$ provedeném v posici z_0 se změní stav hry v některou bezprostředně následující posici $z_0' \in \Gamma z_0$. V případě neúplné informace hráč $\theta(z_0)$ zná jenom informační množinu J, v níž leží posice z_0, takže nemůžeme charakterisovat jeho zásah jako volbu některé posice z_0' z množiny Γz_0. Každý možný zásah hráče s informační množinou J, tj. hráče $\theta^*(J) = \theta(z_0)$ – srovn. (3.3), musí přiřazovat každé posici $z \in J$ některou posici $z' \in \Gamma z$, čímž teprve je skutečné okamžité posici z_0 hráči neznámé přiřazena některá posice v Γz_0. Můžeme tedy zásah hráče s informační množinou J charakterisovat jako některé zobrazení d jeho informační množižiny J do množiny všech posic, které bezprostředně následují po posicích z informační množiny J, přičemž toto zobrazení d musí mít vlastnost, že $d(z) \in \Gamma z$ pro každé $z \in J$.

Alternativou odpovídající zásahu d budeme rozumět množinu všech posic, které vzniknou z informační množiny J zásahem d; tuto množinu můžeme symbolicky zapsat ve tvaru $\{d(z) : z \in J\}$. Položme pro každé $J \in \mathscr{J}$

$$\Gamma J = \{z' : z' \in Z;\ \text{existuje } z \in J \text{ tak, že } z' \in \Gamma z\}\ ;$$

znak ΓJ představuje tedy množinu všech posic, které bezprostředně následují po informační množině J. Každá z možných alternativ hráče s informační množinou J musí být podmnožinou množiny ΓJ, která má právě jeden společný prvek s množinou Γz pro kteroukoli posici z z informační množiny J.

Ježto dvě různé alternativy, které má hráč s informační množinou J v daném okamžiku k disposici, odpovídají dvěma různým zásahům do hry a tudíž musí vést pro každou posici z z informační množiny J k dvěma různým posicím bezprostředně následujícím po posici z, neboť každý prvek $z \in J$ se může vyskytnout jako skutečná okamžitá posice v některé partii, vyvodíme odtud, že dvě různé alternativy nemohou mít společné prvky. Na druhé straně musí být možno nalézt ke každé posici z' bezprostředně následující po informační množině J alternativu, která k ní vede; jinými slovy, pro libovolné $z' \in \Gamma J$ existuje alternativa $\mathscr{A}$ taková, že $z' \in \mathscr{A}$.

Označme symbolem ΔJ množinu všech alternativ, které má hráč s informační množinou J k disposici v okamžiku, v němž má zasáhnout do konfliktu. Z provedené úvahy vyplývají tyto požadavky na množinu alternativ ΔJ:

(1) množinový systém ΔJ je rozklad množiny ΓJ;

(2) jestliže $\mathscr{A} \in \Delta J$, $z \in J$, pak průnik $\mathscr{A} \cap \Gamma z$ obsahuje právě jeden prvek.

Matematicky vyjadřuje Δ funkci na systému informačních množin $\mathscr{J}$, která přiřazuje každé informační množině $J \in \mathscr{J}$ jako hodnotu některý systém množin ΔJ splňující podmínky (1) a (2). Funkce Δ představuje poslední základní údaj o pravidlech hry v rozvinutém tvaru při neúplné informaci pro případ, kdy se nevyskytnou náhodové tahy.

Možnosti jednání hráče $\theta^*(J)$ v okamžiku, který odpovídá v průběhu partie informační množině J, jsou matematicky vyjádřeny množinou alternativ ΔJ; z těchto možností má hráč jednu zvolit, takže zásah do hry lze charakterisovat jako volbu některé alternativy $\mathscr{A} \in \Delta J$. Označíme-li $d_{\mathscr{A}}(z)$ prvek definovaný pro $z \in J$ a $\mathscr{A} \in \Delta J$ podle podmínky (2) rovnicí

$$\mathscr{A} \cap \Gamma z = \{d_{\mathscr{A}}(z)\}, \tag{3.6}$$

representuje zobrazení $d_{\mathscr{A}}$ informační množiny J do množiny ΓJ zásah odpovídající alternativě $\mathscr{A}$; platí totiž:

$$\mathscr{A} = \{d_{\mathscr{A}}(z) : z \in J\}.$$

Položíme-li

$$\mathscr{D}_J = \{d_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \in \Delta J\},$$

pak množina alternativ ΔJ a množina zobrazení $\mathscr{D}_J$ si jednojednoznačně odpovídají; kterékoli zobrazení d v množině $\mathscr{D}_J$ budeme nazývat *rozhodnutí* hráče s informační množinou J, tj. hráče $\theta^*(J)$. Každé alternativě $\mathscr{A}$ resp. rozhodnutí $d = d_{\mathscr{A}}$ a skutečné okamžité posici z_0, vyskytnuvší se v průběhu partie a ležící v informační množině J, odpovídá tah $(z_0, d_{\mathscr{A}}(z_0))$, který vznikne jako důsledek volby alternativy $\mathscr{A}$ v posici z_0 nebo, což je totéž, jako důsledek rozhodnutí d v posici z_0.

Smluvíme se, že symbol $|X|$ bude značit počet prvků dané konečné množiny X. Je-li při této úmluvě $|J| = l$, $|\Delta J| = k$, dále jsou-li dány informační množina J

a množina alternativ ΔJ výčtem svých prvků ve tvaru

$$J = \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}, \quad \Delta J = \{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_k\},$$

a klademe-li pro jednoduchost

$$d_\alpha = d_{\mathscr{A}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k,$$

pak jsou v matici

$$\begin{Vmatrix} d_1(z_1) & d_1(z_2) & \ldots & d_1(z_l) \\ d_2(z_1) & d_2(z_2) & \ldots & d_2(z_l) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ d_k(z_1) & d_k(z_2) & \ldots & d_k(z_l) \end{Vmatrix}, \tag{3.7}$$

typu $k \times l$ všechny prvky navzájem různé, α-tý řádek matice představuje výčet prvků alternativy $\mathscr{A}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, k$), β-tý sloupec matice představuje výčet prvků množiny Γz_β ($\beta = 1, 2, \ldots, l$), kdežto souhrn všech prvků této matice je identický s množinou ΓJ. Volba alternativy $\mathscr{A}_\alpha$, odpovídající volbě řádku matice, při skutečné okamžité posici z_β, odpovídající sloupci matice, vede k bezprostředně následující posici $d_\alpha(z_\beta)$, kde $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, $\beta = 1, 2, \ldots, l$, tj. k posici, v níž se protíná α-tý řádek matice s β-tým sloupcem. Jinak řečeno, uvedená matice representuje problém *rozhodování za neurčitosti*, před kterým stojí hráč s informační množinou J mající alternativy ΔJ; stupeň neurčitosti je vyjádřen počtem sloupců matice, tj. počtem prvků v informační množině J.

Poznámka. Matici typu $k \times l$ lze formálně definovat jako zobrazení množiny všech dvojic (α, β) přirozených čísel, kde $1 \leqq \alpha \leqq k$, $1 \leqq \beta \leqq l$, do některé dané množiny a lze ji zapsat ve formě tabulky, v níž prvek přiřazený dvojici (α, β) stojí v průsečíku α-té řádky a β-tého sloupce tabulky.

Z právě provedeného rozboru vidíme, že z předpokladů (1) a (2) mimo jiné vyplývá, že pro dvě různé posice z_1 a z_2 v téže informační množině musí platit, že množiny Γz_1 a Γz_2 obsahují tentýž počet prvků; v symbolech: $|\Gamma z_1| = |\Gamma z_2|$ pro $z_1 \in J$, $z_2 \in J$, kde $J \in \mathscr{J}$.

Z vlastností (1) a (2) funkce Δ a z podmínky isovalence mezi prvky téže informační množiny dostaneme, že

$$\textit{když} \quad J \in \mathscr{J}, \quad z_1 \in J, \quad z_2 \in J, \quad \Gamma z_1 = \emptyset,$$
$$\textit{pak} \quad \Gamma z_2 = \emptyset, \quad \Delta J = \emptyset,$$

což znamená, že informační množina obsahující jednu výslednou posici se již skládá jen z výsledných posic a že hráč na tahu s touto informační množinou nemá možnost dalšího zásahu, neboť jeho množina alternativ je prázdná. Doplňme také, že již ze samotné podmínky isovalence nutně plyne, že $\{z^{(0)}\} \in \mathscr{J}$, takže hráč $\theta(z^{(0)})$, který je na tahu ve výchozí posici $z^{(0)}$, má úplnou informaci a tedy ví, že zahajuje partii.

Všimněme si, že množina alternativ hráče $\theta(z)$, který má v posici z úplnou informaci o předcházejícím průběhu partie, tj. $\{z\} \in \mathscr{J}$, je vyjádřena vztahem

$$(3.8) \qquad \Delta\{z\} = \{\{z'\} : z' \in \Gamma z\} ,$$

jak ihned plyne z podmínek (1) a (2) na funkci Δ. Tudíž lze ve hře s úplnou informací, v níž je, jak víme, systém informačních množin $\mathscr{J}$ definován vztahem (3.5), definovat funkci Δ vztahem (3.8) pro libovolné $z \in Z$ čili $\{z\} \in \mathscr{J}$.

Dvojice $(\mathscr{J}, \Delta)$, přiřazující každé informační množině $J \in \mathscr{J}$ problém rozhodování za neurčitosti $(J, \Delta J)$ representovatelný maticí tvaru (3.7), představuje další komplexní údaj o pravidlech hry v rozvinutém tvaru; tuto dvojici budeme v následujícím textu nazývat *pravidlo pro volbu alternativ.*

Hra bez náhodových tahů

V obecném případě neúplné informace jsou *pravidla hry bez náhodových tahů*, jak jsme se přesvědčili, matematicky popsána čtveřicí

$$(3.9) \qquad ((Z, \Gamma), \varrho_{\mathscr{P}}, \theta, (\mathscr{J}, \Delta)) ,$$

kde první člen je graf posic, druhý člen výsledková funkce pro rozvinutý tvar, třetí člen index tahu a čtvrtý člen je pravidlo pro volbu alternativ. *Strategická hra bez náhodových tahů* bude tedy definována jako čtveřice, jejíž první člen je množina hráčů I, druhý člen prostor výsledků Ω, třetí člen preferenční schéma hry $\{U_i\}_{i \in I}$ a konečně čtvrtý člen jsou pravidla hry bez náhodových tahů dané čtveřicí (3.9). Připomeňme, že se přitom v pravidlech hry (3.9) předpokládá, že index tahu θ a systém informačních množin $\mathscr{J}$ jsou spolu vázány podmínkou (3.2). Strategickou hru bez náhodových tahů interpretujeme podle obdobných zásad jako v dřívějších kapitolách:

1. *Princip realisace hry*: Informační množina hráče $\theta(z^{(0)})$ jsoucího na tahu ve výchozí posici je $\{z^{(0)}\}$. Pro $\Delta\{z^{(0)}\} = \emptyset$ je $(z^{(0)})$ partie s výsledkem $\varrho_{\mathscr{P}}(z^{(0)})$. Je-li množina alternativ $\Delta\{z^{(0)}\}$ neprázdná, zvolí hráč $\theta(z^{(0)})$ některou alternativu $\mathscr{A}_1 = \{z^{(1)}\} \in \Delta\{z^{(0)}\}$. Když již hra proběhla posicemi $z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(k)}$, aniž dospěla do výsledné posice, je $\Gamma z^{(k)} \neq \emptyset$ a tedy také pro informační množinu J_k hráče $\theta(z^{(k)})$ jednoznačně určenou požadavkem, aby $z^{(k)} \in J_k$, $J_k \in \mathscr{J}$, musí být ΔJ_k neprázdné. Hráč $\theta(z^{(k)})$ zvolí některou alternativu $\mathscr{A}_{k+1} \in \Delta J_k$ a hra přejde do posice $z^{(k+1)}$ jednoznačně určené podmínkou, že $\mathscr{A}_{k+1} \cap \Gamma z^{(k)} = \{z^{(k+1)}\}$. Hra pokračuje tak dlouho, dokud pro některé m není posice $z^{(m)}$, která je důsledkem volby alternativy $\mathscr{A}_m$ v posici $z^{(m-1)}$, výsledná posice hry. Pak také $\Delta J_m = \emptyset$, kde J_m je informační množina, pro niž $z^{(m)} \in J_m$, a hra se skončí s výsledkem $\varrho_{\mathscr{P}}(z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})$.

2. *Princip motivace jednání*: Na každé informační množině J se hráč $\theta^*(J)$ řídí ve svém jednání výhradně podle svého systému preferencí $U_{\theta^*(J)}$. Když tedy očekává,

že volba alternativy $\mathscr{A}_j \in \Delta J$ povede k výsledku $\omega^{(j)}$, kde $j = 1, 2$ a $\omega^{(1)} \succ_{\theta^*(J)} \omega^{(2)}$, pak nikdy nezvolí alternativu $\mathscr{A}_2$.

Viděli jsme, že pro hru s úplnou informací se pravidlo pro volbu alternativ v podstatě redukuje na graf posic (srovn. (3.5) a (3.8)), čehož jsme využili v předešlé kapitole při definici pravidel hry s úplnou informací, ovšem s interpretací, která je ve shodě s právě uvedenou. Při interpretaci pravidel hry s neúplnou informací si někdy představujeme, že znalost o skutečné okamžité posici hry během partie má nějaký vnější pozorovatel, kterého budeme jmenovat rozhodčím. Tento rozhodčí, když partie dospěje do posice z, stanoví informační množinu J, pro niž $z \in J$, a sdělí hráči $\theta(z)$, že nastal okamžik jeho zásahu do hry s informační množinou J; hráč pak provede volbu některé alternativy $\mathscr{A} \in \Delta J$.

Normalizace

Definujeme *strategii hráče* i $(i \in I)$ ve hře bez náhodových tahů s pravidly hry (3.9) jako některou funkci a_i na množinovém systému $\mathscr{J}_i^*$, daném rovností

$$\mathscr{J}_i^* = \{J : J \in \mathscr{J} \,;\, \theta^*(J) = i, \Delta J \neq \emptyset\}\,, \tag{3.10}$$

s hodnotami $a_i(J)$ ležícími pro každé $J \in \mathscr{J}_i^*$ v množině alternativ ΔJ, tj. $a_i(J) \in \Delta J$. Množinu všech strategií hráče i v dané hře budeme značit jako v kapitole 1 symbolem A_i. Prostor strategií hráče i je vždy neprázdný a konečný; v degenerovaném případě, kdy množinový systém $\mathscr{J}_i^*$ je prázdný, existuje právě jedna strategie, totiž prázdné zobrazení, která charakterisuje skutečnost, že hráč i v průběhu hry neprovádí vůbec žádné volby alternativ, poněvadž není v žádné posici, která není výsledná, na tahu. Bude-li toho třeba, použijeme jako v předcházející kapitole pro prostor A_i názvu *prostor rozvinutých strategií* hráče i.

Strategii hráče i můžeme interpretovat jako návod pro hráče i, jakou volbu alternativy má provést, je-li na tahu v posici s informační množinou neobsahující výsledné posice, ať je tato množina jinak kterákoli z jeho informačního schématu. Smysl pojmu strategie stručně vystihneme, když řekneme, že strategie provádí volbu pokračování ve hře místo hráče.

Je-li opět A prostor vektorů strategií, pak jakýkoli vektor strategií $a = \{a_i\}_{i \in I}$ v prostoru A lze brát jako funkci definovanou vztahem

$$a(J) = a_{\theta^*(J)}(J) \quad \text{pro} \quad J \in \mathscr{J}\,, \quad \Delta J \neq \emptyset\,.$$

Budeme říkat, že partie π je *vytvořena* vektorem strategií a, když

$$\pi = (z_0, z_1, \ldots, z_k)\,, \quad z_{j-1} \in J_{j-1} \in \mathscr{J}\,, \quad z_j = d_{a(J_{j-1})}(z_{j-1}) \text{ pro } 1 \leqq j \leqq k$$

(srovn. definici (3.6)); slovy, z_j je posice, která vznikne z posice z_{j-1} volbou alternativy $a(J_{j-1})$, kde J_{j-1} je informační množina určená podmínkou $z_{j-1} \in J_{j-1}$. Lze snadno ukázat, že ke každému vektoru strategií a existuje právě jedna partie jím vytvořená, kterou označíme symbolem $\pi(a)$; obráceně lze najít pro každou partii aspoň jeden vektor strategií, kterým je vytvořena. *Normalisovanou výsledkovou funkci* dané hry definujeme jako v minulé kapitole vztahem

$$\varrho(a) = \varrho_{\mathscr{P}}(\pi(a)) \quad \text{pro} \quad a \in A\,.$$

Prostory rozvinutých strategií hry bez náhodových tahů spolu s normalisovanou výsledkovou funkcí představují *normalisovaná pravidla* této hry, a to pravidla hry ve smyslu kapitoly 1. Tím dostáváme z dané hry odvozenou hru v normálním tvaru, kterou obdobně jako v předešlé kapitole nazýváme *normalisovaným tvarem* hry bez náhodových tahů. Zároveň jsme předvedli, jakým způsobem lze převést jakoukoli hru s neúplnou informací na hru v normálním tvaru, čímž jsme dokázali, že každou hru v rozvinutém tvaru, která neobsahuje náhodové tahy, lze normalisovat.

Na závěr opakujeme, že smyslem normalisace hry v rozvinutém tvaru je nahradit jednotlivé volby dílčích alternativ v průběhu partie volbou jediné globální alternativy – strategie – ještě před zahájením partie; tím docilujeme zjednodušení z hlédisk analysy pojmu racionality jednání, kterou chceme provádět, i když faktická komplikovanost konkrétních případů se tím nezmění.

V příští kapitole uvidíme, že lze normalisovat také hry v rozvinutém tvaru, v nichž se vyskytují náhodové tahy. Normalisace hry obsahující náhodové tahy souvisí úzce s charakterem prostoru výsledků, proto bude třeba předtím provést podrobnější rozbor pojmu výsledku; tento rozbor rovněž odložíme až do příští kapitoly.

Dokonalá paměť

Úvodem si doplníme nomenklaturu týkající se grafů, spec. grafu posic. Když $z \in Z$, $z' \in Z$, pak pravíme, že *posice z předchází posici z'*, když existuje trajektorie spojující posici z (jako počáteční vrchol trajektorie) s posicí z' (představující koncový vrchol trajektorie); nevylučujeme ani případ, že $z = z'$ (trajektorie délky 0). Jsou-li M_1 a M_2 nějaké množiny posic, tj. $M_1 \subset Z$, $M_2 \subset Z$, řekneme, že *množina M_1 předchází množině M_2* (na daném grafu posic), jestliže pro každou posici $z' \in M_2$ lze najít posici $z \in M_1$ takovou, že z předchází posici z'.

Označuje-li $\mathscr{J}_i$ ($i \in I$) informační schéma hráče i, tj. množinový systém (3.4), a jsou-li $J^{(1)}$ a $J^{(2)}$ informační množiny hráče i, tj. $J^{(1)} \in \mathscr{J}_i$, $J^{(2)} \in \mathscr{J}_i$, takové, že informační množina $J^{(1)}$ předchází informační množině $J^{(2)}$, pak pro libovolnou posici $z' \in J^{(2)}$ je možno nalézt právě jednu posici $z \in J^{(1)}$ tak, že jednoznačně určená trajektorie spojující posici z s posicí z' představuje úsek některé partie. V každé takové partii representuje informační množina $J^{(1)}$ časový okamžik zásahu hráče i do průběhu partie předcházející časovému okamžiku charakterisovanému informační množinou $J^{(2)}$, v němž má zasáhnout do hry týž hráč i. Když $\mathscr{A}$ byla alternativa hráče i, kterou tento hráč zvolil na informační množině $J^{(1)}$, tj. $\mathscr{A} \in \Delta J^{(1)}$, pak předpoklad o tom, že pravidla hry zaručují hráči i, aby si zapamatoval alternativu $\mathscr{A}$, kterou zvolil, alespoň do okamžiku odpovídajícímu informační množině $J^{(2)}$, lze vyjádřit podmínkou, že alternativa $\mathscr{A}$ předchází informační množině $J^{(2)}$. Hru bez náhodových tahů s pravidly hry (3.9) budeme nazývat *strategická hra s dokonalou pamětí* (rozumí se bez náhodových tahů), když pravidla hry splňují požadavek:

> *jestliže pro $i \in I$, $J^{(1)} \in \mathscr{J}_i$, $J^{(2)} \in \mathscr{J}_i$ (kde $\mathscr{J}_i$ je definováno vztahem* (3.4)) *informační množina $J^{(1)}$ předchází informační množině $J^{(2)}$, pak existuje alternativa $\mathscr{A}$ v množině alternativ $\Delta J^{(1)}$, která předchází informační množině $J^{(2)}$, tedy $\mathscr{A}$ předchází $J^{(2)}$*;

zhruba řečeno, tato podmínka znamená, že každý hráč si dokonale pamatuje v okamžiku svého zásahu do průběhu partie, jaké alternativy zvolil v předcházejícím vývoji konfliktu.

Požadavek dokonalé paměti se týká pravidel hry a nikoli subjektivních vlastností jednotlivých hráčů. Proto musíme podmínku o dokonalé paměti interpretovat tak, že pravidla hry dávají každému účastníku konfliktní situace možnost přesně si zapamatovat všechny alternativy, které v průběhu konfliktu zvolil; zda v konkrétní konfliktní situaci s dokonalou pamětí její účastníci těchto možností využívají nebo ne, to nemůže být součástí pravidel hry ani součástí teorie racionálního jednání v konfliktních situacích. O racionálním hráči předpokládáme, že buď má dostatek schopností, aby si dokonale zapamatoval, co lze, nebo že je vybaven dostatečně dokonalými záznamovými prostředky, které zachytí hodnoty všech parametrů důležitých pro vývoj konfliktu.

V tomto duchu je nutno správně interpretovat obecný případ, kdy hra nemá dokonalou paměť. V tom případě některý hráč v určitém okamžiku, v němž má zasáhnout do hry, nemůže znát alternativu, kterou zvolil v některém z předcházejících okamžiků svého zásahu, poněvadž mu to pravidla hry neumožňují. Aby interpretace tohoto případu byla skutečně nezávislá na subjektivních vlastnostech příslušného hráče, představujeme si, že tento hráč je ve hře zastoupen skupinou agentů, a neznalost alternativy zvolené v některém z minulých okamžiků v době určitého zásahu si vysvětlujeme růzností agentů, kteří ho zastupují. Jinými slovy, vycházíme z představy, že hráč může být na každé ze dvou informačních množin, z nichž jedna předchází druhé, zastoupen jiným agentem, na kterého se obrací rozhodčí se žádostí o provedení volby alternativy ve shodě s pravidly hry. Pro případ nedokonalosti paměti nesmí být mezi těmito agenty možnost komunikace, což by odporovalo pravidlům hry. Představa hráče zastoupeného skupinou agentů, a to v nejobecnějším případě dvěma různými agenty na každých dvou různých informačních množinách, je v plném souladu s pojmem hráče, jak jsme jej zavedli v kapitole 1.

Snadno nahlédneme, že hra s úplnou informací je speciálním případem hry s dokonalou pamětí, definujeme-li pravidlo pro volbu alternativ $(\mathscr{J}, \Delta)$ vztahy (3.5) a (3.8).

Avšak také na hru v normálním tvaru, jak jsme ji definovali v první kapitole s pravidly hry (1.4), lze se dívat jako na hru s dokonalou pamětí, tedy jako na hru v rozvinutém tvaru, v níž hráči zasahují do hry postupně, jak jsou očíslováni podle (1.1). Abychom to nahlédli, položme nejprve

$$J_i = \prod_{j=1}^{i-1} A_j\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n, n+1 \quad (n = |I|)\,, \tag{3.11}$$

kde A_i jako dříve označuje prostor strategií hráče i (a kde n je počet hráčů).

Poznámka. Je-li X množina, jejímuž každému prvku $x \in X$ je přiřazena nějaká množina Y_x (jde tedy o přiřazení $\{Y_x\}_{x \in X}$), pak symbol $\bigcup_{x \in X} Y_x$ zvaný sjednocení množin Y_x (pro $x \in X$) označuje množinu všech prvků y, k nimž lze najít $x \in X$ tak, že $y \in Y_x$. Symbol $\prod_{x \in X} Y_x$ nazývaný kartézský součin množin Y_x (pro $x \in X$) označuje množinu všech zobrazení y množiny X do sjednocení $\bigcup_{x \in X} Y_x$ takových, že $y(x) \in Y_x$; v tomto případě hodnotu funkce y v prvku x označujeme raději y_x místo $y(x)$. Když např. $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ (nebo obecněji, X se skládá z konečně mnoha po sobě jdoucích celých čísel), píšeme příslušné sjednocení resp. kartézský součin ve tvaru

$$\bigcup_{x=1}^{k} Y_x \quad \text{nebo} \quad Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \quad \text{resp.} \quad \prod_{x=1}^{k} Y_x \quad \text{nebo} \quad Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_k\,.$$

Je-li X prázdná množina, plyne z definice, že také příslušné sjednocení je prázdná množina, kdežto příslušný kartézský součin obsahuje právě jeden prvek, totiž prázdné zobrazení. Definujeme-li precisněji zobrazení f množiny X do množiny Y jako některou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$ takovou, že ke každému $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$ s vlastností, že $(x, y) \in f$, totiž prvek $y = f(x)$, pak prostě prázdné zobrazení je identické s prázdnou množinou.

Pravidla hry v rozvinutém tvaru (3.9) budou v našem případě specifikována takto: nejprve graf posic

$$\begin{gathered} Z = \bigcup_{i=1}^{n+1} J_i\,, \\ \Gamma z = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i) : a_i \in A_i\}\,, \\ \text{pro} \quad z \in J_i\,, \quad z_j = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, i-1)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \\ \Gamma z = \emptyset \quad \text{pro} \quad z \in J_{n+1}\,. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Všimněme si, že množina J_1 obsahuje právě jeden prvek, totiž prázdné zobrazení, které představuje na právě definovaném grafu výchozí posici – proto si toto zobrazení označíme $z^{(0)}$: $J_1 = \{z^{(0)}\}$. Na druhé straně množina J_{n+1} je identická s prostorem vektorů strategií A a představuje na našem grafu množinu všech výsledných posic. Odtud plyne, že množinu všech partií můžeme vyjádřit jako kartézský součin

$$\mathscr{P} = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n \times J_{n+1}\,. \tag{3.13}$$

Značí-li π_{n+1} výslednou posici partie π (tedy $\pi_{n+1} \in A$), definujeme

$$\varrho_{\mathscr{P}}(\pi) = \varrho(\pi_{n+1}) \quad \text{pro} \quad \pi \in \mathscr{P}\,, \tag{3.14}$$

kde ϱ je výsledková funkce dané hry v normálním tvaru. Okamžik zásahu v pořadí i-tého hráče představuje jeho informační množina J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, která vyjadřuje jeho totální neinformovanost o zásazích předcházejících hráčů do průběhu partie. Přitom množina alternativ, které má hráč v pořadí i-tý k disposici, jednojednoznačně odpovídá jeho prostoru strategií, což je vyjádřeno definicí

$$\Delta J_i = \{J_i \times \{a_i\} : a_i \in A_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.15}$$

To znamená, že klademe definitoricky

$$\theta(z) = i \quad \text{pro} \quad z \in J_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Zbývá doplnit definici indexu tahu θ pro výsledné posice, tj. prvky ležící v množině $J_{n+1} = A$. To můžeme učinit v našem případě zcela libovolně, neboť hráč na tahu ve výsledné posici nemá již žádnou možnost zásahu do průběhu hry. Učiníme úmluvu, že

$$\theta(z) = n \quad \text{pro} \quad z \in J_{n+1},$$

takže poslední hráč zůstává na tahu i na konci každé partie. Abychom formálně splnili podmínku dokonalé informace i pro n-tého hráče, který je na konci partie na tahu dvakrát za sebou, musíme všechny jeho alternativy v ΔJ_n chápat také jako jeho informační množiny na konci hry, kdy již nemá možnost zásahu; definujeme tedy

$$\mathscr{J} = \mathscr{J}^* \cup \Delta J_n, \quad \text{kde} \quad \mathscr{J}^* = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$$

je systém informačních množin, na nichž hráči mají možnost zásahu do hry, a doplníme definici Δ vztahem

$$\Delta \mathscr{A} = \emptyset \quad \text{pro} \quad \mathscr{A} \in \Delta J_n.$$

Tím jsme převedli obráceně hru v normálním tvaru na rozvinutý tvar, a to na hru s dokonalou pamětí a bez náhodových tahů. Současně ihned nahlédneme, že interpretace odvozené hry jako hry bez náhodových tahů je přesně ve shodě s interpretací původní hry v normálním tvaru, odhlédneme-li od pořadí zasahujících hráčů, odpovídající totální neinformovanosti hráčů při volbě jejich strategie, jak se o ní hovoří v principu realisace hry uvedeném v první kapitole.

Strategické hry s dokonalou pamětí jsou nám intuitivně nejbližší, neboť většina obvyklých společenských her spadá do této kategorie; že tomu tak není u všech takových her, vidíme z toho, že např. bridž nebo canastu lze považovat za hru o 2 hráčích, z nichž každý je zastoupen dvě „agenty" sedícími na jedné a téže lince – dva po sobě jdoucí zásahy téhož hráče do hry provádějí dvě různé osoby, které podle pravidel hry neznají navzájem své listy, takže hra nemá dokonalou paměť.

4. NÁHODNÉ VLIVY

Elementární výsledky

Když jsme popisovali v první kapitole základní schéma konfliktní situace, upozornili jsme, že sice výsledek konfliktní situace je určen jednáním všech účastníků, ale že tento výsledek nemusí mít deterministický charakter. Nedeterminovaný výsledek si představujeme jako náhodný pokus, jehož provedením teprve dostaneme výsledek determinovaný; přitom předpokládáme, že každý z možných determinovaných výsledků nastane při realisaci náhodného pokusu s předepsanou a tedy nám známou pravděpodobností, takže náhodný pokus tj. nedeterminovaný výsledek je těmito pravděpodobnostmi matematicky popsán.

Abychom si učinili konkrétní představu o obsahu pojmu nedeterminovaného výsledku, uvedeme si tento trochu bizarní příklad: jeden z možných výsledků konfliktu mezi dvěma jedinci záleží v tom, že první z nich hodí mincí a druhý věnuje prvnímu svou sbírku motýlů, padne-li líc; jestliže padne rub, opraví druhý prvnímu ledničku. Vidíme, že jde o výsledek v každém případě příznivý pro prvního: je složen ze dvou determinovaných výsledků, z nichž nastane právě jeden, a to v závislosti na výsledku házení mince. Přitom se předpokládá, že pravděpodobnost kterékoli strany mince je právě 1/2, takže každý z obou determinovaných výsledků nastane s toutéž pravděpodobností rovnající se jedné polovině.

V první kapitole jsme prostor výsledků obsahově charakterisovali jako množinu všech a priori možných výsledků. Z hlediska předcházející úvahy je zde třeba doplnit, že když a priori možným výsledkem rozumíme jen takový, který je určen jednáním všech hráčů a ničím více, pak není vyloučen případ, kdy každý z a priori možných výsledků je již nedeterminovaný, tudíž je to náhodný pokus vyúsťující v některý z možných determinovaných výsledků. Při takové interpretaci našeho modelu konfliktní situace uvedeného v první kapitole nezahrne prostor výsledků faktické determinované výsledky konfliktu, které vzniknou provedením náhodných pokusů představujících prvky prostoru Ω.

Z provedeného rozboru vidíme, že k detailnějšímu popisu pojmu výsledku potřebujeme navíc zavést pojem determinovaného výsledku, který již dále nelze rozložit ve shora uvedeném smyslu. Abychom v naší terminologii vyzdvihli tuto nerozložitelnost determinovaného výsledku, budeme říkat místo determinovaný výsledek raději *elementární výsledek*, což bude ve shodě také s názvoslovím teorie pravděpodobnosti. Množinu všech myslitelných determinovaných výsledků, které mohou vzniknout realisací jakéhokoli a priori možného nedeterminovaného výsledku konfliktní situace (tj. náhodného pokusu, který tento nedeterminovaný výsledek představuje), nebo které jsou samy a priori možnými výsledky konfliktní situace, označíme v dalším textu písmenem E a nazveme ji *prostor elementárních výsledků*; budeme předpokládat, že E je neprázdná konečná množina.

Poznamenejme, že předpoklad o konečnosti prostoru elementárních výsledků činíme jenom z toho důvodu, abychom vystačili při popisu nedeterminovaných výsledků s elementy teorie pravděpodobnosti. Stejně tak všechny předpoklady o konečnosti různých množin vyskytujících se v modelech konfliktních situací předcházejících kapitol, které vesměs znamenají, že se ve svém vyšetřování omezujeme na třídu tzv. *konečných strategických her*, zavádíme z téhož důvodu, abychom se totiž vyhnuli použití náročného aparátu obecné teorie pravděpodobnosti. Přesvědčíme se, že teorie strategických her je s teorií pravděpodobnosti v nejužší souvislosti; např. pojmy náhoda a neúplnost informace představují v jistém smyslu dvojí pohled na tentýž objektivní rys vnějšího světa.

Smíšené výsledky

Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme konstatovat, že nedeterminovaný výsledek chápeme jako náhodný pokus, jehož realisací dostaneme některý z elementárních výsledků, každý z nich s určitou pravděpodobností. To znamená, že nedeterminovaný výsledek je matematicky popsán jako rozložení pravděpodobnosti na prostoru elementárních výsledků.

Poznámka. Je-li X neprázdná konečná množina, pak rozložení pravděpodobnosti p na množině X je funkce na množině X s hodnotami v prostoru reálných čísel (tj. funkce, která nabývá číselných hodnot) taková, že

$$0 \leqq p(x) \leqq 1 \quad \text{pro každé} \quad x \in X\,, \quad \sum_{x \in X} p(x) = 1\,.$$

Když $|X| = m$, tj. m označuje počet prvků v množině X, přičemž množina X je dána výčtem svých prvků, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, pak jestliže položíme pro rozložení pravděpodobnosti p na množině X

$$p_j = p(x_j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

znamenají předcházející podmínky, že

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1\,, \quad 0 \leqq p_j \leqq 1 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Číslu $p(x)$ pro $x \in X$ se říká pravděpodobnost prvku x (při rozložení p) nebo také pravděpodobnost elementárního jevu x, neboť v této souvislosti jmenujeme množinu X prostor elementárních jevů. Rozložení pravděpodobnosti p na množině X interpretujeme jako náhodný pokus, jehož provedením dostaneme jako výsledek pokusu elementární jev $x \in X$ s pravděpodobností $p(x)$.

Libovolné rozložení pravděpodobnosti na prostoru elementárních výsledků E nazveme *smíšený výsledek*. Množinu všech smíšených výsledků, tj. množinu všech rozložení pravděpodobnosti na prostoru E, označíme symbolem Ω_E a tuto množinu budeme nazývat *prostor smíšených výsledků* (přiřazený prostoru elementárních výsledků E).

Přiřaďme každému elementárnímu výsledku $e \in E$ smíšený výsledek ω_e předpisem:

$$\omega_e(e) = 1\,, \quad \omega_e(e') = 0 \quad \text{pro} \quad e' \neq e\,, \quad e' \in E\,.$$

To znamená, že při rozložení pravděpodobnosti ω_e nastane elementární výsledek e s pravděpodobností 1 a každý jiný elementární výsledek $e' \neq e$ s pravděpodobností 0. Při interpretaci pojmu pravděpodobnosti v případě konečného prostoru elementárních jevů považujeme elementární jev, který nastane s pravděpodobností rovnou jedné, za jistý, takže v našem případě rozložení ω_e představuje náhodný pokus, při jehož provedení dostaneme jistě právě výsledek e; nemusíme tedy mezi smíšeným výsledkem ω_e a elementárním výsledkem e rozlišovat.

Provedeme-li tuto identifikaci smíšeného výsledku ω_e s elementárním výsledkem e pro každé $e \in E$, stane se prostor elementárních výsledků E podmnožinou prostoru smíšených výsledků Ω_E:

$$E = \{\omega_e : e \in E\} \subset \Omega_E\,. \tag{4.1}$$

Ve smyslu právě uvedené množinové inkluse prostor smíšených výsledků v sobě zahrnuje všechny apriorně možné výsledky konfliktní situace, ať již determinované nebo nedeterminované, což lze vyjádřit vztahem:

$$\Omega \subset \Omega_E\,. \tag{4.2}$$

Po formální stránce vyjadřuje poslední množinová inkluse podmínku, kterou klademe na naše modely konfliktních situací probírané v předcházejících kapitolách. Matematicky vyjádřeno, strategická hra v normálním tvaru resp. s úplnou informací resp. bez náhodových tahů je čtveřice

$$(I, \Omega, \{U_i\}_{i \in I}, \Pi)\,, \tag{4.3}$$

kde Ω je některá neprázdná (obvykle nekonečná) množina rozložení pravděpodobnosti na dané konečné neprázdné množině E, kde Π jsou pravidla hry v normálním tvaru (1.4) resp. pravidla hry s úplnou informací (2.1) resp. pravidla hry bez náhodových tahů (3.9) a kde zbývající symboly mají dříve popsaný význam. Ve smyslu zavedené terminologie lze krátce říci, že prostor výsledků tvoří podmnožinu prostoru smíšených výsledků.

Jestliže čtveřice (4.3) představuje strategickou hru v normálním tvaru, pak plyne z definice výsledkové funkce množinová inkluse

$$\Omega^{(0)} \subset \Omega\,, \tag{4.4}$$

kde množina (obecně smíšených) výsledků $\Omega^{(0)}$ je formálně definována vztahem

$$\Omega^{(0)} = \{\varrho(a) : a \in A\}\,; \tag{4.5}$$

zde A je ovšem prostor vektorů strategií. Množina $\Omega^{(0)}$ representuje souhrn všech (smíšených) výsledků, které v dané hře s pravidly (1.4) skutečně mohou nastat, neboli jsou, jak se někdy říká, aposteriorně možné; jinak řečeno, aposteriorně možným výsledkem míníme ten výsledek $\omega \in \Omega_E$, k němuž lze najít vektor strategií a takový, že $\omega = \varrho(a)$. Množina $\Omega^{(0)}$ se často nazývá *prostor ryzích výsledků hry v normálním tvaru*. *Ryzí výsledek* je tudíž každý takový smíšený výsledek, který je fakticky dosažitelný s pomocí výsledkové funkce. Definice prostoru ryzích výsledků závisí tak jenom na pravidlech hry, takže se v ní nevyžaduje znalost prostoru výsledků Ω, na němž je dáno preferenční schéma hry; to plyne z toho, že výsledkovou funkci ϱ lze chápat jako zobrazení prostoru A do prostoru smíšených výsledků Ω_E. Shrnujeme, že prostor ryzích výsledků je údaj o konfliktní situaci odvozený z pravidel hry.

Jestliže čtveřice (4.3) představuje strategickou hru bez náhodových tahů (spec. hru s úplnou informací; srovn. (3.5) a (3.8)), vyplývá z definice výsledkové funkce pro rozvinutý tvar vztah

(4.6) $$\Omega^{(0)}_{\mathscr{P}} \subset \Omega\,,$$

kde množina $\Omega^{(0)}_{\mathscr{P}}$ je symbolicky vyjádřena výrazem

(4.7) $$\Omega^{(0)}_{\mathscr{P}} = \{\varrho_{\mathscr{P}}(\pi) : \pi \in \mathscr{P}\}\ ;$$

připomeňme, že $\mathscr{P}$ označuje množinu všech partií dané hry. Množinu $\Omega^{(0)}_{\mathscr{P}}$ budeme nazývat prostor ryzích výsledků v dané hře v rozvinutém tvaru (tj. ve hře bez náhodových tahů resp. s úplnou informací). Tato množina se skládá ze všech aposteriorně možných výsledků, tj. těch výsledků ω, k nimž existují partie $\pi \in \mathscr{P}$ s vlastností, že $\omega = \varrho_{\mathscr{P}}(\pi)$. *Prostor ryzích výsledků hry v rozvinutém tvaru* je tedy rovněž údaj odvozený z pravidel hry a nezávisí na prostoru výsledků, na němž je dáno preferenční schéma hry; srovn. úvahu předcházejícího odstavce.

Provedeme-li normalisaci hry bez náhodových tahů, snadno odvodíme z definice normalisované výsledkové funkce rovnost

(4.8) $$\Omega^{(0)}_{\mathscr{P}} = \Omega^{(0)}\,,$$

kde $\Omega^{(0)}$ je definováno vztahem (4.5), v němž ϱ je normalisovaná výsledková funkce dané hry bez náhodových tahů. Uvidíme, že ve hře s náhodovými tahy poslední rovnost týkající se ryzích výsledků před normalisací a po ní obecně neplatí.

Směšování výsledků

V prostoru smíšených výsledků Ω_E přiřazujeme každému reálnému číslu λ ležícímu mezi 0 a 1, tj. $0 \leqq \lambda \leqq 1$, a každé dvojici $\omega' \in \Omega_E$, $\omega'' \in \Omega_E$ smíšených výsledků smíšený výsledek $\omega \in \Omega_E$, který označíme symbolicky $\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega''$, definicí

(4.9) $$\omega(e) = (\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'')\,(e) = \lambda\omega'(e) + (1 - \lambda)\,\omega''(e) \quad \text{pro} \quad e \in E\ ;$$

spec. $\omega = \omega''$ pro $\lambda = 0$, $\omega = \omega'$ pro $\lambda = 1$. Slovy, smíšený výsledek $\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega''$ je rozložení pravděpodobnosti na prostoru E, připisující elementárnímu výsledku

$e \in E$ pravděpodobnost $\lambda\,\omega'(e) + (1 - \lambda)\,\omega''(e)$. Říkáme, že výsledek $\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega''$ vznikne *smíšením* výsledku ω' s výsledkem ω'', a nazýváme jej *směs výsledků* ω' a ω'' (v poměru $\lambda : (1 - \lambda)$).

Smíšený výsledek $\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega''$ představuje složený náhodný pokus, v němž při provedení prvního kroku pokusu nastane výsledek ω' s pravděpodobností λ nebo výsledek ω'' s pravděpodobností $(1 - \lambda)$ a v druhém kroku nastane elementární výsledek $e \in E$ s pravděpodobností $\omega'(e)$ za podmínky, že v prvním kroku nastal výsledek ω', a s pravděpodobností $\omega''(e)$ za podmínky, že v prvním kroku nastal výsledek ω''.

Obecněji, jsou-li λ_j reálná čísla v počtu k taková, že

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\,, \quad 0 \leqq \lambda_j \leqq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, k)\,,$$

a jsou-li ω_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ smíšené výsledky, pak definujeme smíšený výsledek $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\omega_j$ (značený rovněž $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_k\omega_k$) rovnicí

$$(4.10) \qquad \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\omega_j\Big)(e) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\omega_j(e) \quad \text{pro} \quad e \in E\,.$$

Říkáme, že tento výsledek vznikne *smíšením* resp. je *směsí výsledků* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

Předpokládejme, že prostor E má právě k prvků, tj. $|E| = k$, přičemž E je dán výčtem svých prvků, což symbolicky vyznačíme jako

$$(4.11) \qquad E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}\,.$$

Potom snadno nahlédneme, že se každý smíšený výsledek ω dá vyjádřit podle (4.10) ve tvaru

$$(4.12) \qquad \omega = \sum_{j=1}^{k} \omega(e_j)\,\omega_{e_j} = \sum_{j=1}^{k} \omega(e_j)\,e_j\,;$$

srovn. (4.1).

Ještě obecněji, když λ je rozložení pravděpodobnosti na dané neprázdné konečné množině B a když ke každému $\beta \in B$ je přiřazen některý smíšený výsledek ω_β (takže symbol $\{\omega_\beta\}_{\beta\in B}$ vyznačuje toto přiřazení, jemuž budeme říkat jednoparametrová soustava smíšených výsledků), klademe

$$(4.13) \qquad \Big(\sum_{\beta\in B} \lambda(\beta)\,\omega_\beta\Big)(e) = \sum_{\beta\in B} \lambda(\beta)\,\omega_\beta(e) \quad \text{pro} \quad e \in E\,;$$

$\sum_{\beta\in B} \lambda(\beta)\,\omega_\beta$ je smíšený výsledek, který vznikne *smíšením soustavy* $\{\omega_\beta\}_{\beta\in B}$ podle rozložení λ. Použitím symboliky (4.13) lze zapsat vyjádření smíšeného výsledku ω daného vztahem (4.12) v obecnějším tvaru

$$(4.14) \qquad \omega = \sum_{e\in E} \omega(e)\,e\,.$$

Operace směšování výsledků hraje fundamentální roli při vyšetřování racionality v hodnocení výsledků konfliktní situace jednotlivými jejími účastníky. Racionální účastníci musí být schopni zahrnout do svého systému preferencí s každými dvěma výsledky každou jejich směs, a to alespoň pro případ, jde-li o ryzí výsledky.

Abychom to nahlédli, vyjděme z přirozeného požadavku, že racionální účastník musí být schopen provést analysu konfliktní situace pro kterékoli jednání, jež očekává u svých protivníků. Uvidíme později, že očekávané jednání spoluhráčů lze charakterisovat jako odhad volby jejich strategií, který hráč provádí, vycházeje přitom ze znalosti svých partnerů. Tento odhad má nutně nedeterministický charakter, až na některé velmi speciální výjimky. Přesvědčíme se v dalších kapitolách, že každý výsledek odpovídající takovému odhadu volby strategií spoluhráčů vznikne smíšením ryzích výsledků. Vyjdeme-li z normálního tvaru hry, znamená to, že takový výsledek sdružený s očekávaným jednáním spoluhráčů je vyjádřen jako směs některých výsledků ležících v prostoru $\Omega^{(0)}$, tj. v prostoru ryzích výsledků dané hry. Každá taková směs ryzích výsledků je a priori možná v důsledku některého očekávaného jednání spoluhráčů, a tedy musí být zahrnuta do systému preferencí racionálního hráče.

Předpokládáme-li, že se všichni hráči chovají racionálně co do hodnocení výsledků, lze vyjádřit na základě předcházející úvahy tento požadavek na racionalitu hráčů formálně jako podmínku:

(R) *Když λ je rozložení pravděpodobnosti na prostoru ryzích výsledků $\Omega^{(0)}$, pak*

$$\sum_{e\in\Omega^{(0)}} \lambda(e)\, e \in \Omega\,.$$

Podmínka (R) tedy říká, že každá směs ryzích výsledků je zahrnuta do systému preferencí každého hráče, neboť preferenční schéma hry je podle předpokladu definováno na prostoru výsledků Ω.

Učiňme tuto úmluvu: je-li M libovolná konečná neprázdná množina, označme symbolem $[M]$, tzv. konvexní obal množiny M, množinu všech rozložení pravděpodobnosti na množině M; spec. $\Omega_E = [E]$. Označíme-li symbolem R^k množinu všech k-tic reálných čísel (tj. k-rozměrných číselných vektorů) a položíme-li

$$S^{(k)} = \{(x_1, \dots, x_k) \in R^k : \sum_{j=1}^{k} x_j = 1,\, x_j \geqq 0\, (1 \leqq j \leqq k)\}\,, \tag{4.15}$$

lze konvexní obal množiny M, která je dána výčtem svých prvků jako $M = \{m_j : j = 1, 2, \dots, k\}$, kde $|M| = k$, vyjádřit ve tvaru

$$[M] = \{\sum_{j=1}^{k} x_j m_j : (x_1, \dots, x_k) \in S^{(k)}\}\,, \tag{4.16}$$

kde $\sum x_j m_j$ představuje směs podle vztahu (4.10), když v hořejším formalismu nahradíme množinu E množinou M a přitom nerozlišujeme mezi prvkem m množiny M a degenerovaným rozložením pravděpodobnosti přiřazujícím prvku m pravděpodobnost 1; speciálně podle (4.11) máme

$$\Omega_E = [E] = \{\sum_{j=1}^{k} x_j e_j : (x_1, \dots, x_k) \in S^{(k)}\}\,; \tag{4.17}$$

srovn. (4.12).

Poznámka. Množina R^k se nazývá v jistých souvislostech, jak známo, k-rozměrný eukleidovský prostor; přitom množina $S^{(k)}$ je tzv. $(k - 1)$-rozměrný simplex v prostoru R^k. Prvkům množiny $S^{(k)}$ budeme říkat k-rozměrné pravděpodobnostní vektory; $S^{(k)}$ je tedy *simplex k-rozměrných pravděpodobnostních vektorů* (pro $k = 1, 2, 3, \ldots$). Konvexní obal konečné neprázdné množiny M je podle (4.16) jednoznačně určen množinou M a simplexem $|M|$-rozměrných pravděpodobnostních vektorů $S^{(|M|)}$.

Na základě zavedené symboliky lze podmínku racionality (R) pro hráče participující na strategické hře v normálním tvaru vyslovit ve formě množinové inkluse

(4.18) $$[\Omega^{(0)}] \subset \Omega$$

(srovn. (4.5) a (4.4)). Podobně jedna ze stránek racionality v hodnocení výsledků hráči participujícími na strategické hře v rozvinutém tvaru se projeví v platnosti podmínky:

(4.19) $$[\Omega_{\mathscr{P}}^{(0)}] \subset \Omega$$

(srovn. (4.7) a (4.6)). V obou těchto inklusích jsme mlčky použili toho, že podle (4.13) můžeme rozložení pravděpodobnosti na podmnožině dané množiny pojímat jako rozložení pravděpodobnosti na celé množině.

Stavy přírody

Při matematickém popisu konfliktní situace, na kterou působí náhodné vlivy, jsme zatím vycházeli z představy, že náhodový faktor je součástí výsledku konfliktní situace, jinak řečeno, že výsledek konfliktu je obecně nedeterminovaný. Ale působení náhody lze zachytit přímo v matematickém modelu konfliktní situace. V této kapitole se budeme zabývat budováním takových matematických modelů, a to nejprve pro případ, kdy eliminujeme časový faktor a tedy abstrahujeme od časového vývoje konfliktu.

Vyloučíme-li časový faktor, znamená to, že účastníci konfliktní situace volí ještě před zahájením hry strategie jako svůj způsob zasahování do konfliktu. Působí-li navíc náhodné vlivy, je jimi určen nějaký stav vnějších podmínek, za nichž se konflikt odehrává. Všechny možné stavy vnějších podmínek, za nichž může konfliktní situace probíhat, tvoří další část základních údajů o konfliktní situaci.

Stav vnějších podmínek, který je výsledkem náhody, bývá zvykem nazývat *stav přírody*. Množinu všech možných stavů přírody budeme značit písmenem Σ a nazývat *prostor stavů* (*přírody*). Protože se v tomto pojednání omezujeme na konečné hry, budeme předpokládat, že prostor Σ je konečná neprázdná množina.

Ježto stav vnějších podmínek vzniká působením náhodných vlivů, musí nastat každý stav $\sigma \in \Sigma$ s určitou pravděpodobností, kterou v dalším budeme označovat $p(\sigma)$. Rozložení pravděpodobnosti p na prostoru stavů Σ je tak dalším údajem o konfliktní situaci, v níž působí náhodové faktory.

Poznámka. Je-li p rozložení pravděpodobnosti na konečné neprázdné množině X, pak se dvojice (X, p) nazývá *pravděpodobnostní prostor*, určitěji konečný pravděpodobnostní prostor.

Předcházející rozbor můžeme shrnout tak, že *pravděpodobnostní prostor stavů* (Σ, p) representuje nový základní údaj o konfliktní situaci obsahující náhodu.

Výsledek konfliktní situace musí být nyní jednoznačně určen nejenom jednáním všech hráčů, které je vyjádřeno některým vektorem strategií $a \in A$, nýbrž i stavem vnějších podmínek, za nichž se jednání hráčů během konfliktu děje, tj. výsledek závisí ještě navíc na stavu přírody $\sigma \in \Sigma$. Výsledek určený dvojicí (σ, a), kde $\sigma \in \Sigma$, $a \in A$, je ovšem již determinovaný, neboť jsme působení náhodných vlivů zahrnuli do matematického modelu explicitně. Tento výsledek označíme symbolem $\varrho_E(\sigma, a)$, tedy $\varrho_E(\sigma, a) \in E$.

Tudíž funkce ϱ_E je funkce na kartézském součinu $\Sigma \times A$, kde Σ je prostor stavů a A prostor vektorů strategií, s hodnotami v prostoru elementárních výsledků E, tzv. *elementární výsledková funkce*. Jinými slovy, některá elementární výsledková funkce, kterou jsme označili ϱ_E, je základním údajem v našem novém matematickém modelu konfliktní situace. Tato funkce přiřazuje každému stavu přírody σ a každému vektoru strategií a elementární výsledek $\varrho_E(\sigma, a)$.

S pomocí elementární výsledkové funkce ϱ_E definujeme *ryzí elementární výsledek* jako takový výsledek $e \in E$, k němuž existuje stav přírody $\sigma \in \Sigma$ a vektor strategií $a \in A$ tak, že $e = \varrho_E(\sigma, a)$. Jinými slovy, elementární výsledek je ryzí, když a jen když leží v množině

$$E^{(0)} = \{\varrho_E(\sigma, a) : \sigma \in \Sigma,\ a \in A\}\,. \tag{4.20}$$

Množinu $E^{(0)}$ budeme nazývat *prostor ryzích elementárních výsledků*; srovn. definice (4.5) a (4.7).

Hra s náhodovými faktory

Úvahy předcházejícího paragrafu nyní shrneme do striktně provedeného formálně matematického popisu. Je-li (Σ, p) konečný pravděpodobnostní prostor, jsou-li A_i pro $i \in I$ konečné neprázdné množiny, kde I je konečná neprázdná množina, a je-li pro konečnou neprázdnou množinu E funkce ϱ_E zobrazení kartézského součinu $\Sigma \times A$ do množiny E, kde A je kartézský součin množin $A_i (i \in I)$, tj. $A = \prod_{i \in I} A_i$, pak trojici

$$((\Sigma, p), \{A_i\}_{i \in I}, \varrho_E) \tag{4.21}$$

nazýváme *pravidla hry s náhodovými faktory*. *Strategická hra s náhodovými faktory* je definována jako čtveřice (4.3), v níž symbol Π označuje pravidla hry s náhodovými faktory (4.21), Ω je daná množina rozložení pravděpodobnosti na množině E, pro niž je splněna podmínka, že

$$\varrho_E(\sigma, a) \in \Omega \quad \text{pro každé} \quad \sigma \in \Sigma\,, \quad a \in A\,, \tag{4.22}$$

a U_i pro $i \in I$ je totální relace v množině Ω. Zachováme-li již dříve zavedené názvosloví, lze říci, že interpretace pravidel hry s náhodovými faktory se řídí v podstatě stejným principem realisace hry, který známe z první kapitoly pro hru v normálním tvaru, pokud se týče volby strategií jednotlivými hráči:

Princip realisace hry: Každý hráč $i \in I$ provede volbu některé své strategie a_i z prostoru A_i, přičemž není informován o faktickém stavu přírody (tj. stavu vnějších podmínek) a ani nezná volby ostatních hráčů. Když nastane stav $\sigma \in \Sigma$, je tímto stavem a vektorem strategií $a = \{a_i\}_{i \in I}$, kde a_i je strategie zvolená hráčem i $(i \in I)$, určen s pomocí elementární výsledkové funkce ϱ_E elementární výsledek $\varrho_E(\sigma, a)$; přitom stav σ nastane s pravděpodobností $p(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$.

Princip motivace jednání, kterým se řídí interpretace systému preferencí každého hráče, je ovšem stejný jako pro hru v normálním tvaru, jak jsme jej uvedli v kapitole 1.

Doplňme si interpretaci pravidel hry s náhodovými faktory o tuto úvahu. Očíslujeme-li hráče podle (1.1), kde $|I| = n$, a klademe-li

$$A^+ = \prod_{i=0}^{n} A_i\,, \quad \text{kde} \quad A_0 = \Sigma\,, \tag{4.23}$$

můžeme elementární výsledkovou funkci ϱ_E chápat jako zobrazení množiny A^+ do prostoru E, přiřazující vektoru

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in A^+ \quad \text{výsledek} \quad \varrho_E(a_0, a_1, \ldots, a_n)\,,$$

kde $a_i \in A_i$ pro $i = 0,1, \ldots, n$ (tedy a_0 je podle (4.23) stav přírody). Stavy vnějších podmínek lze tedy pojmout jako strategie nějakého dalšího hráče, kterému budeme říkat *příroda* a který je očíslován indexem 0. Příroda jako pseudohráč nemá při této personifikaci systém preferencí, který by motivoval volbu jejích strategií; místo toho má rozložení pravděpodobnosti p, které můžeme interpretovat např. jako náhodový mechanismus, který volí *strategii přírody* $a_0 \in A_0$ s pravděpodobností $p(a_0)$.

Vraťme se k podmínce (4.22), kterou můžeme názorně vyjádřit slovy, že každý aposteriorně možný (tj. ryzí) výsledek je apriorně možný. Především si všimněme, že podmínka (4.22) zajišťuje, že prostor výsledků Ω je neprázdný; proto jsme v hořejší formální definici hry tento požadavek nemusili explicitně vyslovit na rozdíl od předcházejících kapitol. Podmínku (4.22) můžeme s použitím pojmu prostoru ryzích elementárních výsledků daného v (4.20) nahradit podmínkou

$$E^{(0)} \subset \Omega\,; \tag{4.24}$$

srovn. (4.4) a (4.6). V matematických modelech konfliktních situací zaváděných v minulých kapitolách jsme definovali výsledkovou funkci pro hru v normálním tvaru resp. pro rozvinutý tvar jako zobrazení do prostoru výsledků Ω. Podobně můžeme zaměnit definici elementární výsledkové funkce ϱ_E ekvivalentní definicí, že ϱ_E je zobrazení kartézského součinu $\Sigma \times A$ do prostoru Ω, které splňuje požadavek, že $\varrho_E(\sigma, a) \in E$ pro každé $\sigma \in \Sigma$, $a \in A$, čili že $E^{(0)} \subset E$; ekvivalence definic je ovšem důsledkem vztahu (4.24).

Obráceně např. výsledková funkce ϱ hry v normálním tvaru může být ekvivalentně definována jako zobrazení prostoru A do prostoru smíšených výsledků Ω_E, které splňuje podmínku (4.4), jak jsme již v této kapitole upozornili. Podobně to lze učinit pro výsledkovou funkci pro rozvinutý tvar $\varrho_{\mathscr{P}}$ s využitím podmínky (4.6).

Eliminace stavů

Připusťme, že se ve hře s náhodovými faktory všichni hráči mezi sebou dohodnou o volbě vektoru strategií $a \in A$. Podle principu realisace hry s náhodovými faktory žádný z hráčů nezná skutečný stav vnějších podmínek $\sigma \in \Sigma$, který nastane. Je-li každý z hráčů dostatečně racionální, že je schopen analysy hry, pak každý hráč nutně dospěje k závěru, že skutečný determinovaný výsledek odpovídající dohodnutému vektoru strategií a vznikne realisací náhodného pokusu, při němž nastane výsledek $\varrho_E(\sigma, a)$ s pravděpodobností $p(\sigma)$ pro $\sigma \in \Sigma$. Tento náhodný pokus představuje smíšený výsledek, který vznikne smíšením soustavy ryzích elementárních výsledků $\{\varrho_E(\sigma, a)\}_{\sigma \in \Sigma}$, kde a je dohodnutý vektor, podle rozložení p ve smyslu definice (4.13).

Označme tuto směs ryzích elementárních výsledků symbolem $\varrho(a)$; máme tak

$$\varrho(a) = \sum_{\sigma \in \Sigma} p(\sigma)\, \varrho_E(\sigma, a) \quad \text{pro} \quad a \in A\,. \tag{4.25}$$

Zobrazení ϱ definované poslední rovnicí se nazývá *normalisovaná výsledková funkce* dané hry s náhodovými faktory. Tím převedeme pravidla hry s náhodovými faktory (4.21) na tzv. *normalisovaný tvar* pravidel této hry, který je vyjádřen dvojicí (1.4), v níž ϱ je funkce daná vztahem (4.25). Touto normalisací jsme eliminovali z pravidel hry s náhodovými faktory pravděpodobnostní prostor stavů. Všimněme si, že při této normalisaci odpovídá interpretace normalisovaných pravidel hry podle principu realisace hry první kapitoly přesně interpretaci původních pravidel (4.21) dané hry, jak vyplývá přímo ze vztahu (4.25); srovn. vstupní úvahu tohoto paragrafu.

Je pravda, že každou hru s náhodovými faktory lze normalisovat? Odpověď je negativní. Podmínka (4.22) resp. (4.24) totiž nezaručuje, že $\varrho(a) \in \Omega$ pro $a \in A$, takže smíšené výsledky tvaru (4.25) nemusí být zahrnuty do systémů preferencí jednotlivých hráčů. Setkáváme se poprvé s případem, že danou strategickou hru nelze obecně normalisovat, což je způsobeno právě vlivem náhody a přitom, jak hned uvidíme, nedostatečnou racionalitou hráčů.

Podmínka (4.22) resp. (4.24) odpovídá požadavku, aby každý hráč znal pravidla hry a tím také všechny aposteriorně možné výsledky. Tento požadavek nemá ještě co činit s racionalitou hodnocení výsledků jednotlivými hráči a musí platit také pro iracionálního hráče, aby se vůbec mohl zúčastnit hry a aby rovněž byl motivován jeho zájem na hře. Jsou-li všichni hráči racionální, znamená to podle dřívějších úvah provedených v této kapitole (srovn. podmínku (R) resp. (4.18) a (4.19)), že všichni zahrnou do svých systémů preferencí konvexní obal prostoru ryzích elementárních výsledků, takže platí

$$[E^{(0)}] \subset \Omega\,. \tag{4.26}$$

Tato podmínka je již postačující k tomu, aby hodnoty $\varrho(a)$ pro $a \in A$ normalisované výsledkové funkce (4.25) ležely v prostoru výsledků Ω, na němž je preferenční schéma hry definováno.

Vezměme speciální případ, když $E^{(0)} = E$, tedy když každý elementární výsledek je již ryzí, tj. dosažitelný s pomocí elementární výsledkové funkce ϱ_E. Podmínka (4.26) se v tomto případě redukuje na předpoklad, že

(4.27) $$\Omega = \Omega_E ;$$

slovy, racionální hráči zahrnují do svého systému preferencí každý smíšený výsledek; každý z nich totiž považují za apriorně možný.

Z naší dosavadní diskuse plyne potřeba upřesnit smysl a priori možného výsledku, z něhož jsme vyšli v první kapitole při zavádění pojmu prostoru výsledků. Každý hráč má svoji představu o tom, které výsledky potřebuje hodnotit, tj. zahrnout do svého systému preferencí, aby mohl rozhodovat o svém postupu v dané konfliktní situaci. Pro hráče $i \in I$ označme na okamžik symbolem Ω_i množinu těch (obecně smíšených) výsledků, které hráč i považuje ze svého subjektivního hlediska za apriorně možné, tj. takové, o nichž se domnívá, že je pro něho nutné, aby je navzájem porovnával ze stanoviska svých osobních preferencí. Potom systém preferencí U_i hráče i bude definován právě v množině Ω_i a dvojice (Ω_i, U_i) bude charakterisovat roli hráče i v konfliktu co do motivace jeho účasti ve hře; tuto dvojici můžeme proto nazvat *subjektivní charakteristikou hráče i*. Soustava subjektivních charakteristik jednotlivých hráčů

(4.28) $$\{(\Omega_i, U_i)\}_{i \in I}$$

tvoří to, co bychom nazvali subjektivní basí konfliktní situace. V našich definicích jednotlivých typů strategických her vycházíme tedy fakticky ze zjednodušující představy, že všichni hráči zahrnují do svého systému preferencí tytéž výsledky, tj. že $\Omega_i = \Omega$ pro všechna $i \in I$, což lze interpretovat např. tak, že všichni hráči jsou téže intelektuální úrovně. To je ve shodě s cílem našeho vyšetřování, neboť nakonec budeme předpokládat, že všichni hráči jsou racionální, tudíž všichni stejně schopni detailního a přitom správného rozboru konfliktu. Podle této úvahy interpretujeme prostor výsledků Ω jako množinu těch smíšených výsledků, které hráči společně považují ze svých subjektivních hledisek za apriorně možné a které proto zahrnují do svých systémů preferencí.

Od pojmu výsledku apriorně možného ze subjektivních hledisek hráčů musíme nyní odlišit pojem apriorně možného výsledku z objektivního hlediska nějakého vnějšího pozorovatele. Opíráme se přitom o představu, že tento vnější pozorovatel provádí předběžnou analysu dané konfliktní situace a na základě této analysy sestaví seznam vlastností, které vymezují relevantní fakta týkající se možného stavu věcí po skončení konfliktu. V našem případě, kdy jsme zahrnuli náhodné vlivy explicitně do formálního modelu (jde tu o hru s náhodovými faktory), je již apriorně možným výsledkem v tomto objektivním smyslu výsledek determinovaný. Tudíž za apriorně možné výsledky z hlediska vnějšího pozorovatele lze považovat právě prvky prostoru elementárních výsledků E.

Objektivní a subjektivní base

Na základě poslední úvahy definujeme *objektivní basi hry s náhodovými faktory* jako trojici

(4.29) $$(I, E, \Pi) ,$$

kde I je množina hráčů, E je prostor elementárních výsledků a Π jsou pravidla hry s náhodovými faktory (4.21).

Objektivní base hry s náhodovými faktory (4.29) se podle definice liší od objektivní base hry v normálním tvaru (1.6), jak jsme ji definovali v první kapitole, nejenom v pravidlech hry, nýbrž také v druhém členu, který v obou případech interpretujeme jako množinu apriorně možných výsledků z objektivního hlediska vnějšího pozorovatele, tedy těch výsledků, které mohou apriorně vystoupit jako hodnoty výsledkové funkce. Lze také říci, že druhý člen objektivní base hry představuje odhad množiny aposteriorně možných výsledků shora.

Motivováni předcházející diskusí (srovn. (4.28)), definujeme *subjektivní basi* jakékoli strategické hry tvaru (4.3) jako dvojici

$$(4.30) \qquad (\Omega, \{U_i\}_{i\in I}).$$

První člen subjektivní base hry je množina těch výsledků, na které je definováno preferenční schéma hry (1.2).

Víme již, že když (4.30) je subjektivní base hry s náhodovými faktory, pak racionalita všech hráčů se projeví v platnosti podmínky (4.26), která se redukuje na tvar (4.27) v případě, že $E^{(0)} = E$. Uvažme, že množina Ω v obecném případě má představovat souhrn všech výsledků apriorně možných ze subjektivních hledisek všech hráčů a že prostor E representuje množinu všech apriorně možných výsledků z hlediska vnějšího pozorovatele. Přitom racionální hráči musí být schopni analysovat hru z objektivního stanoviska, jinak vysloveno, každý racionální hráč se musí vmyslit při analyse do role vnějšího pozorovatele, takže pro něho prostor E musí představovat množinu všech apriorně a objektivně možných determinovaných výsledků. Vnější pozorovatel může vždycky provést analysu konfliktní situace tak podrobně, že při jejím popisu předem vyloučí výsledky, které nemohou aposteriorně nastat, čímž dosáhne, že platí $E^{(0)} = E$. Splnění této podmínky pro objektivní basi (4.29) však nepožadujeme, poněvadž na jedné straně je to z formálně matematického stanoviska nepohodlné a poněvadž na druhé straně, a to hlavně, přešetření aposteriorní možnosti elementárních výsledků by mohlo být zbytečně pracné. Táž úvaha však platí i pro racionálního hráče: ten zanedbá případně velmi pracně dosažitelnou informaci, kterou by získal, vyhledávaje mezi elementárními výsledky ty, které jsou aposteriorně možné. Tudíž můžeme předpokládat, že každý racionální hráč raději zahrne do svého systému preferencí všechny smíšené výsledky.

Při tomto pojetí bude ta stránka racionality hráčů, která se týká rozsahu jimi subjektivně hodnocených výsledků, vyjádřena pro hru s náhodovými faktory podmínkou (4.27). Slovy, každý racionální hráč zahrne do svého subjektivního hodnocení výsledků všechny smíšené výsledky, aby si byl jist, že bude moci srovnávat výsledky jemu dostupné při rozboru konfliktu.

Přesvědčíme se ještě v této kapitole, že strategickou hru v normálním tvaru lze vždy chápat jako hru, která vznikne normalisací ze hry s náhodovými faktory. Můžeme tedy také ve hře v normálním tvaru předpokládat, že racionální hráči zahrnují do svého systému preferencí všechny smíšené výsledky, což je vyjádřeno podmínkou (4.27).

Vraťme se k diskusi o pojmech objektivní a subjektivní base hry. V matematickém popisu hry daném čtveřicí tvaru (4.3) hraje základní roli prostor elementárních výsledků, i když v tomto popisu prostor E nevystupuje explicitně, nýbrž jenom implicitně jako součást definice jiných základních dat o konfliktní situaci; srovn. (4.2) a (4.17). V objektivní basi (4.29) hry s náhodovými faktory prostor E poprvé vystupuje explicitně jako samostatný člen, což však neplatí v případě objektivní base (1.6) hry v normálním tvaru. Tyto skutečnosti vyplývají ze smyslu objektivní base strategické hry. Jednou složkou objektivní base je totiž ta množina výsledků, jejíž prvky jsou a priori možnými hodnotami výsledkové funkce, na rozdíl od subjektivní base, v níž se vyskytuje ta množina výsledků, na níž jsou definovány systémy preferencí jednotlivých hráčů.

Abychom zachytili tuto diferenci v dvojím pojetí a priori možného výsledku, můžeme strategickou hru pojmout obecněji jako dvojici

$$(B_{obj}, B_{subj}) , \tag{4.31}$$

skládající se z objektivní base hry B_{obj} a ze subjektivní base hry B_{subj}; přitom objektivní base hry je vyjádřena trojicí

$$B_{obj} = (I, \Omega^*, \Pi) , \tag{4.32}$$

v níž vedle pravidel hry Π vystupuje prostor Ω^*, representující horní odhad množiny aposteriorně možných výsledků, kdežto subjektivní base hry B_{subj} je vyjádřena v obecném tvaru (4.28), v němž Ω_i pro $i \in I$ je množina těch výsledků, které hráč i zahrnuje do svého systému preferencí. Spec. pro hru s náhodovými faktory máme: $\Omega^* = E$, $\Omega_i = \Omega$ pro $i \in I$, kdežto pro hru v normálním tvaru je: $\Omega_i = \Omega^* = \Omega$ pro $i \in I$.

Normalisace hry s náhodovými faktory

Zjistili jsme, že nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby bylo možno hru s náhodovými faktory převést na *normalisovaný tvar* (1.5), v němž všechny složky mají týž význam jako v dané hře s náhodovými faktory s výjimkou symbolu ϱ, který zde označuje normalisovanou výsledkovou funkci (4.25), je platnost vztahu $\varrho(a) \in \Omega$ pro každý vektor strategií $a \in A$. Tuto nutnou a postačující podmínku lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru množinové inkluse (4.4), v níž je množina $\Omega^{(0)}$ formálně definována vztahem (4.5), v němž ϱ je normalisovaná výsledková funkce dané hry.

Provedením normalisace přejdeme od původní hry, v níž vystupovali náhodové faktory explicitně jako stavy vnějších podmínek s přiřazenými pravděpodobnostmi, ke hře, v níž náhodové faktory tvoří součást výsledků aposteriorně dosahovaných.

Všimněme si, že množina $\Omega^{(0)}$ odpovídající normalisovanému tvaru hry představuje souhrn aposteriorně možných výsledků po normalisaci, kdežto $E^{(0)}$ representuje množinu všech aposteriorně možných výsledků před normalisací. Podle (4.25) je zřejmé, že obecně neplatí rovnost $E^{(0)} = \Omega^{(0)}$; srovn. naproti tomu vztah (4.8), který platí pro hru bez náhodových tahů. Prostor ryzích výsledků $\Omega^{(0)}$ normalisovaného tvaru hry s náhodovými faktory nazýváme určitěji *prostor ryzích smíšených výsledků*. Resumujeme, že ve hře s náhodovými faktory je prostor ryzích smíšených výsledků $\Omega^{(0)}$ obecně různý od prostoru ryzích elementárních výsledků $E^{(0)}$.

Poznámka. Je-li (X, p) konečný pravděpodobnostní prostor, pak pravděpodobnost množiny $M \subset X$ (při rozložení p), kterou označíme symbolem $p(M)$, je definována rovnicí

$$p(M) = \sum_{x \in M} p(x) ;$$

speciálně dostaneme z vlastností rozložení p, že

$$p(X) = 1 , \quad p(\emptyset) = 0 ; \quad p(\{x\}) = p(x) \quad \text{pro} \quad x \in X .$$

V této souvislosti se říká podmnožinám M množiny X náhodné jevy a číslu $p(M)$ pravděpodobnost náhodného jevu M.

Smíšený výsledek $\varrho(a)$ daný vztahem (4.25) můžeme také přepsat ve tvar (4.14), čímž dostaneme:

$$\varrho(a) = \sum_{e \in E} p(\{\sigma : \sigma \in \Sigma;\, \varrho_E(\sigma, a) = e\})\, e\,. \tag{4.33}$$

Odtud vidíme, že $\varrho(a)$ pro $a \in A$ je to rozložení pravděpodobnosti na prostoru elementárních výsledků E, při němž elementární výsledek e nastane s pravděpodobností

$$p(\{\sigma : \sigma \in \Sigma;\, \varrho_E(\sigma, a) = e\}) = \sum_{\substack{\varrho_E(\sigma, a) = e \\ \sigma \in \Sigma}} p(\sigma)\,,$$

kde se tedy na pravé straně rovnosti sčítá přes všechny stavy $\sigma \in \Sigma$, které splňují požadavek pro daný vektor strategií a, že $\varrho_E(\sigma, a) = e$. O rozložení pravděpodobnosti $\varrho(a)$ pravíme, že je na prostoru elementárních výsledků E *indukováno* zobrazením pravděpodobnostního prostoru (Σ, p) do prostoru E, které označíme $\varrho_{(a)}$ a definujeme rovnicí

$$\varrho_{(a)}(\sigma) = \varrho_E(\sigma, a) \quad \text{pro} \quad \sigma \in \Sigma\,,$$

kde a je daný vektor strategií. Platí množinová inkluse

$$\Omega^{(0)} \subset [E^{(0)}] \tag{4.34}$$

(srovn. (4.20), (4.16)), která říká, že lze smíšený výsledek $\varrho(a)$ chápat také jako rozložení pravděpodobnosti na prostoru ryzích elementárních výsledků $E^{(0)}$.

Konfliktní situaci, v níž nevystupují náhodové faktory, lze matematicky charakterisovat jako degenerovaný případ hry s náhodovými faktory s pravidly (4.21), kde je rozložení pravděpodobnosti p degenerováno v tom smyslu, že $p(\sigma_0) = 1$ pro některé $\sigma_0 \in \Sigma$. Ve smyslu interpretace konečných pravděpodobnostních prostorů vyjadřuje poslední podmínka, že stav σ_0 je jistý. Můžeme ji tudíž nahradit speciálnějším předpokladem, že $\Sigma = \{\sigma_0\}$. V každém případě to znamená, že stav vnějších podmínek je předurčen a nemění se vlivem náhody. Lze tedy z matematického modelu pravděpodobnostní prostor (Σ, p) pro strategickou hru bez náhodových faktorů vyloučit, takže pravidla hry (4.21) přejdou ve tvar

$$(\{A_i\}_{i \in I}, \varrho_E)\,, \tag{4.35}$$

kde ϱ_E je elementární výsledková funkce, zde definovaná jako zobrazení prostoru vektorů strategií A do prostoru E.

Poněvadž pravidla hry bez náhodových faktorů jsou formálně tvaru (1.4), má čtveřice (4.3), definující hru bez náhodových faktorů s pravidly hry Π vyjádřenými v (4.35), tvar formálně shodný s čtveřicí (1.5), definující hru v normálním tvaru. Avšak objektivní base hry bez náhodových faktorů je tvaru (4.29), v němž explicitně vystupuje prostor elementárních výsledků E, takže se liší od objektivní base (1.6) hry v normálním tvaru. Když hru bez náhodových faktorů normalisujeme definicí normalisované výsledkové funkce ϱ, která se zde redukuje na vztah $\varrho = \varrho_E$, je objektivní base normalisovaného tvaru dané hry různá od objektivní base původní hry, i když obě base mají stejná pravidla hry.

Všimněme si, že normalisovanou výsledkovou funkci strategické hry bez náhodových faktorů mající pravidla (4.35) bychom měli precisněji definovat vztahem

$$\varrho(a) = \omega_{\varrho_E(a)} \quad \text{pro} \quad a \in A\,;$$

v poslední definici rozlišujeme mezi elementárním výsledkem $e = \varrho_E(a)$ a degenerovaným smíšeným výsledkem ω_e.

Důležitou, i když samozřejmou, vlastností hry bez náhodových faktorů s pravidly (4.35) je platnost rovnosti $E^{(0)} = \Omega^{(0)}$, která říká, že *prostor ryzích výsledků se ve hře bez náhodových faktorů normalisací nezmění*; srovn. obdobný fakt charakterisovaný rovností (4.8) pro strategickou hru bez náhodových tahů.

Jako závěrečnou poznámku k pojmu hry s náhodovými faktory připojme, že podmínku (4.22) resp. (4.24), kterou klademe na množinu Ω těch výsledků, na níž je definováno preferenční schéma hry, neinterpretujeme v tom smyslu, že se každý hráč skutečně pracně přesvědčuje, kterých výsledků je ve hře možno fakticky dosáhnout s pomocí elementární výsledkové funkce, aby je zahrnul do svého systému preferencí, nýbrž ji interpretujeme v širším smyslu, že každý hráč musí znát pravidla hry do té míry, aby se mohl zúčastnit hry a přitom zainteresovaně hrát. To znamená, že každý hráč musí být schopen odhadnout a priori výsledky, které mohou aposteriorně nastat. Tento požadavek na odhad (shora) aposteriorně možných výsledků je právě vyjádřen množinovou inklusí (4.24).

Např. každý hráč zná všechny výsledky, které mohou a priori nastat, vzato z hlediska objektivního vnějšího pozorovatele, tedy právě prostor E; jinak nechť třeba každý hráč i zná jenom strategie, které sám může volit, tj. prostor A_i, a nic navíc (tento typ neinformovanosti bude v našem pojetí v protikladu s požadavkem racionality účastníků konfliktní situace). Aby byla motivována účast všech hráčů ve hře, musí mít všichni na těchto výsledcích zájem, což formálně vyjádříme inklusí: $E \subset \Omega$; tato podmínka zahrnuje jako zvláštní případ rovnost $E = \Omega$, která v podstatě říká, že hráči nejsou schopni dalšího rozboru hry. Ježto $E^{(0)} \subset E$, představuje množina E odhad prostoru ryzích výsledků (tj. aposteriorně možných), který mají hráči k disposici. Je tedy v tomto případě podmínka (4.24) skutečně splněna.

Náhodové tahy

Zatím jsme studovali, jak náhodné vlivy vystupují v nedeterminovaných výsledcích a jak se promítají do konfliktní situace při určování stavu vnějších podmínek. Nyní se chceme zabývat vyšetřováním, jak se náhodné vlivy obrážejí v časovém rozvoji konfliktu, čímž mimo jiné vyjasníme přesněji smysl pojmu stavu přírody, jak ho chápeme v rámci rozvinuté strategické hry.

Vraťme se nejprve k pojmu strategické hry bez náhodových faktorů. Protože se taková hra strukturálně neliší od hry v normálním tvaru, lze ji rozvinout stejným způsobem, jak jsme to učinili pro hru v normálním tvaru na konci předcházející kapitoly. Postavíme se nyní na nové stanovisko, že ve hře figuruje náš pseudohráč — příroda. Tento pseudohráč však neovlivní výsledek konfliktní situace, neboť se dostane na řadu až po skončení konfliktu, takže nemá možnost dalšího zásahu do jeho průběhu. Tuto skutečnost chápeme tak, že ve všech výsledných posicích je na tahu pseudohráč příroda, což formálně vyjádříme podmínkou, že index skutečného hráče na tahu je definován jenom pro posice, které nejsou výsledné; jinými slovy, index tahu θ pro výsledné posice nedefinujeme.

Matematický popis rozvinutého tvaru hry bez náhodových faktorů, definované jako čtveřice (4.3), v níž pravidla hry Π jsou vyjádřena dvojicí (4.35), dostaneme změnou pravidel hry ve tvar (3.9) tak, že definujeme graf posic (Z, Γ) vztahy (3.12) a (3.11), výsledkovou funkci $\varrho_{\mathscr{P}}$ pro rozvinutý tvar rovnicí (3.14), v níž $\varrho = \varrho_E$, spolu se vztahem (3.13), index tahu θ definujeme rovnicí (3.16) a pravidlo pro volbu alternativ $(\mathscr{J}, \Delta)$ vztahem (3.15), přičemž

(4.36) $$\mathscr{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}.$$

Označíme-li symbolem Z_E množinu všech výsledných posic na grafu (Z, Γ), ve znacích

(4.37) $$Z_E = \{z : z \in Z; \Gamma z = \emptyset\},$$

pak právě definovaná pravidla rozvinuté hry bez náhodových faktorů mají sice tvar (3.9), ale nepředstavují pravidla hry bez náhodových tahů, jak jsme je vymezili v kapitole 3, neboť index tahu θ a pravidlo pro volbu alternativ $(\mathscr{J}, \Delta)$ se týkají jen množiny $Z - Z_E$: index tahu θ je podle definice (3.16) zobrazení množiny posic $Z - Z_E$ do množiny hráčů I a systém informačních množin $\mathscr{J}$ představuje rozklad množiny $Z - Z_E$; ostatní požadavky kladené na pravidlo pro volbu alternativ v kapitole 3 jsou splněny (jsou to zvláště podmínka isovalence prvků informačních množin a požadavky (1) a (2) kladené na množiny alternativ).

Poznámka. Když X a Y jsou množiny, pak $X - Y$, rozdíl těchto množin, je definován jako množina těch $x \in X$, které neleží v množině Y; tedy $X - Y = \{x : x \in X;$ není $x \in Y\}$.

Změny uvedeného typu v definicích indexu tahu a pravidla pro volbu alternativ jsou vždy nutné, jakmile ve hře vystoupí jako další hráč příroda; tudíž zvláště v tom případě, když se v rozvinuté hře vyskytnou tahy, které vzniknou působením náhody, takže na ně skuteční hráči nemají vliv. Jsou to tzv. *náhodové tahy* na rozdíl od tzv. *osobních tahů* jednotlivých hráčů.

Pravidla *rozvinuté hry bez náhodových faktorů* však splňují navíc jednu důležitou podmínku: výsledková funkce $\varrho_{\mathscr{P}}$ pro rozvinutý tvar nabývá jako svých hodnot jenom elementárních výsledků; platí tedy

(4.38) $$\varrho_{\mathscr{P}}(\pi) \in E \quad \text{pro každé} \quad \pi \in \mathscr{P}.$$

Doplníme si definici *strategické hry bez náhodových tahů* požadavkem, aby vedle podmínky (4.2) byla splněna podmínka (4.38), kterou podle (4.7) můžeme přepsat ve tvar

$$\Omega_{\mathscr{P}}^{(0)} \subset E \,. \tag{4.39}$$

Tento přirozený požadavek lze vždycky realisovat, jak se hned přesvědčíme, neboť každou hru v rozvinutém tvaru, pokud by obsahovala ryzí neelementární výsledky, lze převést na hru končící elementárními výsledky, když na každý smíšený výsledek dosažený na konci partie pohlížíme jako na další tah v dané hře, který provádí příroda, tj. jako na náhodový tah, který již vede k elementárnímu výsledku.

Protože hra s úplnou informací, jak jsme ji definovali v kapitole 2, představuje podle (3.5) a (3.8) speciální případ hry bez náhodových tahů, budeme také na hru s úplnou informací klást vedle podmínky (4.2) požadavek (4.38) resp. (4.39). Poněvadž pojem informace se týká skutečných hráčů vystupujících v dané konfliktní situaci, existují také hry obsahující úplnou informaci, v nichž se vyskytují náhodové tahy; jako příklad může sloužit známá dětská hra „Člověče, nezlob se!" Proto budeme strategickým hrám s pravidly (2.1) říkat určitěji *strategické hry s úplnou informací bez náhodových tahů.*

Rozvinutý tvar hry v normálním tvaru, jak jsme jej uvedli v kapitole 3, požadavek (4.38) nesplňuje; je to zřejmé, když např. taková hra vznikne normalisací hry s náhodovými faktory, jež nedegeneruje ve hru bez náhodových faktorů (srovn. (4.25) a (3.14)). Abychom dostali *rozvinutí hry v normálním tvaru*, které již splňuje podmínku (4.38), nahradíme podle hořejší připomínky každý smíšený výsledek $\omega \in \Omega^{(0)}$ náhodovým tahem, který bude representovat náhodný pokus, odpovídající rozložení pravděpodobnosti ω a vedoucí k elementárnímu výsledku $e \in E$ s pravděpodobností $\omega(e)$.

Provedení tohoto programu vyžaduje, abychom ve formálním popisu pravidel rozvinutého tvaru vyšetřované hry doplnili graf posic (3.12) o elementární výsledky, jimiž hra skončí. Proto definujeme množiny J_i nejenom pro $1 \leqq i \leqq n + 1$ ($n = |I|$), ale také pro $i = n + 2$ formálně stejnou definicí (3.11), tj.

$$J_{n+2} = \prod_{j=1}^{n+1} A_j \,,$$

kde klademe

$$A_{n+1} = E \,.$$

Prostor posic Z je pak definován jako sjednocení $Z = \bigcup\{J_i : 1 \leqq i \leqq n + 2\}$ a zobrazení Γ je dáno formálně stejnou definicí jako v (3.12) při změně n v $n + 1$; spec. je $\Gamma z = \emptyset$ pro $z \in J_{n+2}$. Je-li π partie na právě definovaném grafu posic a je-li z' výsledná posice v partii π mající tvar

$$z' = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in J_{n+2} \,, \quad \text{kde} \quad a_i \in A_i \quad (1 \leqq i \leqq n + 1) \,, \tag{4.40}$$

položíme

$$e(\pi) = a_{n+1} \in E \, (= A_{n+1}) \,;$$

slovy, $e(\pi)$ je ten elementární výsledek, který vystupuje jako poslední člen $(n + 1)$-tice (4.10) představující výslednou posici v partii π. Výsledkovou funkci pro rozvinutý tvar definujeme rovnicí

$$(4.41) \qquad \varrho_{\mathscr{P}}(\pi) = e(\pi) \quad \text{pro} \quad \pi \in \mathscr{P} = \prod_{i=1}^{n+2} J_i .$$

Definice indexu tahu a pravidla pro volbu alternativ zůstane stejná jako při rozvinutí hry bez náhodových faktorů, tj. θ a $(\mathscr{J}, \Delta)$ jsou dány definicemi (3.16), (4.36) a (3.15).

Index tahu θ a systém informačních množin $\mathscr{J}$ máme nyní vztaženy na množinu posic $Z - (J_{n+1} \cup J_{n+2})$ a nikoli na celý prostor posic. Podle našeho nového přístupu k časovému rozvinutí vyšetřovaného typu hry bude na tahu v posicích množiny $J_{n+1} \cup J_{n+2}$ pseudohráč příroda. Množina J_{n+2} představuje souhrn všech výsledných posic, jimiž hra končí. Zbývá zahrnout do formálního popisu pravidel rozvinuté hry, co se děje v posicích množiny $J_{n+1} = A$, které nejsou výsledné. Pro $a \in A$ představuje (obecně smíšený) výsledek $\varrho(a)$ rozložení pravděpodobnosti na prostoru elementárních výsledků E. Všimněme si, že podle (3.12), kde podle hořejší poznámky n nahradíme $n + 1$, máme

$$\Gamma a = \{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) : \{a_i\}_{i \in I} = a,\ a_{n+1} \in E\},\ a \in A ,$$

takže $\varrho(a)$ můžeme pojmout jako rozložení pravděpodobnosti na množině posic Γa. Precisněji formulováno, položíme-li

$$(4.42) \qquad p_a(z') = (\varrho(a))(e(z')) \quad \text{pro} \quad z' \in \Gamma a ,$$

kde $e(z')$ je ten elementární výsledek, který vystupuje jako poslední člen $(n + 1)$-tice z' mající tvar (4.40), tj. $e(z') = a_{n+1}$, pak p_a je rozložení pravděpodobnosti na množině posic Γa. Pravděpodobnostní prostor $(\Gamma a, p_a)$ pro $a \in A$ představuje náhodový tah, který provádí příroda, když hra dospěje do posice a. Souhrn všech náhodových tahů v naší hře je tak representován jednoparametrovou soustavou pravděpodobnostních prostorů

$$(4.43) \qquad \{(\Gamma a, p_a)\}_{a \in A} \quad \text{resp.} \quad \{(\Gamma z, p_z)\}_{z \in J_{n+1}} \quad (A = J_{n+1}) .$$

Vidíme tak, že náhodový tah, tj. zásah přírody do hry v rozvinutém tvaru, prováděný v dané posici z záleží ve volbě některé posice $z' \in \Gamma z$ bezprostředně následující po posici z na grafu posic (Z, Γ), přičemž nejde o volbu subjektivně podbarvenou, nýbrž o volbu, kterou provádí některý náhodový mechanismus (např. házení kostkou, míchání karet), realisující náhodný pokus odpovídající danému rozložení pravděpodobnosti, které značíme p_z, na množině Γz posic bezprostředně následujících po posici z. Opakujeme, že náhodový tah v dané posici je matematicky vyjádřen jako rozložení pravděpodobnosti na množině posic po ní bezprostředně následujících; jinak řečeno, náhodový tah vystoupí v matematickém modelu konfliktní situace jako některý pravděpodobnostní prostor posic bezprostředně následujících po posici, v níž se má tento tah provést.

Označíme-li symbolem Z_0 množinu všech posic, v níž je na tahu příroda, tj. v našem případě $Z_0 = J_{n+1} \cup J_{n+2}$, a znakem Z_0^* množinu těch posic $z \in Z_0$, které nejsou výsledné, v našem případě $Z_0^* = J_{n+1} = A$ resp. v obecnějším vyjádření

$$Z_0^* = Z_0 - Z_E \,, \tag{4.44}$$

kde Z_E je dáno definicí (4.37), je působení náhody v rozvinutém modelu konfliktní situace popsáno dvojicí

$$(Z_0^*, \{(\Gamma z, p_z)\}_{z \in Z_0^*}) \,, \tag{4.45}$$

kterou budeme nazývat *náhodové schéma hry v rozvinutém tvaru.*

Hra v rozvinutém tvaru

Nyní jsme připraveni podat obecnou definici strategické hry v rozvinutém tvaru, ať již obsahuje náhodové tahy, nebo nikoli. *Strategickou hru v rozvinutém tvaru* definujeme jako čtveřici (4.3) s pravidly hry Π vyjádřenými pěticí

$$((Z, \Gamma), \varrho_{\mathscr{P}}, \theta, (\mathscr{J}, \Delta), (Z_0^*, \{(\Gamma z, p_z)\}_{z \in Z_0^*})) \,, \tag{4.46}$$

jejíž členy splňují tyto podmínky:

(1) (Z, Γ) je graf posic a $\varrho_{\mathscr{P}}$ je výsledková funkce pro rozvinutý tvar ve smyslu kapitoly 2, která má vlastnost (4.38);

(2) existuje množina $Z_0 \subset Z$ taková, že θ je zobrazení množiny $Z - Z_0$ do množiny I, $\mathscr{J}$ je rozklad množiny $Z - Z_0$ splňující podmínku isovalence a Δ vyhovuje požadavkům (1) a (2) uvedeným v kapitole 3;

(3) přitom množina Z_0^* splňuje rovnost (4.44), kde Z_E je dáno vztahem (4.37), a pro každé $z \in Z_0^*$ je $(\Gamma z, p_z)$ pravděpodobnostní prostor, tedy p_z je rozložení pravděpodobnosti na množině Γz.

Jak vidíme, v úplném popisu pravidel hry v rozvinutém tvaru vystoupí vedle indexu tahu a pravidla pro volbu alternativ navíc náhodové schéma hry tvaru (4.45). Z našich úvah plynou interpretační principy pro hru v rozvinutém tvaru v následující formulaci:

Princip realisace hry: Každá partie se zahajuje ve výchozí posici $z^{(0)}$. Když $z^{(0)} \in Z_E$, výsledek partie $(z^{(0)})$ je $\varrho_{\mathscr{P}}(z^{(0)}) \in E$. Není-li $z^{(0)} \in Z_E$, pak buď $z^{(0)} \in Z_0^*$ nebo $z^{(0)} \in Z - Z_0$. V prvním případě zahajuje partii příroda: je proveden náhodový tah, který záleží ve volbě alternativy $z^{(1)} \in \Gamma z^{(0)}$ s pravděpodobností $p_{z^{(0)}}(z^{(1)})$. V druhém případě zahajuje partii hráč $\theta(z^{(0)})$ s informační množinou $\{z^{(0)}\}$ (srovn. úvahy v kapitole 3), který zvolí libovolně některou alternativu $z^{(1)} \in \Gamma z^{(0)}$ (při zahájení má hráč úplnou informaci). Když již partie dospěla do některé posice z, která není výsledná, pak pro $z \in Z_0^*$ je proveden náhodový tah, při němž je zvolena některá alternativa $z' \in \Gamma z$ s pravděpodobností $p_z(z')$, kdežto pro $z \in Z - Z_0$ hráč $\theta(z)$ s informační množinou J jednoznačně určenou podmínkou, že $z \in J$, zvolí libovolně některou svou alternativu $\mathscr{A} \in \Delta J$, čímž je jednoznačně určena posice $z' \in \Gamma z$, která vyhovuje požadavku, že $\mathscr{A} \cap \Gamma z = \{z'\}$. Po konečně mnoha krocích dospěje partie do některé výsledné posice, kterou je celá partie, označme ji π, jednoznačně určena a této partii je přiřazen výsledek $\varrho_{\mathscr{P}}(\pi) \in E$.

Princip motivace jednání je stejný jako v kapitole 3 pro hru bez náhodových tahů.

Jak jsme řekli, množinu Z_0 interpretujeme jako množinu těch posic, v nichž je na tahu další hypotetický hráč – příroda. Tento pseudohráč nemá svobodnou volbu alternativ, pokud má možnost zásahu; jeho volba alternativy záleží v uskutečnění náhodného pokusu odpovídajícího danému rozložení pravděpodobnosti na množině posic bezprostředně následujících po posici, v níž má zásah provést. Na druhé straně má tento pseudohráč formálně úplnou informaci v posici, v níž má možnost zásahu. Očíslujeme-li hráče v množině I podle (1.1) a přiřadíme-li přírodě index 0, můžeme danou hru chápat jako konfliktní situaci o $n + 1$ účastnících, s *doplněnou množinou hráčů*

$$I^+ = \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{4.47}$$

a definovat *doplněný index tahu* θ^+ jako zobrazení prostoru posic Z do množiny I^+,

$$\theta^+(z) = \theta(z) \quad \text{pro} \quad z \in Z - Z_0\,, \quad \theta^+(z) = 0 \quad \text{pro} \quad z \in Z_0\,, \tag{4.48}$$

a *doplněné pravidlo pro volbu alternativ* $(\mathscr{J}^+, \Delta^+)$ jako

$$\mathscr{J}^+ = \mathscr{J} \cup \{\{z\} : z \in Z_0\}\,, \tag{4.49}$$

$$\Delta^+ J = \Delta J \quad \text{pro} \quad J \in \mathscr{J}\,, \quad \Delta^+\{z\} = \{\{z'\} : z' \in \Gamma z\} \quad \text{pro} \quad z \in Z_0\,. \tag{4.50}$$

Tímto doplněním dostaneme index tahu θ^+ a pravidlo pro volbu alternativ $(\mathscr{J}^+, \Delta^+)$, které již splňují všechny podmínky uvedené v kapitole 3: spec. $\mathscr{J}^+$ je rozklad celého prostoru posic Z. Situace nultého hráče – přírody – se ovšem liší od situace ostatních hráčů ve způsobu volby alternativ.

Všimněme si, že příroda se liší od ostatních hráčů nejenom tím, že nevolí své alternativy svobodně, ale hlavně tím, že nemá systém preferencí. Tudíž příroda se chová co by hráč pasivně jak při volbě alternativ, tak i z hlediska zájmu na výsledcích. Proto někdy nazýváme posice v množině Z_0 *pasivními posicemi* ve hře.

Mezi strategické hry v rozvinutém tvaru spadá také degenerovaný případ, kdy $Z_0 \supset Z - Z_E$, tj. $Z_0^* = Z - Z_E$. Jestliže ještě $Z_0^* \neq \emptyset$, takže hra náhodové tahy efektivně obsahuje, a to jenom náhodové tahy a tedy žádný skutečný hráč nemá možnost zásahu, říkáme, že hra je *náhodová*. Typickým příkladem náhodové hry je známá středověká hra v kostky (při předepsané výši sázek). Ruletu, v níž má každý hráč možnost volby výše sázek a různých kombinací spojených s očekávaným výsledkem, nelze zahrnout mezi náhodové hry v právě zavedeném smyslu.

Druhý krajní případ nastane, když $Z_0 \subset Z_E$, tedy $Z_0^* = \emptyset$; hra neobsahuje žádné náhodové tahy. V tomto případě lze, jak již víme, náhodové schéma hry vyloučit z matematického popisu pravidel hry, takže pravidla (4.46) přejdou ve tvar (3.9). V kapitole 3 jsme pro pohodlí předpokládali, že nejenom $Z_0^* = \emptyset$, ale že navíc $Z_0 = \emptyset$. Vyhovět ve formálním modelu podmínce $Z_0 = \emptyset$, když $Z_0^* = \emptyset$, je vždy možné rozšířením definice indexu tahu θ na celý prostor posic, a to libovolně, neboť skutečnost, kdo je na tahu ve výsledných posicích, nemá vliv na výsledek partie. Této formální modifikaci definice indexu tahu musí odpovídat příslušná formální modifikace pravidla pro volbu alternativ; srovn. konec předcházející kapitoly věnovaný předběžným úvahám o rozvinutí hry v normálním tvaru.

V naší obecné definici hry v rozvinutém tvaru nevylučujeme při definici indexu tahu a pravidla pro volbu alternativ výsledné posice z úvahy. Je tomu tak proto, že jsou případy, kdy má pro výsledné posice určení hráče na tahu konkrétní obsah, např. v šachu pro matové a patové posice. (Všimněme si však, že v posledně jmenovaném příkladě je obsahově tento fakt zahrnut v pojmu výsledné posice.) Přitom mezi *strategické hry bez náhodových tahů* budeme zahrnovat i případ, kdy $Z_0^* = \emptyset$, ale $Z_0 \neq \emptyset$, takže pravidla hry nabudou tvaru (3.9), ale index tahu θ ani systém informačních množin $\mathscr{J}$ nevyhoví speciálním podmínkám uvedeným v kapitole 3, neboť se nebudou vztahovat na celý prostor posic.

Ve formálním popisu pravidel hry v rozvinutém tvaru se v literatuře nejčastěji užívá konvence, kterou v našem formalismu můžeme vyjádřit jako podmínku, že $Z_0 \supset Z_E$; jinými slovy, mezi pasivní posice hry se počítají všechny posice výsledné. Při této konvenci by se předpoklady o hře bez náhodových tahů změnily na požadavek, aby index tahu θ a systém informačních množin $\mathscr{J}$ byly vztaženy na množinu posic $Z - Z_E$. Připomeňme, že jsme této konvence použili při rozvinutí hry bez náhodových faktorů a hry v normálním tvaru.

Často se také používá ve formálním popisu pravidel hry v rozvinutém tvaru další konvence, kterou v naší symbolice můžeme vyjádřit požadavkem, aby $Z_E = E$; z tohoto požadavku vyplývá, že elementárních výsledků je pak tolik, kolik je partií. O nevhodnosti poslední konvence svědčí to, že definováním prostoru elementárních výsledků rovnicí $E = Z_E$ v některých případech fakticky dostaneme množinu všech determinovaných výsledků hry v tolika exemplářích, kolik je trajektorií spojujících výchozí posici s některou posicí bezprostředně předcházející některé výsledné posici; o tom jsme se přesvědčili při rozvinutí hry v normálním tvaru (srovn. definici množiny Γa, $a \in A$). Na příkladu hry v šachy je dobře vidět, jak by tato konvence nesmírně zvětšila počet elementárních výsledků. Upozorněme, že rovnost $Z_E = E$ má za následek platnost rovnosti $E^{(0)} = E$; srovn. následující paragraf.

Vrátíme-li se k rozvinutí hry v normálním tvaru, jak jsme je provedli v předcházejícím paragrafu, snadno nahlédneme, že jsme přitom přešli od pravidel hry tvaru (1.4) k pravidlům tvaru (4.46) splňujícím hořejší požadavky (1) až (3); navíc je však formálně vyhověno požadavku dokonalé paměti pro všechny hráče, jak jsme jej vyslovili v minulé kapitole.

Strategické hry s dokonalou pamětí obecně definujeme jako hry v rozvinutém tvaru, které splňují požadavek dokonalé paměti pro všechny hráče. *Strategické hry s úplnou informací* tvoří speciální případ her s dokonalou pamětí a jsou definovány jako hry v rozvinutém tvaru, v nichž každý hráč má úplnou informaci v tom smyslu, že každá informační množina obsahuje jedinou posici. Formálně, hra s úplnou informací je podle definice hra daná čtveřicí (4.3) s pravidly hry Π vyjádřenými pěticí

(4.46), které splňují hořejší požadavky (1) až (3), přičemž

$$\mathscr{I} = \{\{z\} : z \in Z - Z_0\} \; ; \tag{4.51}$$

srovn. (3.5). *Podmínka úplné informace* (4.51) nám podle (3.8) umožňuje z pravidel (4.46) hry v rozvinutém tvaru vypustit pravidlo pro volbu alternativ $(\mathscr{I}, \Delta)$, které je grafem posic (Z, Γ) v tomto případě jednoznačně určeno. Když ještě $Z_0^* = \emptyset$, odpadne ze základních dat v (4.46) údaj o náhodových tazích, takže pravidla hry nabudou tvaru (2.1); jinými slovy, dostaneme hru s úplnou informací bez náhodových tahů.

Na závěr tohoto paragrafu ještě poznamenejme, že *subjektivní base hry v rozvinutém tvaru* je dána obecnou definicí (4.30). Ježto je splněna podmínka (4.39), definujeme *objektivní basi hry v rozvinutém tvaru* jako trojici (4.29), v níž Π jsou pravidla hry v rozvinutém tvaru (4.46). Tato definice je ve shodě s našimi úvahami provedenými v předcházejících paragrafech.

Hra s jedním náhodovým tahem

Strategická hra s jedním náhodovým tahem (provedeným na začátku partie) je definována jako čtveřice (4.3) s pravidly hry Π vyjádřenými pěticí (4.46), která vyhovuje podmínce, že $Z_0^* = \{z^{(0)}\}$. Z poslední podmínky již vyplývá, že $\Gamma z^{(0)} \neq \emptyset$. V pravidlech hry (4.46) lze pro tento případ vyjádřit náhodové schéma (4.45) jako pravděpodobnostní prostor

$$(\Gamma z^{(0)}, p)\,, \quad \text{kde} \quad p = p_{z^{(0)}}\,. \tag{4.52}$$

Typickým příkladem strategických her s jedním náhodovým tahem jsou karetní hry. Před započetím partie karetní hry — z našeho formálního stanoviska v posici $z^{(0)}$ — se karty zamíchají, čímž je určeno pořadí karet v balíčku od svrchní karty až po spodní. Představuje-li $\Gamma z^{(0)}$ množinu všech možných pořadí karet v balíčku, znamená to, že je náhodně zvolena některá posice $z^{(1)} \in \Gamma z^{(0)}$. Je-li počet karet v balíčku k, skládá se množina $\Gamma z^{(0)}$ právě z $k!$ (čteme: k faktoriál) posic, kde $k! = 1 \,.\, 2 \ldots k$ představuje součin prvních k přirozených čísel. Předpokládejme, že míchání karet se děje poctivě, takže každé pořadí karet v balíčku je stejně pravděpodobné; označíme-li p_0 tuto pravděpodobnost, musí být

$$p_0 \,.\, k! = 1\,, \quad \text{tedy} \quad p_0 = \frac{1}{k!}\,.$$

Tudíž v našem případě je rozložení pravděpodobnosti p na množině $\Gamma z^{(0)}$ (srovn. (4.52)) dáno vztahem

$$p(z) = \frac{1}{k!} \quad \text{pro každé } z \in \Gamma z^{(0)}, \quad |\Gamma z^{(0)}| = k!\,.$$

Vidíme, že v případě karetní hry je stav vnějších podmínek dán pořadím karet v balíčku, které je určeno náhodou. Toto pořadí pak určuje rozdání a tím i listy všech hráčů. Kdyby každý hráč znal pořadí karet v balíčku, znal by také listy svých spoluhráčů a hra by se stala hrou s úplnou informací.

Lze říci, že karetní hra je složena ze soustavy her s úplnou informací jedním náhodovým tahem; každá komponenta jako hra s úplnou informací odpovídá právě jednomu pořadí karet v balíčku. Jediným náhodovým tahem — zamícháním karet — vznikne ze soustavy her s úplnou informací jedna hra s neúplnou informací. Máme zde příklad úzké souvislosti mezi neúplnou informací a náhodou: jsou to náhodné vlivy, které způsobují v našem případě neúplnost informace hráčů.

Poznamenejme, že rozklad hry ve hry jednoduššího typu představuje jednu z užívaných metod rozboru strategických her. Touto metodou se však v našich úvahách zabývat nebudeme, a proto zde nepodáme formální definici komponentních her ani pro jednoduchý případ strategické hry s jedním náhodovým tahem. Chceme však upozornit, že ve hrách s úplnou informací postupný rozklad ve stále jednodušší „podhry" dané hry tvoří nejúčinnější metodu rozboru.

Ve strategické hře s jedním náhodovým tahem definujeme *strategie* jednotlivých hráčů formálně zcela stejně, jako jsme to učinili v kapitole 3. *Strategie přírody*, kterou nazýváme ve shodě s předcházejícími paragrafy *stav přírody*, je formálně definována při doplněném pravidle pro volbu alternativ $(\mathscr{I}^+, \Delta^+)$ (srovn. (4.47) až (4.50)) stejně jako strategie skutečného hráče: stav přírody σ je kterákoli funkce na množinovém systému

$$\mathscr{I}_0^* = \{\{z\} : z \in Z_0^*\} \tag{4.53}$$

s hodnotami $\sigma(\{z\}) \in \Delta^+\{z\}$; označíme-li $\mathscr{I}_0$ *informační schéma přírody*, tj.

$$\mathscr{I}_0 = \{\{z\} : z \in Z_0\}\,,$$

představuje $\mathscr{I}_0^*$ systém těch informačních množin přírody, které neobsahují výsledné posice. Příroda jako hráč má úplnou informaci, takže ve smyslu kapitoly 2 můžeme stav přírody definovat také jinak, a to jako funkci σ na množině Z_0^* s hodnotami $\sigma(z) \in \Gamma z$. V našem případě hry s jedním náhodovým tahem je $Z_0^* = \{z^{(0)}\}$, takže *prostor strategií přírody* Σ, tj. prostor stavů, lze identifikovat s množinou $\Gamma z^{(0)}$; tudíž $\Sigma = \Gamma z^{(0)}$.

Partie π ve hře s pravidly (4.46) je *vytvořena* tzv. *doplněným vektorem strategií* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, kde $a_i \in A_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$ ($|I| = n$, $|I^+| = n + 1$; platí úmluva (1.1)), přičemž $A_0 = \Sigma$, kdežto A_i pro $i \neq 0$ je prostor (rozvinutých) strategií hráče i, když splňuje podmínky uvedené v kapitole 3. Podržíme-li označení (4.23), leží tyto doplněné vektory strategií v množině A^+, která je ekvivalentní s kartézským součinem $\Sigma \times A$, nahradíme-li vektory tvaru $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ dvojicemi $(a_0, (a_1, \ldots, a_n))$. Značí-li $\pi(\sigma, a)$ partii (jednoznačně určenou), která je vytvořena doplněným vektorem strategií $(\sigma, a_1, \ldots, a_n)$ pro $\sigma \in \Sigma$ a $a = \{a_i\}_{i \in I} \in A$, definujeme *normalisovanou elementární výsledkovou funkci* ϱ_E rovnicí

$$\varrho_E(\sigma, a) = \varrho_{\mathscr{P}}(\pi(\sigma, a))\,, \quad \sigma \in \Sigma\,, \quad a \in A\,. \tag{4.54}$$

Touto dílčí normalisací, při níž výsledky zachovají ještě svoji elementárnost, tj. determinovanost, přejdeme od pravidel hry tvaru (4.46) k pravidlům hry s náhodovými faktory tvaru (4.21). Snadno nahlédneme, že přitom platí rovnost

$$\Omega_{\mathscr{P}}^{(0)} = E^{(0)} \; ; \tag{4.55}$$

jinak řečeno, *prostor ryzích výsledků hry v rozvinutém tvaru je identický s prostorem elementárních ryzích výsledků*, jak jsme jej definovali vztahem (4.20), v němž nyní ϱ_E představuje normalisovanou elementární výsledkovou funkci dané hry.

Normalisaci dané hry dokončíme, když definujeme *normalisovanou výsledkovou funkci* ϱ vztahem (4.25) resp. (4.33). Odtud soudíme, že k tomu, abychom mohli danou hru převést na normalisovaný tvar, je nutné a stačí, aby byla splněna podmínka (4.4), v níž prostor $\Omega^{(0)}$ je odvozen z normalisované výsledkové funkce ϱ dané hry.

Přesvědčili jsme se tak, že *strategickou hru s jedním náhodovým tahem lze normalisovat* podobně jako hru bez náhodových tahů, ovšem za předpokladu, že platí množinová inkluse (4.4). Tato normalisace vyžaduje na rozdíl od hry bez náhodových tahů mezikroku s normalisovanou elementární výsledkovou funkcí.

Normalisace hry v rozvinutém tvaru

Normalisace hry v rozvinutém tvaru s obecnými pravidly (4.46) se provede ve dvou krocích, jak jsme to již viděli v předešlém případě hry s jedním náhodovým tahem. Speciálně tedy *rozvinutá strategie přírody* neboli *rozvinutý stav přírody* (tj. stav vnějších podmínek) je definován jako funkce σ na množině Z_0^* s hodnotami $\sigma(z)$ ležícími v množině Γz (případně jako funkce na množinovém systému $\mathscr{J}_0^*$ definovaném v (4.53); srovn. předcházející paragraf).

Označíme-li symbolem Σ prostor všech rozvinutých strategií přírody, potřebujeme definovat rozložení pravděpodobnosti p na prostoru Σ, které by bylo v nějakém rozumném smyslu složeno ze soustavy rozložení pravděpodobnosti

$$\{p_z\}_{z \in Z_0^*} ,$$

abychom mohli přejít v prvním normalisačním kroku ke hře s náhodovými faktory. Uvědomíme-li si, v čem tkví smysl strategie, tedy i strategie přírody, znamená to, že stav přírody má být zvolen ještě před zahájením partie. Vycházíme z představy, že stav přírody σ volí nějaký vnější pozorovatel, rozhodčí, který ještě před zahájením partie provede všechny možné náhodové tahy, tj. náhodné pokusy, z nichž každý odpovídá právě jedné posici $z \in Z_0^*$ a záleží v tom, že je zvolena alternativa $\sigma(z) \in \Gamma z$ s pravděpodobností $p_z(\sigma(z))$.

Učiníme tuto pomocnou úvahu. Předpokládejme, že hráči sehrají dvě po sobě jdoucí partie dané hry. Nechť v první partii se vyskytne posice z_1 s náhodovým tahem $(\Gamma z_1, p_{z_1})$, v němž je zvolena některá posice $z_1' \in \Gamma z_1$ s pravděpodobností $p_{z_1}(z_1')$, a nechť v druhé partii nastane v posici z_2 náhodový tah $(\Gamma z_2, p_{z_2})$, v němž je zvolena některá posice $z_2' \in \Gamma z_2$ s pravděpodobností $p_{z_2}(z_2')$. Intuitivně je jasné, že volba alternativy při náhodovém tahu uvažovaném v první partii nemá ovlivnit volbu alternativy při náhodovém tahu uvažovaném v druhé partii. Např. v karetní hře se má balíček zamíchat před další partii tak dokonale, že každé pořadí karet v balíčku je stejně pravděpodobné. Musí být tedy náhodové tahy ve dvou různých partiích dané hry stochasticky nezávislé, takže pravděpodobnost, že se v první partii zvolí posice z'_1 a současně v druhé partii posice z'_2 musí být rovna součinu

$$p_{z_1}(z'_1) \cdot p_{z_2}(z'_2) .$$

Na druhé straně v jedné a téže partii dané hry, jak plyne z interpretace pravidel hry popsané v principu realisace hry, musí být dva náhodové tahy, z nichž jeden bezprostředně předchází druhému, rovněž stochasticky nezávislé. Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že číslo $p_{z_2}(z_3)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že se v partii vyskytne posice $z_3 \in \Gamma z_2$, za podmínky, že se v ní vyskytla posice $z_2 \in Z_0^*$. Je-li z_1 posice bezprostředně předcházející posici z_2 taková, že $z_1 \in Z_0^*$, nastane posice z_2 s pravděpodobností $p_{z_1}(z_2)$. Tudíž pravděpodobnost, že v téže partii z posice z_1 přejdeme postupně do posice z_2 a pak do posice z_3, je nutně vyjádřena jako součin

$$p_{z_1}(z_2) \cdot p_{z_2}(z_3) .$$

Tento požadavek o stochastické nezávislosti lze okamžitě rozšířit na všechny náhodové tahy v jedné a téže partii.

Stavem přírody není určeno, která partie se v dané hře vyskytne, to záleží ještě na volbě strategií, kterou provedou jednotliví hráči. Ježto však jsme zjistili, že v každém případě, ať jde o náhodové tahy v různých partiích nebo v téže partii, musí být všechny mezi sebou stochasticky nezávislé, musíme požadovat, aby rozhodčí, který volí stav přírody před zahájením partie, provedl všechny náhodové tahy na sobě nezávisle.

Z právě provedené úvahy již vyplývá, že v tomto případě je pravděpodobnost stavu přírody definována jako součin

$$p(\sigma) = \prod_{z \in Z_0^*} p_z(\sigma(z)) , \quad \sigma \in \Sigma , \tag{4.56}$$

který vyjadřuje stochastickou nezávislost soustavy náhodových tahů

$$\{(\Gamma z, p_z)\}_{z \in Z_0^*} .$$

Tím jsme dokončili definici *pravděpodobnostního prostoru stavů* (Σ, p), který je odvozen z dané hry v rozvinutém tvaru.

Normalisovanou elementární výsledkovou funkci ϱ_E pro danou hru zavádíme definicí formálně stejnou jako v předcházejícím paragrafu, tj. definicí (4.54). Dokončení normalisace se provede tím, že odvozenou hru s náhodovými faktory normalisujeme s pomocí definice (4.25) *normalisované výsledkové funkce* ϱ, pokud jsou splněny příslušné předpoklady, které lze redukovat na podmínku (4.4).

Jestliže rozvineme hru v normálním tvaru, dostaneme při její opětné normalisaci jako mezikrok hru s náhodovými faktory, čímž je ověřeno dříve vyslovené tvrzení, že lze na každou hru v normálním tvaru pohlížet jako na hru, která vznikla normalisací hry s náhodovými faktory. Samozřejmě touto zpětnou normalisací dospějeme k původní hře v normálním tvaru, kterou jsme rozvinuli.

Nakonec si všimněme speciálního případu, kdy hra v rozvinutém tvaru je náhodová. Podle dřívějších úvah má v tomto případě každý hráč k disposici pouze prázdnou strategii, takže normalisovaná elementární výsledková funkce je závislá jenom na stavu přírody, a tedy náhodová hra se tak převede na hru s náhodovými faktory, jejíž pravidla mají tvar

$$((\Sigma, p), \varrho_E)\ ;$$

přitom normalisovaná elementární výsledková funkce ϱ_E je podle předchozího definována na prostoru stavů Σ. Normalisovaná výsledková funkce ϱ přiřazená dané náhodové hře nabývá jediné hodnoty

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} p(\sigma)\, \varrho_E(\sigma)\,. \tag{4.57}$$

Když tato směs elementárních výsledků leží v prostoru výsledků Ω, což znamená, že danou náhodovou hru lze normalisovat, redukuje se *normalisovaný tvar náhodové hry* v podstatě na smíšený výsledek (4.57), jehož vyhledáním je celý rozbor náhodové hry ukončen.

5. RACIONALITA PREFERENCÍ

Ordinalita preferencí

Úvodem k této kapitole si znovu připomeňme, že se matematické modely konfliktních situací budují proto, abychom mohli s jejich pomocí provádět rozbor racionálního jednání při konfliktu zájmů. Racionalitu jednání účastníka konfliktní situace budeme moci vyšetřovat formálními prostředky teprve tehdy, až se nám podaří charakterisovat v matematickém modelu konfliktní situace vlastnosti racionálního hráče. Účastníka konfliktní situace z jeho subjektivní stránky jsme matematicky popsali dvěma údaji: souhrnem těch výsledků, které hráč zahrnuje do svého subjektivního hodnocení, a systémem jeho osobních preferencí, který zachycuje kvalitativní způsob hodnocení těchto výsledků. V předcházející kapitole, věnované zčásti detailnějšímu rozboru pojmu výsledku, jsme si mimo jiné všímali, které (obecně smíšené) výsledky zahrne racionální hráč do svého hodnocení; v této kapitole budeme vyšetřovat, jaké vlastnosti musí mít kvalitativní způsob hodnocení výsledků, abychom jej mohli považovat za racionální.

Chápeme-li strategickou hru jako dvojici (4.31), jejíž první složkou je objektivní base hry a druhou složkou subjektivní base hry v obecném tvaru (4.28), představuje subjektivní charakteristika (Ω_i, U_i) hráče i $(i \in I)$, jak víme z předcházející kapitoly, matematický popis subjektivní stránky účastníka konfliktní situace. Racionální účastník, který zná subjektivní vlastnosti svých protivníků v dané konfliktní situaci, dovede analysovat konflikt nejenom ze svého hlediska, nýbrž i z hlediska každého ze spoluhráčů. Jsou-li všichni účastníci konfliktní situace racionální, projeví se právě vyslovený požadavek na jejich racionalitu, jak jsme si povšimli v minulé kapitole, v platnosti vztahu $\Omega_i = \Omega$ pro všechna $i \in I$, který vyjadřuje symetrii v jejich vzájemném postavení: racionální účastníci si mohou navzájem vyměnit ve hře svá „místa“ a analysa konfliktu se tím nezmění. Symbol Ω přitom označuje prostor výsledků, na němž je definováno preferenční schéma hry, čímž přejdeme k matematickému modelu konfliktní situace, který lze vyjádřit ve tvaru čtveřice (4.3), na který se nadále omezíme.

Zopakujme si ještě v termínech obecného modelu (4.31), že první složku subjektivní charakteristiky, tj. množinu Ω_i, hráče i co do jeho racionality v hodnocení jsme rozebírali v předešlé kapitole a že v této kapitole se budeme zabývat druhou složkou subjektivní charakteristiky hráče i, totiž systémem preferencí U_i.

Ve strategické hře dané jako čtveřice (4.3) představuje prostor výsledků Ω součást subjektivní base (4.30), tedy tu množinu smíšených výsledků, v níž jsou definovány systémy preferencí všech hráčů. Pro dané $i \in I$ je U_i systém preferencí hráče i, tedy některá totální relace v prostoru výsledků Ω. Použijeme-li symboliky zavedené v první kapitole, snadno zjistíme, že totálnost relace U_i znamená, že pro každou dvojici výsledků $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ v prostoru Ω je splněn právě jeden vztah ze tří možných:

$$\omega^{(1)} \succ_i \omega^{(2)}, \quad \omega^{(1)} \sim_i \omega^{(2)}, \quad \omega^{(1)} \prec_i \omega^{(2)}.$$

Při kvalitativním hodnocení výsledků jsou mezi sebou srovnávány z hlediska osobních preferencí daného hráče dvojice výsledků. Porovnejme spolu z hlediska preferencí hráče i trojici výsledků $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ ležících v prostoru Ω. Pokud nejsou některé z těchto výsledků mezi sebou indiferentní, pak mohou nastat v podstatě jenom dva případy: buď platí současně

(5.1) $$\omega^{(1)} \succ_i \omega^{(2)}, \quad \omega^{(2)} \succ_i \omega^{(3)}, \quad \omega^{(1)} \succ_i \omega^{(3)},$$

nebo platí

(5.2) $$\omega^{(1)} \succ_i \omega^{(2)}, \quad \omega^{(2)} \succ_i \omega^{(3)}, \quad \omega^{(1)} \prec_i \omega^{(3)};$$

aby totiž byly splněny v obou případech první dva vztahy, k tomu stačí případně přečíslování výsledků v dané trojici (rozumí se tím záměna horních indexů).

První případ můžeme charakterisovat slovy, že hráč i z daných tří výsledků subjektivně hodnotí výsledek $\omega^{(1)}$ nejvýše a výsledek $\omega^{(3)}$ nejníže; pravíme, že daná trojice výsledků tvoří *škálu*:

$$\omega^{(1)} \succ_i \omega^{(2)} \succ_i \omega^{(3)}.$$

Druhý případ má cyklický charakter. Abychom to nahlédli, vyjděme pro jednoduchost z normálního tvaru hry a předpokládejme, že hráč i má možnost zcela ovlivnit výsledek tak, že když zvolí strategii $a_i^{(j)} \in A_i$, pak nastane právě výsledek $\omega^{(j)}$ pro $j = 1, 2, 3$, ať ostatní hráči volí své strategie jakkoli. Učiňme ještě předpoklad, že hráč i nemá k disposici žádné další strategie, tudíž

$$A_i = \{a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, a_i^{(3)}\}.$$

Jestliže se hráč i rozhoduje při své volbě nejdříve mezi strategiemi $a_i^{(2)}$, $a_i^{(3)}$, pak podle (5.2) zavrhne ve smyslu principu motivace jednání strategii $a_i^{(3)}$. Po vyloučení strategie $a_i^{(3)}$ se hráč i rozhodne mezi strategiemi $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$ na základě téhož principu podle (5.2) pro strategii $a_i^{(1)}$, neboť po vyloučení strategie $a_i^{(2)}$ žádnou další alternativu nemá. Tím hráč i dosáhne podle našeho předpokladu výsledku $\omega^{(1)}$, který vzhledem k platnosti posledního vztahu v (5.2) oceňuje níže než výsledek $\omega^{(3)}$, jehož by mohl dosáhnout volbou strategie $a_i^{(3)}$. K obdobným závěrům dospějeme, vyjdeme-li při volbě strategie podle hořejšího postupu od některé jiné dvojice strategií. Je tomu tak ovšem proto, že daná trojice výsledků tvoří podle (5.2) tzv. *cyklus*:

$$\omega^{(1)} \succ_i \omega^{(2)} \succ_i \omega^{(3)} \succ_i \omega^{(1)} ;$$

vidíme tedy, že systém preferencí hráče i nedává pro případ cyklu možnost vybrat v dané trojici výsledek, který by byl hráčem hodnocen nejvýše.

Z provedené úvahy vyplývá, že systém preferencí racionálního hráče bude muset vyhovět přirozenému požadavku, aby neobsahoval cykly shora uvedeného tvaru. Systém preferencí, který neobsahuje žádné cykly, se nazývá *ordinální*. Bude tedy minimálním požadavkem na racionalitu v hodnocení výsledků, aby systém preferencí racionálního hráče byl ordinální.

Oprávněnost právě uvedeného požadavku ihned nahlédneme, když si znovu připomeneme, v čem tkví racionalita účastníka konfliktní situace. Racionální hráč musí být schopen úplného rozboru konfliktní situace, zvláště pak musí mít schopnost rozpoznat důsledky svého vlastního jednání. Subjektivní postoj k důsledkům vlastního jednání vyjádřený osobními preferencemi musí racionálnímu hráči umožnit provést volbu takového vlastního jednání, jehož důsledky by byly pro něho nejpříznivější: jenom takové jednání lze považovat za „rozumné". Provedení volby rozumného jednání v naznačeném smyslu nutně předpokládá, aby byl racionální hráč schopen v každé skupině výsledků vyznačit ten, který považuje pro sebe za nejpříznivější. Jinými slovy, racionální hráč musí být schopen sestavit z každé (rozumí se konečné) skupiny výsledků, pokud nejsou žádné dva z nich pro něho indiferentní, škálu sestupující od nejvýše hodnoceného výsledku k výsledku hodnocenému nejníže.

Má-li systém preferencí vlastnost, že lze každou konečnou množinu výsledků ležících v prostoru Ω, z nichž žádné dva nejsou navzájem indiferentní, sestavit ve škálu, nazýváme takový systém preferencí stručně *preferenční stupnice*. Ordinalita systému preferencí je nutným předpokladem k tomu, aby systém preferencí tvořil preferenční stupnici; jinak řečeno, každá preferenční stupnice je již ordinálním systémem preferencí. Lze snadno ukázat, že také obráceně každý ordinální systém preferencí již tvoří preferenční stupnici.

Poznámka. Relace R v množině X je podle definice transitivní, když z platnosti vztahů $x_1 R x_2$ a $x_2 R x_3$ plyne platnost vztahu $x_1 R x_3$ pro každou trojici x_1, x_2, x_3 prvků v X. Relace R v množině X se nazývá totální uspořádání v X, když R je totální a zároveň transitivní relace v X.

Vyslovíme nyní definici preferenční stupnice zcela precisně. Libovolnou totální relaci v prostoru výsledků Ω, která je transitivní, nazýváme *preferenční stupnice*. Tedy preferenční stupnice je systém preferencí, který má vlastnost, že je transitivní.

Je zvykem nazývat systém preferencí, který je transitivní, ordinálním systémem preferencí. Jinými slovy, systém preferencí U je *ordinální* (neboli tvoří preferenční stupnici), jestliže splňuje podmínku: když $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ jsou výsledky v prostoru Ω, přičemž $\omega^{(1)} U \omega^{(2)}$, $\omega^{(2)} U \omega^{(3)}$, pak $\omega^{(1)} U \omega^{(3)}$. Je tedy ordinální systém preferencí totální uspořádání v prostoru výsledků Ω.

Jak ihned nahlédneme, je systém preferencí U_i hráče i $(i \in I)$ ve smyslu právě uvedené definice ordinální, když a jen když si platnost prvních dvou vztahů v (5.1) vynucuje platnost třetího vztahu uvedeného v (5.1) pro každou trojici výsledků $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ z prostoru Ω; tudíž případ (5.2) nemůže nastat pro žádnou trojici výsledků. V systému preferencí hráče i se v tomto případě nemohou vyskytnout žádné trojčlenné a tedy ani vícečlenné cykly. Skupiny tří i více výsledků lze pak vždy sestavit ve škálu; např. když prostor výsledků obsahuje všechny elementární výsledky, tj. $E \subset \Omega$, přičemž $|E| = k$, potom lze ve (4.11) zvolit očíslování elementárních výsledků tak, že vytvoří sestupnou škálu o k členech

$$e_1 \succsim_i e_2 \succsim_i \dots \succsim_i e_k \tag{5.3}$$

ve smyslu relace slabé preference, která se rozpadá na úseky (případně jednočlenné) navzájem indiferentních výsledků.

Abychom správně porozuměli pojetí racionality při hodnocení výsledků v rámci formálního popisu konfliktu, vraťme se znovu k pojmu hráče ze stanoviska matematického modelu konfliktní situace representovaného čtveřicí (4.3). *Globální charakteristiku hráče i $(i \in I)$* ve strategické hře (4.3) představuje dvojice (A_i, U_i), jejíž první člen popisuje hráče i po objektivní stránce jeho možnostmi zasahování do konfliktu, kdežto druhý člen popisuje hráče i z jeho subjektivní stránky; symbol A_i ovšem označuje prostor strategií hráče i, přičemž ve hře s pravidly v rozvinutém tvaru jde o rozvinuté strategie. V duchu toho, co jsme řekli v dřívějších kapitolách, můžeme pojem hráče interpretovat jako skupinu individuí, která koordinovaně zasahuje do konfliktní situace a pro kterou vnější pozorovatel analysující konflikt může o každé dvojici výsledků podat údaj, zda skupina jako celek dá přednost jednomu z obou výsledků a kterému z nich, nebo zda skupina je mezi oběma výsledky indiferentní.

V poslední formulaci jsme dospěli k obecnější interpretaci systému preferencí hráče participujícího na dané konfliktní situaci: preferenční vztah mezi dvěma výsledky pro určitého hráče vyplývá z objektivní analysy postoje, který k těmto výsledkům zaujímá skupina subjektů pojatá jako jeden hráč.

Z úvah provedených v této kapitole plyne, že hráč, kterého považujeme za racionálního, bude subjektivně hodnotit výsledky podle některé preferenční stupnice. Avšak pojem hráče, jak je formálně vyjádřen globální charakteristikou (A_i, U_i) pro $i \in I$, je tak obecný, že není vyloučena možnost velmi reálných konfliktních situací, v nichž je některý z hráčů tvořen skupinou vysoce inteligentních osob a přesto jeho přirozený systém preferencí netvoří preferenční stupnici: to znamená, že se skupina jako celek jeví jako neracionální. Uvedeme si nyní příklad konfliktní situace, v níž vystupuje hráč představovaný skupinou racionálních jedinců, který hodnotí výsledky neracionálně, totiž tak, že se v jeho systému preferencí vyskytuje cyklus tvaru (5.2); zvolený příklad, i když odráží velmi konkrétní situaci, je pro naše účely značně zjednodušen, abychom mohli provést jeho rozbor elementárními prostředky.

Příklad. Sněmovně jsou předloženy k projednání tři varianty zákona. Předpokládejme, že se sněmovna rozpadá na tři stejně početné skupiny poslanců. První skupina podporuje přijetí varianty A a v případě jejího zamítnutí nebo neprojednávání bude podporovat přijetí varianty B proti variantě C. Druhá skupina podporuje přijetí varianty B a v případě jejího zamítnutí nebo neprojednávání bude podporovat přijetí varianty C proti variantě A. Třetí skupina podporuje přijetí varianty C a v případě jejího zamítnutí nebo neprojednávání podpoří variantu A proti variantě B.

Jednání sněmovny řídí její předseda, který má právo určovat procedurální postup při hlasování o navrhovaných předlohách zákona. Předseda jako člen sněmovny má také svůj názor na předložené varianty zákona, který může projevit při hlasování, a tedy podle učiněných předpokladů patří právě do jedné ze tří popsaných skupin.

Studujme popsaný případ jako konflikt mezi dvěma hráči, z nichž první hráč je předseda a druhý hráč je sněmovna jako celek, tj. všichni poslanci včetně předsedy; tedy druhý hráč je představován skupinou individuí, mezi něž patří první hráč. Předseda jako první hráč zasahuje do konfliktní situace volbou procedurálního postupu, kdežto sněmovna jako druhý hráč zasahuje do konfliktu hlasováním svých členů; předseda je v konfliktní situaci činný jednou v úloze prvního hráče a podruhé v úloze agenta druhého hráče.

Když učiníme předpoklad, že předseda nedá hlasovat o všech třech předlohách zákona současně, pak jednání sněmovny o navrhovaných předlohách může skončit jen buď přijetím varianty A, nebo přijetím varianty B, nebo přijetím varianty C. Označme $\omega^{(1)}$ výsledek, že bude přijata varianta A, $\omega^{(2)}$ výsledek, že bude přijata varianta B, a konečně $\omega^{(3)}$ výsledek, že bude přijata varianta C.

Jak je v této hře, kterou popisujeme, vyjádřen konflikt zájmů? Zájem prvního hráče — předsedy — vyplývá z jeho příslušnosti k jedné ze tří názorových skupin. Při analyse postoje, který má k výsledkům druhý hráč, uvažujeme takto: Kdybychom dali sněmovně hlasovat současně o variantě A a B, pak podle hořejších předpokladů bude první skupina poslanců hlasovat pro variantu A, kdežto druhá početně stejně silná skupina bude hlasovat pro variantu B; rozhodující hlasy odevzdá třetí skupina, která dá přednost variantě A před variantou B. Varianta A by tak získala 2/3 hlasů, kdežto varianta B jenom zbývající 1/3 hlasů. Sněmovna se jako hráč chová tak, že preferuje variantu A proti variantě B. Podobně analysujeme postoj druhého hráče k výsledkům ve zbývajících dvou případech.

Přejdeme k formálnímu popisu vyšetřované konfliktní situace. Jde o strategickou hru o dvou hráčích, které jsme očíslovali ve smyslu vztahu (1.1), přičemž prostor výsledků se skládá ze tří výsledků shora popsaných, jež jsou vesměs elementární a na něž jsme se mlčky omezili; máme tedy

$$I = \{1, 2\}, \quad \Omega = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}\}.$$

Z provedeného rozboru vyplyne, že systém preferencí U_i pro $i = 2$, tj. systém preferencí druhého hráče – sněmovny, je definován vztahy (5.2), takže výsledky tvoří cysklus

$$\omega^{(1)} \succ_2 \omega^{(2)} \succ_2 \omega^{(3)} \succ_2 \omega^{(1)} .$$

Budeme-li pro určitost předpokládat, že předseda patří do první názorové skupiny, znamená to, že systém preferencí U_i pro $i = 1$ je definován vztahy (5.1), takže výsledky vytvoří škálu

$$\omega^{(1)} \succ_1 \omega^{(2)} \succ_1 \omega^{(3)} .$$

Tím jsme zatím matematicky popsali první tři základní údaje o konfliktní situaci, z nichž poslední bylo preferenční schéma hry, které ukazuje, že první hráč má preferenční stupnici, kdežto druhý hráč — sněmovna — nemá ordinální systém preferencí; sněmovna pojatá jako hráč se nechová při hodnocení výsledků racionálně.

Přistoupíme k popisu pravidel hry. Omezíme se pro jednoduchost na případ, že bude použito následujícího procedurálního postupu: Předseda předloží k hlasování některou z daných tří variant a v případě, že je předložená varianta zamítnuta, dá hlasovat současně o obou zbývajících variantách. Pravidla hry popíšeme v rozvinutém tvaru. Ježto tu zřejmě jde o strategickou hru s úplnou informací a bez náhodových tahů, budou mít pravidla hry tvar (2.1), který jsme studovali již ve druhé kapitole.

Označuje-li $z^{(0)}$ stav konfliktní situace před zahájením jednání ve sněmovně, pak podle předpokladu jest

$$\Gamma z^{(0)} = \{z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}\} ,$$

kde $z_j^{(1)}$ označuje stav konfliktu v okamžiku, kdy předseda předloží k hlasování variantu v pořadí j-tou; přitom je smluvené pořadí variant: A první, B druhá, C třetí. Dále máme

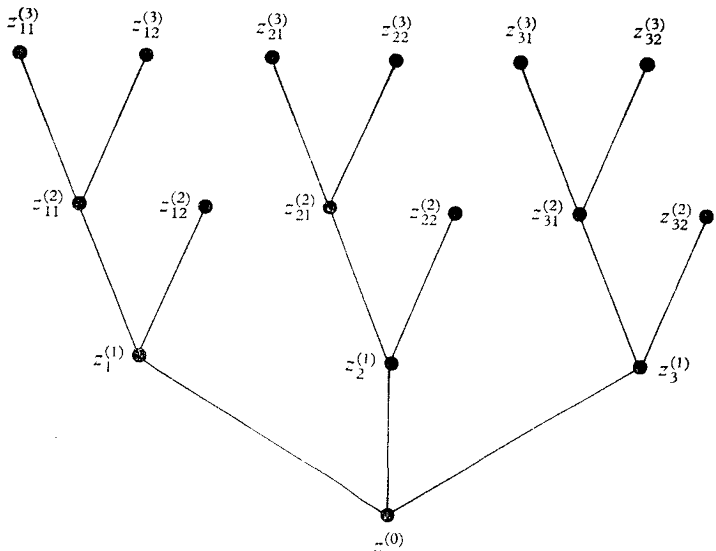
$$\Gamma z_j^{(1)} = \{z_{j1}^{(2)}, z_{j2}^{(2)}\} , \quad j = 1, 2, 3 ,$$

kde $z_{j1}^{(2)}$ představuje stav konfliktu po zamítnutí j-té varianty a $z_{j2}^{(2)}$ stav konfliktu po jejím přijetí. Nakonec klademe

$$\Gamma z_{j1}^{(2)} = \{z_{j1}^{(3)}, z_{j2}^{(3)}\} , \quad j = 1, 2, 3 ,$$

kde $z_{j1}^{(3)}$ je stav konfliktu po přijetí $(j + 1)$-ní varianty a $z_{2j}^{(3)}$ je stav konfliktu po přijetí $(j + 2)$-hé varianty; smluvené pořadí variant: A, B, C, A, B.

Uvedenými vztahy je definován graf posic (Z, Γ): prostor posic Z, tj. množina všech a priori možných stavů konfliktu, obsahuje 16 posic, z toho 9 výsledných, jimiž jsou posice $z_{j2}^{(2)}$, $z_{j1}^{(3)}$, $z_{j2}^{(3)}$ pro $j = 1, 2, 3$. Znázorníme-li graf posic jako útvar v rovině, v němž jsou posice representovány body a tahy orientovanými spojnicemi, ověříme si tím, že požadavky (1), (2), (3), které jsme v kapitole 2 položili na graf posic, jsou v našem případě skutečně splněny (viz obrázek: graf posic se zakresluje jako strom vyrůstající z jednoho kořene bez vyznačení orientace spojnic, jíž se rozumí směr zdola nahoru).



Přejdeme k definici výsledkové funkce $\varrho_{\mathscr{P}}$. Ježto výsledných posic je devět, obsahuje množina $\mathscr{P}$ všech partií 9 partií. Označíme-li π_j partii končící výslednou posicí $z_{j2}^{(2)}$ a π_{js} partii končící výslednou posicí $z_{js}^{(3)}$ $(s = 1, 2; j = 1, 2, 3)$, pak je výsledková funkce pro rozvinutý tvar definována v našem případě vztahy

$$\varrho_{\mathscr{P}}(\pi_j) = \omega^{(j)}, \quad \varrho_{\mathscr{P}}(\pi_{js}) = \omega^{((j+s) \bmod 3)},$$

kde jsme položili

$$(j + s) \bmod 3 = j + s \quad \text{pro} \quad j + s \leqq 3,$$

$$(j + s) \bmod 3 = j + s - 3 \quad \text{pro} \quad j + s > 3; \quad s = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

Nakonec index tahu θ je pro naši strategickou hru definován rovnicemi

$$\theta(z^{(0)}) = 1, \quad \theta(z) = 2 \quad \text{pro} \quad z \neq z^{(0)} \quad (z \in Z);$$

v této definici jsme použili konvence, že v každé výsledné posici je hráčem na tahu druhý hráč.

Tím jsou pravidla naší hry s úplnou informací matematicky popsána jako trojice (2.1). Dokončili jsme tak matematický popis námi vyšetřované konfliktní situace jako strategické hry dané čtveřicí (4.3) resp. (2.2). Všimněme si, že prostor ryzích výsledků dané hry (srovn. definici (4.7)) je identický s daným prostorem výsledků Ω, který zároveň tvoří prostor elementárních výsledků; ve znacích:

$$\Omega_{\mathscr{P}}^{(0)} = \Omega = E.$$

Snadno nahlédneme, že první hráč — předseda — docílí za daných předpokladů pro sebe nejžádoucnějšího výsledku $\omega^{(1)}$, když zvolí jako svou alternativu posici $z_3^{(1)}$. Při prvním hlasování sněmovna zamítne variantu C a při druhém hlasování varianta A na sebe soustředí větší počet hlasů než varianta B. Tudíž předseda za daného rozložení sil ve sněmovně docílí volbou vhodného procedurálního postupu přijetí té varianty zákona, kterou sám chce. Poznamenejme ještě, že neracionalita druhého hráče se mimo jiné projevuje v jeho neschopnosti volit alternativy $z_{j2}^{(2)}$ ($j = 1, 2, 3$).

Kardinalita preferencí

V dalším vyšetřování se omezíme na studium jen takových konfliktních situací, jejichž účastníci se řídí ve svém jednání každý některou preferenční stupnicí, což je minimální požadavek na jejich racionalitu. V předcházející kapitole jsme zdůvodnili, že racionální hráč zahrnuje do svého subjektivního hodnocení každou směs ryzích výsledků (srovn. podmínku (R) v kapitole 4), neboť o každé z nich musí předpokládat, že se může vyskytnout při rozboru důsledků jeho vlastního jednání. Ukázali jsme rovněž, že pro racionálního hráče je nejvýhodnější prostě zahrnout do svého systému preferencí všechny smíšené výsledky (srovn. (4.27)).

Proto od tohoto okamžiku učiníme v dalším vyšetřování racionality hráčů při hodnocení výsledků předpoklad, že prostor výsledků je totožný s prostorem všech smíšených výsledků, tj.

$$\Omega = \Omega_E \, . \tag{5.4}$$

Racionální hráč se může omezit na hodnocení jenom ryzích výsledků v jediném případě, kdy všichni hráči mají během konfliktu úplnou informaci, přičemž v konfliktní situaci nepůsobí žádné náhodné vlivy. Výjimku tedy tvoří strategická hra s úplnou informací a bez náhodových tahů. V takové hře jsou všechny ryzí výsledky podle předpokladů učiněných v kapitole 4 (srovn. podmínku (4.38)) již elementární. Z podobných důvodů, které vedli k podmínce (5.4), se pro takovou hru obyčejně předpokládá, že systém preferencí každého hráče je definován pro všechny elementární výsledky; tento předpoklad lze vyjádřit rovností: $\Omega = E$. V našem příkladě o hlasování ve sněmovně, který jsme pojali jako strategickou hru s úplnou informací bez náhodových tahů, považujeme prvního hráče co do hodnocení výsledků za racionálního, neboť poslední rovnost je splněna. V každém jiném případě budeme požadovat pro racionální hráče splnění podmínky (5.4).

Nechť pro $i \in I$ je U_i ordinální systém preferencí hráče i, tj. preferenční stupnice. Buďte ω' a ω'' dva různé smíšené výsledky takové, že hráč i preferuje první proti druhému: $\omega' \succ_i \omega''$. Pro směs výsledků ω' a ω'' v poměru $\lambda : (1 - \lambda)$, kde $0 < \lambda < 1$, mohou nastat právě tři navzájem se vylučující případy, a to buď

$$\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \succsim_i \omega' \, , \quad \text{nebo} \quad \omega'' \succsim_i \lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \, , \tag{5.5}$$

nebo

$$\omega' \succ_i \lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \succ_i \omega'' \tag{5.6}$$

(srovn. (4.9)), jak plyne z toho, že U_i je preferenční stupnice. Směs výsledků (4.9) lze interpretovat, jak víme, jako náhodný pokus, při jehož provedení nastane výsledek ω' s pravděpodobností λ a výsledek ω'' s pravděpodobností $(1 - \lambda)$. Při obvyklé (tzv. statistické) interpretaci pojmu pravděpodobnosti to znamená, že v dlouhé sérii nezávislých pokusů nastane výsledek ω' přibližně v $100\lambda\%$ případů a výsledek ω'' v $100(1 - \lambda)\%$ případů. U racionálního hráče nelze tedy očekávat, že dá přednost směsi výsledků ω' a ω'' jak před výsledkem ω', tak před výsledkem ω'', neboť taková směs fakticky znamená, že po provedení náhodného pokusu nastane buď právě výsledek ω' nebo výsledek ω''. Ježto předpokládáme, že $\lambda \neq 0$, nastane výsledek ω'' v dlouhé sérii pokusů v kladném procentu případů: protože podle předpokladu preferuje hráč i výsledek ω' proti ω'', nelze očekávat ani to, že hráč je indiferentní mezi ω' a směsí $\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega''$.

Tím jsme ukázali, že se při racionálním hodnocení výsledků nemůže vyskytnout první případ v (5.5). Zcela analogicky zdůvodníme, že racionální hodnocení není slučitelné ani s druhým případem uvedeným v (5.5). Je-li tedy hráč i racionální, může nastat jenom případ (5.6).

Přejděme nyní k vyšetřování tří smíšených výsledků. Vyloučíme-li případy indiference mezi některými z nich, které se redukují buď na právě prozkoumaný případ dvojice výsledků nebo na indiferenci mezi všemi třemi výsledky, umožní nám preferenční stupnice U_i uspořádat trojici smíšených výsledků ve škálu tvaru

$$\omega' \succ_i \omega \succ_i \omega''. \tag{5.7}$$

Budeme zkoumat všechny směsi krajních výsledků v (5.7) pro $0 < \lambda < 1$ a porovnávat je s prostředním výsledkem. Mohou nastat tři navzájem se vylučující případy: buď

$$\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \succsim_i \omega \quad \text{pro všechna } \lambda, \quad 0 < \lambda < 1\,, \tag{5.8}$$

nebo

$$\omega \succsim_i \lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \quad \text{pro všechna } \lambda, \quad 0 < \lambda < 1\,, \tag{5.9}$$

nebo

$$\text{existují } \lambda_1, \lambda_2, 0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1, \text{ taková, že} \tag{5.10}$$
$$\lambda_1\omega' + (1 - \lambda_1)\,\omega'' \succ_i \omega \succ_i \lambda_2\omega' + (1 - \lambda_2)\,\omega''.$$

Položme např. $\lambda = 0{,}01$. Při statistické interpretaci pojmu pravděpodobnosti směs výsledků $0{,}01\omega' + 0{,}99\omega''$ znamená, že v dlouhé sérii nezávislých pokusů nastane výsledek ω'' přibližně v 99% případů, kdežto výsledek ω' jenom v 1% případů; pro $\lambda = 0{,}0001$ to bude už jenom jedna desetitisícina případů, atd. Podle předpokladu (5.7) hráč i ostře preferuje výsledek ω proti ω'': kdyby platilo (5.8), znamenalo by to, že hráč i slabě preferuje proti ω i takové směsi výsledků ω' a ω'', pro něž platí, že v dlouhé sérii pokusů nastane výsledek ω'' téměř vždycky. Z této úvahy vyplývá, že od racionálního hráče nelze očekávat způsob hodnocení výsledků, který by vedl k případu (5.8). Podobně zjistíme, že se racionální hráč nebude chovat při svém hodnocení tak, že by vznikl případ (5.9). Tudíž pro racionálního hráče i musí být splněna podmínka (5.10).

Těmito úvahami jsme vedeni k následující definici. Nechť U je systém preferencí za předpokladu, že je splněna podmínka (5.4), tedy U je totální relace v prostoru smíšených výsledků Ω_E; když je systém preferencí U ordinální a splňuje požadavky:

(1) je-li $\omega' \succ \omega''$, pak $\omega' \succ \lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \succ \omega''$ $(0 < \lambda < 1)$;

(2) je-li $\omega' \succ \omega \succ \omega''$, pak pro některou dvojici λ_1, λ_2 čísel ležících mezi 0 a 1 platí, že

$$\lambda_1\omega' + (1 - \lambda_1)\,\omega'' \succ \omega \succ \lambda_2\omega' + (1 - \lambda_2)\,\omega'',$$

pro kteroukoli trojici smíšených výsledků ω, ω', ω'', potom U nazýváme *kardinální systém preferencí*; přitom symbol $\omega_1 \succ \omega_2$ znamená, že platí $\omega_1 U \omega_2$ a neplatí $\omega_2 U \omega_1$ $(\omega_1, \omega_2 \in \Omega_E)$. Místo kardinální systém preferencí se také říká *kardinální preferenční stupnice*. Je-li U_i pro dané $i \in I$ kardinální systém preferencí, pravíme, že *hráč i má kardinální preferenční stupnici.*

Tedy hráč i má kardinální preferenční stupnici, když je splněn vztah (5.4) a když U_i je preferenční stupnice, která vyhovuje podmínce (5.6) pro $0 < \lambda < 1$ a splňuje podmínku (5.10) za předpokladu, že platí (5.7). Strategickou hru, v níž má každý hráč kardinální preferenční stupnici, budeme nazývat *hra s kardinálními preferencemi.*

Jestliže hráč i má v dané strategické hře kardinální preferenční stupnici, potom již platí, že lze ke každému smíšenému výsledku ω, který leží mezi dvěma smíšenými výsledky ω' a ω'' ve smyslu preferenčních vztahů (5.7), najít číslo λ ležící mezi 0 a 1, pro které platí vztah indiference

$$\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \sim_i \omega\,. \tag{5.11}$$

Tato důležitá vlastnost kardinálního systému preferencí je důsledkem vlastností (1) a (2). Platí totiž

Teorém. *Jestliže U je kardinální systém preferencí, potom*

(3) *když* $\omega' \succ \omega \succ \omega''$ $(\omega \in \Omega_E,\ \omega' \in \Omega_E,\ \omega'' \in \Omega_E)$, *pak pro některé* λ, $0 < \lambda < 1$, *platí, že*

$$\lambda\omega' + (1 - \lambda)\,\omega'' \sim \omega\,,$$

kde symbol $\succ$ *má týž smysl jako v hořejší definici a kde vztah* $\omega_1 \sim \omega_2$ *znamená, že současně platí* $\omega_1 U \omega_2$ *a* $\omega_2 U \omega_1$ $(\omega_1, \omega_2 \in \Omega_E)$.

Obráceně, je-li U preferenční stupnice v prostoru smíšených výsledků Ω_E, která splňuje požadavky (1) a (3), pak rovněž splňuje podmínku (2), což znamená, že U je kardinální systém preferencí.

Tudíž hráč i má v dané hře kardinální preferenční stupnici, když a jen když platí (5.4) a U_i je preferenční stupnice, která vyhovuje podmínce (5.6) pro všechna λ, $0 < \lambda < 1$, a splňuje podmínku (5.11) za předpokladu, že platí (5.7), pro některé λ $(0 < \lambda < 1)$ závislé na ω.

Své vyšetřování jsme zásadně omezili jenom na konečné strategické hry, což speciálně znamená, že prostor elementárních výsledků E je konečný. Vyjděme z předpokladu, že U_i je kardinální preferenční stupnice hráče i. Potom za prvé existuje elementární výsledek e' takový, že $e' \succsim_i e$ pro každé $e \in E$, za druhé existuje elementární výsledek e'' takový, že $e'' \precsim_i e$ pro každé $e \in E$, což obojí plyne z konečnosti prostoru E, a za třetí platí

$$e' \succsim_i \omega \succsim_i e'' \quad \text{pro každé} \quad \omega \in \Omega_E \,. \tag{5.12}$$

Poslední fakt je důsledkem vlastnosti (3) kardinálního systému preferencí, neboť pak pro každé $e \in E$ lze najít λ_e takové, že

$$e \sim_i \lambda_e e' + (1 - \lambda_e)\, e''\,, \quad 0 \leqq \lambda_e \leqq 1\,,$$

takže s použitím vyjádření (4.14) dostaneme, že

$$\omega \sim_i \Big(\sum_{e \in E} \omega(e)\, \lambda_e\Big)\, e' + \Big(\sum_{e \in E} \omega(e)\, (1 - \lambda_e)\Big)\, e''\,.$$

Klademe-li

$$\lambda_\omega = \sum_{e \in E} \lambda_e\, \omega(e)\,, \tag{5.13}$$

můžeme předcházející vztah přepsat ve tvar

$$\omega \sim_i \lambda_\omega e' + (1 - \lambda_\omega)\, e'', \quad 0 \leqq \lambda_\omega \leqq 1\,, \tag{5.14}$$

z něhož plynou preferenční relace (5.12) podle vlastnosti (1) kardinality preferencí.

V naší úvaze jsme mlčky použili následující vlastnosti kardinální preferenční stupnice hráče i: když $\omega_1 \sim_i \omega_2$, $\omega'_1 \sim_i \omega'_2$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, pak

$$\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\, \omega'_1 \sim_i \lambda\omega_2 + (1 - \lambda)\, \omega'_2\,.$$

Obecněji platí za předpokladu kardinality preferencí tvrzení: když $\omega_1 \succsim_i \omega_2$, $\omega'_1 \succsim_i \omega'_2$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, pak

$$\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\, \omega'_1 \succsim_i \lambda\omega_2 + (1 - \lambda)\, \omega'_2\,.$$

Obě vyslovené vlastnosti lze ihned rozšířit na směsi většího počtu výsledků. Lze také snadno ukázat, že v (5.10) musí čísla λ_1 a λ_2 splňovat za daných předpokladů nerovnost $\lambda_1 > \lambda_2$.

Dále snadno z vlastností kardinálních preferenčních stupňic dedukujeme, že ve vztahu (5.11) je číslo λ určeno jednoznačně, a tudíž číslo λ_ω musí být vztahem (5.14) rovněž jednoznačně určeno, a to i když v (5.14) nahradíme e' a e'' výsledky s nimi indiferentními. Tím dospíváme k závěru, že ke každému smíšenému výsledku ω existuje právě jedno číslo λ_ω, pro které platí relace (5.14), přičemž jest

$$\lambda_{\omega_1} > \lambda_{\omega_2}, \quad \text{když a jen když} \quad \omega_1 \succ_i \omega_2,$$

$$\lambda_{\omega_1} = \lambda_{\omega_2}, \quad \text{když a jen když} \quad \omega_1 \sim_i \omega_2$$

pro kterékoli dva smíšené výsledky ω_1 a ω_2.

Užitek

Systém preferencí určitého hráče v dané konfliktní situaci vyjadřuje *kvalitativní* hodnocení výsledků ze subjektivního hlediska tohoto hráče. Položme si otázku, zda vůbec a za jakých podmínek může hráč přejít od kvalitativního hodnocení výsledků k hodnocení *kvantitativnímu*. Má-li hráč representovat systém svých osobních preferencí kvantitativně, znamená to, že musí přiřadit každému relevantnímu výsledku číslo, které numericky ohodnocuje jeho preference v tom smyslu, že žádanějšímu výsledku přiřazuje vyšší hodnotu, kdežto výsledku méně žádoucímu přiřazuje hodnotu nižší.

Je-li v dané strategické hře U_i pro $i \in I$ systém preferencí hráče i, plyne z předcházející úvahy, že kvantitativní representace systému preferencí U_i bude vyjádřena číselnou funkcí, označme ji u_i, která přiřazuje každému výsledku ω z prostoru Ω reálné číslo $u_i(\omega)$ takovým způsobem, aby byla splněna podmínka:

$$(5.15) \qquad u_i(\omega) > u_i(\omega'), \quad \text{když a jen když} \quad \omega \succ_i \omega'$$

pro $\omega, \omega' \in \Omega$. Všimněme si, že funkce u_i bude mít v důsledku platnosti podmínky (5.15) již také další žádoucí vlastnost, že pro $\omega, \omega' \in \Omega$

$$u_i(\omega) = u_i(\omega'), \quad \text{když a jen když} \quad \omega \sim_i \omega'.$$

Vraťme se k otázce, je-li takový kvantitativní popis systému preferencí, charakterisovaný vlastností (5.15), opravdu možný. Učiňme předpoklad, že systém preferencí U_i obsahuje cyklus typu (5.2). Kdyby existovala funkce u_i s vlastností (5.15), obdrželi bychom podle (5.2) soustavu nerovností

$$u_i(\omega^{(1)}) > u_i(\omega^{(2)}) > u_i(\omega^{(3)}) > u_i(\omega^{(1)}),$$

které v sobě obsahují spor: není tedy v tomto případě kvantitativní representace systému preferencí možná. Odtud soudíme, že nutným požadavkem k tomu, aby byl kvantitativní popis systému preferencí vůbec možný, je ordinalita systému preferencí. Řekněme však hned, že skutečnost, že hráč má preferenční stupnici, nikterak nezaručí existenci kvantitativní representace v hořejším smyslu.

Vyšetříme proto nejprve speciální případ, kdy se prostor výsledků skládá právě ze všech elementárních výsledků: $\Omega = E$. Snadno se přesvědčíme, že v takovém případě vždycky existuje kvantitativní popis u_i preferenční stupnice U_i hráče i $(i \in I)$ splňující podmínku (5.15). Např. když prostor E je dán výčtem svých prvků podle (4.11), kde $|E| = k$, přičemž tyto prvky tvoří škálu tvaru (5.3), potom stačí položit

$$u_i(e_j) = \lambda_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

kde λ_j jsou libovolně zvolená reálná čísla, která ovšem musí vyhovovat zřejmým požadavkům, aby totiž

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_k\,, \tag{5.16}$$

$$\text{přičemž} \quad \lambda_j = \lambda_l\,, \quad \text{když a jen když} \quad e_j \sim_i e_l \quad (j, l = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Obecněji lze říci, že kvantitativní representace existuje pro jakoukoli preferenční stupnici, je-li prostor výsledků konečný. Není-li prostor výsledků konečný, nelze otázku existence obecně zodpovědět. Existuje-li však aspoň jeden kvantitativní popis u_i preferenční stupnice U_i hráče i v prostoru výsledků Ω splňující požadavky (5.15), pak jich ovšem existuje nekonečně mnoho: když f je některá rostoucí reálná funkce jedné reálné proměnné, pak také funkce u'_i definovaná vztahem

$$u'_i(\omega) = f(u_i(\omega))\,, \quad \omega \in \Omega_E\,, \tag{5.17}$$

je rovněž kvantitativní popis preferenční stupnice U_i.

Poznámka. Připomeňme, že reálná funkce jedné reálné proměnné je definována jako zobrazení množiny R^1 do sebe, kde R^1 označuje množinu všech reálných čísel (srovn. označení R^k zavedené v předcházející kapitole). Reálná funkce jedné reálné proměnné, označme ji symbolem f, je rostoucí, když platí, že $f(x_1) > f(x_2)$ pro $x_1 > x_2$; $x_1, x_2 \in R^1$.

Budeme nyní blíže studovat případ, kdy prostor výsledků Ω není konečný, takže nutně obsahuje neelementární výsledky, které tedy vzniknou podle (4.14) smíšením elementárních výsledků. Pro jednoduchost předpokládejme, že neelementární výsledek ω ležící v prostoru Ω je směsí elementárních výsledků e_1 a e_2, tedy

$$\omega = \lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2 \tag{5.18}$$

pro některé λ, $0 < \lambda < 1$. Víme, že smíšený výsledek ω lze interpretovat jako náhodný pokus, který v dlouhé sérii opakování dá výsledek e_1 přibližně v $100\lambda\%$ případů a výsledek e_2 v $100(1 - \lambda)\%$ případů. Předpokládejme, že preferenční stupnici daného hráče i lze kvantitativně representovat ve smyslu podmínky (5.15) a že u_i je některý kvantitativní popis preferenční stupnice U_i. Potom můžeme tvrdit, že v dlouhé sérii opakování náhodného pokusu charakterisovaného smíšeným výsledkem ω je hodnocen dosažený výsledek pokusu číslem $u_i(e_1)$ přibližně v $100\lambda\%$ případů a číslem $u_i(e_2)$ v $100(1 - \lambda)\%$ případů; přitom náhodný pokus sám je ohodnocen číslem $u_i(\omega)$. Ptáme se, zdali je mezi uvedenými třemi čísly nějaká souvislost.

Tato otázka úzce souvisí s problémem kvantitativního hodnocení výsledků v sérii sehraných partií jedné a téže strategické hry. Připusťme, že hráč i sehraje dvě po sobě jdoucí partie dané hry. Je-li výsledek první partie ω_1 a výsledek druhé partie ω_2, pak podle našeho předpokladu bude výsledek první partie hráčem i numericky ohodnocen číslem $u_i(\omega_1)$ a výsledek druhé partie číslem $u_i(\omega_2)$. Vzniká problém, zda hráč i smí hodnotit celkový výsledek z obou partií součtem $u_i(\omega_1) + u_i(\omega_2)$. Odpověď je, jak hned prozradíme, pro celou řadu typů preferenčních stupnic negativní; je-li odpověď positivní pro daný kvantitativní popis u_i, může být negativní pro jiný kvantitativní popis téže preferenční stupnice, jak nahlédneme ze vztahu (5.17), resp. jak uvidíme v dalším.

Obraťme otázku a hledejme podmínky, za nichž je součtový způsob celkového hodnocení výsledků z více partií přípustný. Vyjděme z předpokladu, že hráč i hodnotí celkový výsledek z N po sobě jdoucích partií, z nichž j-tá končí výsledkem $\omega_j \in \Omega$ $(j = 1, 2, \dots, N)$, číslem

$$u_i(\omega_1) + u_i(\omega_2) + \dots + u_i(\omega_N)\,.$$

Aplikujeme-li tento princip hodnocení na sérii N opakování náhodného pokusu vyjádřeného vztahem (5.18), pak pro velké N bude podle předcházejících úvah celkový výsledek ohodnocen číslem přibližně rovným součtu

$$\lambda N\, u_i(e_1) + (1 - \lambda)\, N\, u_i(e_2)\,,$$

a to, jak plyne ze zákona velkých čísel, tím přesněji, čím je N větší. Na druhé straně $u_i(\omega)$ představuje hodnocení výsledku ω, a tedy v sérii N po sobě jdoucích partií, z nichž každá skončí smíšeným výsledkem ω, bude hráč i hodnotit podle součtového principu celkový výsledek číslem $N\, u_i(\omega)$. Dostaneme tak, že pro velká N musí platit přibližně rovnost

$$N\, u_i(\omega) = N(\lambda\, u_i(e_1) + (1 - \lambda)\, u_i(e_2))\,.$$

Podle zákona velkých čísel s N rostoucím neomezeně přejde tato přibližná rovnost po vykrácení číslem N ve striktní rovnost

$$u_i(\omega) = \lambda\, u_i(e_1) + (1 - \lambda)\, u_i(e_2)\,. \tag{5.19}$$

Z hořejšího předpokladu o aditivním hodnocení jsme tedy dospěli k závěru, že kvantitativní popis u_i systému preferencí U_i musí splňovat rovnost (5.19): když ji nesplňuje, pak hráč i není oprávněn hodnotit po sobě jdoucí výsledky z opakovaných partií součtově.

Učiňme předpoklad, že je splněna podmínka (5.4): pro danou hru leží každý smíšený výsledek v prostoru výsledků. Z předpokladu o součtovém způsobu celkového hodnocení výsledků po sobě jdoucích partií dané hry lze pak odvodit zcela stejným postupem platnost obecnějšího vztahu

$$u_i(\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\,\omega_2) = \lambda u_i(\omega_1) + (1 - \lambda)\,u_i(\omega_2) \tag{5.20}$$

pro kteroukoli dvojici ω_1, ω_2 smíšených výsledků a pro $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

Předcházejícími úvahami jsme vedeni k této obecné definici: Je-li U systém preferencí v prostoru smíšených výsledků Ω_E a je-li u funkce přiřazující každému smíšenému výsledku ω reálné číslo $u(\omega)$, která pro $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_E$ vyhovuje požadavkům

(1) $u(\omega_1) > u(\omega_2)$, když a jen když $\omega_1 \succ \omega_2$;

(2) pro každé λ, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, platí rovnost

$$u(\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\,\omega_2) = \lambda\, u(\omega_1) + (1 - \lambda)\,u(\omega_2)\,,$$

potom u nazýváme *užitková funkce pro systém preferencí U.* Užitková funkce pro systém preferencí U_i hráče i $(i \in I)$ v dané strategické hře se nazývá stručněji ***užitková funkce hráče i.*** Užitková funkce hráče i je tedy takové zobrazení u_i prostoru Ω_E do prostoru reálných čísel R^1, které splňuje podmínky (5.15) a (5.20) pro jakékoli smíšené výsledky ω, ω', ω_1, ω_2 a pro $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

Hodnotu $u_i(\omega)$ užitkové funkce u_i hráče i pro smíšený výsledek ω interpretujeme jako ***užitek,*** který hráči i přináší dosažení výsledku ω. Vlastnost (5.15) užitkové funkce zachycuje skutečnost, že užitek representuje kvantitativně hráčovy preference. Vlastnost (5.20) užitkové funkce je z hlediska statistické interpretace pravděpodobnosti jenom odlišným vyjádřením požadavku, aby celkový užitek z výsledků dosažených v sérii partií dané hry byl součtem jednotlivých užitků docílených v každé partii zvlášť; jinak řečeno, rovnost (5.20) je pravděpodobnostním vyjádřením toho, že užitek je *aditivní veličina.*

Z rovnosti (5.20) lze odvodit vztah značně obecnější: Je-li λ rozložení pravděpodobnosti na konečné neprázdné množině B a je-li $\{\omega_\beta\}_{\beta \in B}$ jednoparametrová soustava smíšených výsledků, pak pro smíšení této soustavy podle daného rozložení platí rovnost

$$u_i\left(\sum_{\beta \in B} \lambda(\beta)\,\omega_\beta\right) = \sum_{\beta \in B} \lambda(\beta)\,u_i(\omega_\beta)\,; \tag{5.21}$$

srovn. (4.13). Jako speciální případ posledního vztahu dostaneme podle (4.14) rovnost

$$u_i(\omega) = \sum_{e \in E} \omega(e)\,u_i(e)\,, \quad \omega \in \Omega_E\,. \tag{5.22}$$

Z této rovnosti ihned vyplývá důležitý fakt, že užitková funkce je jednoznačně určena již svými hodnotami na prostoru elementárních výsledků: známe-li hodnotu užitkové funkce pro každý elementární výsledek, vypočteme její hodnotu pro libovolný smíšený výsledek podle formule (5.22).

Poznámka. Je-li (X, p) konečný pravděpodobnostní prostor a je-li f číselná funkce na množině X, nazývá se číslo $\sum_{x \in X} p(x) f(x)$ střední hodnota funkce f.

Značí-li u_i^* redukci užitkové funkce u_i na prostor elementárních výsledků E, tj. u_i^* zobrazuje prostor E do prostoru R^1 tak, že $u_i^*(e) = u_i(e)$ pro $e \in E$, pak pro $\omega \in \Omega_E$ vztah (5.22) vyjadřuje, že číslo $u_i(\omega)$ je střední hodnota funkce u_i^* na pravděpodobnostním prostoru (E, ω). Vztah (5.22) se proto nazývá *hypotéza o středním užitku*. Protože všechny tři vztahy (5.20), (5.21) a (5.22) jsou navzájem ekvivalentní, je zvykem kterýkoli z nich nazývat hypotézou o středním užitku. Shrnujeme tedy, že kvantitativní representace systému preferencí představuje užitkovou funkci, když a jen když splňuje hypotézu o středním užitku.

Předpokládejme nyní, že v dané hře lze pro hráče i najít užitkovou funkci u_i, tj. takový kvantitativní popis jeho systému preferencí, který vyhovuje hypotéze o středním užitku. Jak víme, musí být systém preferencí U_i hráče i nutně ordinální. Rozborem vztahu (5.20) se můžeme přesvědčit, že za našeho předpokladu musí být systém preferencí U_i nutně kardinální. Jinými slovy, *když ve strategické hře existuje užitková funkce hráče i, je systém preferencí hráče i kardinální.* Tudíž kardinalita systému preferencí je nutným předpokladem existence užitkové funkce. Nemá-li hráč kardinální systém preferencí, není oprávněn numericky hodnotit výsledek ze série sehraných partií součtově pro žádný kvantitativní popis své preferenční stupnice, i když takové kvantitativní representace existují.

Ukazuje se však, že kardinalita systému preferencí představuje také postačující podmínku pro existenci užitkové funkce:

Teorém. *Nechť U je kardinální systém preferencí. Potom existuje aspoň jedna užitková funkce pro systém preferencí U. Jsou-li $u^{(1)}$ a $u^{(2)}$ užitkové funkce pro systém preferencí U, pak lze najít reálná čísla $\alpha > 0$ a β taková, že platí rovnost*

$$u^{(2)}(\omega) = \alpha\, u^{(1)}(\omega) + \beta\,, \quad \omega \in \Omega_E\,.$$

Obráceně, je-li $u^{(1)}$ užitková funkce pro systém preferencí U, pak pro jakékoli reálné číslo $\alpha > 0$ a pro libovolné reálné číslo β je funkce $u^{(2)}$ definovaná předcházející rovností rovněž užitková funkce pro systém preferencí U.

Tudíž z předpokladu, že daný hráč i má kardinální preferenční stupnici, již vyplývá, že již má také užitkovou funkci. Jsou-li $u_i^{(1)}$ a $u_i^{(2)}$ užitkové funkce hráče i, pak podle hořejšího teorému nutně platí pro některé $\alpha > 0$ a β reálné, rovnost

$$u_i^{(2)}(\omega) = \alpha\, u_i^{(1)}(\omega) + \beta\,, \quad \omega \in \Omega_E\,. \tag{5.23}$$

Je-li u_i užitková funkce hráče i, pak podle teorému každá číselná funkce na prostoru Ω_E, která patří do třídy funkcí symbolicky vyjádřené zápisem

$$\{\alpha u_i + \beta : \alpha > 0,\ \beta \text{ reálné}\}\,, \tag{5.24}$$

představuje rovněž užitkovou funkci hráče i. Podle (5.23) to znamená, že (5.24) representuje třídu všech užitkových funkcí hráče i.

Poznamenejme, že když F označuje třídu všech rostoucích reálných funkcí jedné reálné proměnné, pak symbol

$$\{f(u_i(.)) : f \in F\}$$

představuje třídu všech číselných funkcí na prostoru smíšených výsledků, které splňují podmínku tvaru (5.15), a tedy které mohou vystupovat jako kvantitativní popis systému preferencí hráče i; srovn. (5.17). Tudíž má-li hráč kardinální preferenční stupnici, vždy existuje její kvantitativní representace; z nekonečného počtu těchto representací jsou jenom některé aditivními veličinami ve smyslu rovnosti (5.20), tj. jenom některé jsou užitkovými funkcemi.

Poznámka. Když g je zobrazení množiny X do množiny Y a f zobrazení množiny Y do množiny M, pak symbol $f(g(.))$ označuje zobrazení množiny X do množiny M definované vztahem $f(g(.))(x) = f(g(x))$ pro $x \in X$. Píšeme však $\alpha u_i + \beta$ místo $\alpha u_i(.) + \beta$. Místo množina funkcí se říká častěji třída funkcí.

Tvrzení o existenci užitkové funkce hráče i, který má kardinální preferenční stupnici (což je obsah první části shora uvedeného teorému), lze dokázat s pomocí vztahu (5.14), který jsme odvodili v předcházejícím paragrafu o kardinálních preferencích: stačí položit

$$u_i(\omega) = \lambda_\omega \quad \text{pro} \quad \omega \in \Omega_E \,;$$

přitom λ_ω je definováno rovnicí (5.13), v níž λ_e mají dříve uvedený význam. Pro takto definovanou funkci u_i je možno ukázat, že splňuje vedle podmínky (5.15) hypotézu o středním užitku, a tedy představuje užitkovou funkci hráče i.

Kvantitativní representaci systému preferencí ve smyslu podmínky (5.15) říkají někteří autoři *ordinální užitková funkce*. Splňuje-li taková representace hypotézu středního užitku, nazývá se pak určitěji *kardinální užitková funkce*. V tomto pojednání budeme pod pojmem užitkové funkce vždycky rozumět kardinální užitkovou funkci, tj. funkci vyhovující hypotéze o středním užitku.

Ze vztahu (5.23) usoudíme, že hráč i má kardinální preferenční stupnici, když a jen když je schopen numericky vyjádřit pro kteroukoli čtveřici smíšených výsledků ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, kolikrát větší je přírůstek užitku, který mu přinese výsledek ω_2 navíc proti výsledku ω_1 (rozumí se positivní nebo negativní přírůstek), než přírůstek užitku, který mu přinese výsledek ω_4 proti výsledku ω_3. Jsou-li totiž $u_i^{(1)}$ a $u_i^{(2)}$ užitkové funkce hráče i, platí podle (5.23) rovnost

$$\frac{u_i^{(1)}(\omega_2) - u_i^{(1)}(\omega_1)}{u_i^{(1)}(\omega_4) - u_i^{(1)}(\omega_3)} = \frac{u_i^{(2)}(\omega_2) - u_i^{(2)}(\omega_1)}{u_i^{(2)}(\omega_4) - u_i^{(2)}(\omega_3)} .$$

Tyto podíly jsou tedy již nezávislé na zvolené užitkové funkci.

Možnost udat velikost přírůstků užitku odpovídá volbě jednotky měření užitku a možnost udat hodnoty užitku odpovídá navíc volbě počátku, od něhož užitek měříme. Podle toho říkáme, že užitek výsledku hráče s kardinálními preferencemi je jednoznačně určen *volbou jednotky a počátku měření* užitku.

Matematicky vyjádřeno, má-li hráč i kardinální preferenční stupnici, pak ke každé dvojici reálných čísel $u_i^{(0)}$ a $\Delta u_i^{(0)}$, kde $\Delta u_i^{(0)} > 0$, lze najít právě jednu užitkovou funkci u_i hráče i, která vyhovuje podmínkám (tzv. počátečním)

$$(5.25) \qquad u_i(e_{\min}^{(i)}) = u_i^{(0)}, \quad u_i(e_{\max}^{(i)}) = u_i^{(0)} + \Delta u_i^{(0)} \quad (i \in I),$$

kde elementární výsledky $e_{\max}^{(i)}$ a $e_{\min}^{(i)}$ jsou až na indiferenci jednoznačně určeny požadavkem, aby platilo

$$(5.26) \qquad e_{\max}^{(i)} \succsim_i \omega \succsim_i e_{\min}^{(i)} \quad \text{pro každé} \quad \omega \in \Omega_E;$$

poslední preferenční relace jsou v jiném značení přepsané vztahy (5.12). Všimněme si, že číslo $u_i^{(0)}$ představuje minimální užitek, kterého hráč i ve hře dosáhne, kdežto číslo $\Delta u_i^{(0)}$ vyjadřuje maximální dosažitelný přírůstek užitku.

Je-li prostor elementárních výsledků E dán výčtem svých prvků podle (4.11), které tvoří škálu (5.3) ve smyslu preferencí hráče i ($|E| = k$), a je-li u_i užitková funkce hráče i, položme pro

$$(5.27) \qquad \lambda_j = \frac{u_i(e_j) - u_i(e_k)}{u_i(e_1) - u_i(e_k)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k;$$

přitom předpokládáme, že $e_1 \succ_i e_k$. Čísla λ_j zřejmě splňují podmínky (5.16), přičemž $\lambda_1 = 1$, $\lambda_k = 0$, a podle hořejší úvahy jsou zároveň nezávislá na zvolené užitkové funkci u_i. Touto k-ticí čísel λ_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) a libovolně danou dvojicí $u_i^{(0)}$ a $\Delta u_i^{(0)} > 0$ je určena právě jedna užitková funkce hráče i. Její hodnotu vypočteme pro kterýkoli elementární výsledek $e_j \in E$ z rovnic (5.27) a (5.25), kde klademe podle (5.3) $e_{\max}^{(i)} = e_1$ a $e_{\min}^{(i)} = e_k$, kdežto hodnotu pro libovolný smíšený výsledek ω vypočteme podle hypotézy o středním užitku, tj. z rovnice (5.22). Ve smyslu podmínky (5.15) je tedy uvedenou k-ticí čísel λ_j určena jednoznačně preferenční stupnice hráče i.

Příklad. Ve hře v šachy označme e_1 výhru bílého, e_2 remisu a e_3 prohru bílého. Preferenční stupnice bílého v prostoru elementárních výsledků je vyjádřena preferenčními relacemi

$$e_1 \succ e_2 \succ e_3 .$$

Předpokládáme-li, že bílý je racionální hráč, znamená to podle předcházejících úvah, že je schopen srovnávat přírůstky užitku. Ocení-li přírůstek užitku při přechodu od e_3 k e_2 α-krát více než přírůstek užitku při přechodu od e_2 k e_1, což odpovídá ve smyslu vztahů (5.27) trojici čísel

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \lambda_3 = 0,$$

a zvolí-li jako počátek měření užitku užitek spojený s výsledkem e_3 a jako jednotku měření užitku přírůstek užitku vznikající při přechodu od e_3 k e_1, což odpovídá volbě počátečních podmínek daných dvojicí 0 a 1, dostane právě jednu užitkovou funkci, označme ji $u^{(\alpha)}$, jejíž hodnoty vypočtené z rovnic (5.27), (5.25) a (5.22) jsou dány formulí

$$u^{(\alpha)}(\omega) = \omega(e_1) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\omega(e_2) \quad \text{pro} \quad \omega \in \Omega_E\,; \quad \text{spec.} \quad u^{(\alpha)}(e_j) = \lambda_j\,, \quad j = 1, 2, 3\,.$$

Ve smyslu podmínky (5.15) je užitkovou funkcí $u^{(\alpha)}$ jednoznačně určena preferenční stupnice bílého, kterou označíme $U^{(\alpha)}$. Každá kardinální preferenční stupnice U bílého v prostoru smíšených výsledků, která zachovává přirozené preference bílého v prostoru elementárních výsledků $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, odpovídá právě jednomu kladnému reálnému číslu α tak, že platí $U = U^{(\alpha)}$, a obráceně.

Číslo $\alpha > 0$ charakterisuje subjektivní názor bílého při porovnávání obou po sobě jdoucích přírůstků užitku, od prohry k remise a od remisy k výhře. Případ $\alpha = 1$, který vede pro elementární výsledky k užitkové funkci odpovídající obvyklému hodnocení výsledků partií v turnajové praxi, vyjadřuje symetrickou roli, kterou mají bílý a černý při hodnocení výsledků: přechod od remisy k výhře černého srovnán s přechodem od remisy k výhře bílého je hodnocen co do absolutní velikosti stejně.

Základní postulát racionality

Již jsme několikrát zdůraznili, že předpoklad o racionalitě účastníka konfliktní situace znamená, že je takový účastník schopen všestranného rozboru konfliktní situace. To v první řadě vyžaduje, aby byl schopen vymezit všechny základní údaje o konfliktní situaci a tím do ní proniknout. Jak jsme již řekli, budeme převážně studovat takové konfliktní situace, jejichž všechny účastníky můžeme považovat za racionální. Základní požadavek na racionalitu účastníků konfliktní situace, o němž jsme se právě zmínili, vyslovíme proto ve vztahu ke všem hráčům, a to jako základní postulát o racionalitě, z něhož budeme při rozboru strategických her napříště vycházet.

Postulát o znalosti hry: Každý hráč zná všechny údaje o dané strategické hře, což vyžaduje

(1) úplnou znalost *objektivní base* hry: v ní vystupují jako základní údaje množina hráčů, prostor elementárních výsledků resp. prostor smíšených výsledků a pravidla hry; v důsledku toho každý hráč zná všechny strategie své a ostatních hráčů a případně všechny stavy přírody včetně normalisované výsledkové funkce, ať neelementární nebo případně i elementární;

(2) úplnou znalost *subjektivní base* hry: subjektivní base obsahuje kardinální preferenční stupnice všech hráčů (racionalita v hodnocení); tudíž každý hráč zná také (a) svou užitkovou funkci; (b) užitkové funkce všech ostatních hráčů — přitom se nepředpokládá, že hráč zná jednotku a počátek měření užitku u svých spoluhráčů;

(3) správnou interpretaci všech dat, a to interpretaci objektivní base a zvláště pravidel hry *podle principu realisace hry* a interpretaci subjektivní base tj. preferenční stupnice každého hráče *podle principu motivace jednání.*

Postulát o znalosti hry není ovšem součástí matematické teorie strategických her, ale představuje východisko, o něž se opíráme při rozboru konfliktních situací matematickými prostředky a které doplňujeme dalšími postuláty racionality, jimiž motivujeme zavádění pojmů sloužících k popisu racionálního jednání.

Všimneme si základního postulátu o racionalitě hráčů trochu blíže: tento postulát představuje jenom schéma, které je třeba podrobněji vysvětlit, aby bylo pojetí znalosti hry správně chápáno. Ve smyslu tohoto postulátu si představujeme, že každý účastník konfliktní situace provede ještě před započetím konfliktu důkladnou analysu, při níž vyvodí všechny závažné faktory, které při dalším rozboru konfliktní situace budou hrát základní roli. Tím každý hráč dospěje nejprve k objektivní basi hry *v rozvinutém tvaru* (I, E, Π_{ext}), kde Π_{ext} označuje pravidla hry v rozvinutém (tj. extensivním) tvaru, tedy pětici (4.46). O racionálním hráči předpokládáme, že je schopen provést normalisaci hry. Především umí najít všechny strategie jak pro všechny hráče, tak i pro přírodu jako pseudohráče; slova „umí najít" musíme chápat často jenom v tom smyslu, že analysující hráč dovede alespoň popsat algoritmus, který vede k vytvoření seznamu všech strategií, aniž se některá opomene — tento algoritmus je ovšem nepřímo dán formální definicí rozvinuté strategie, neboť jde o konečné hry.

Racionální hráč je tudíž schopen přejít k objektivní basi hry *v přednormálním tvaru* (I, E, Π_{elem}), kde symbol Π_{elem} označuje pravidla hry s náhodovými faktory dané trojicí (4.21) obsahující normalisovanou elementární výsledkovou funkci. Odvození pravidel Π_{elem} z pravidel Π_{ext} vyžaduje na analysujícím hráči schopnost pravděpodobnostního rozboru: již sám pravděpodobnostní popis náhodových tahů v pravidlech Π_{ext} leckdy předpokládá statistické úvahy a případně i použití metod statistického rozhodování k odhadu elementárních pravděpodobností. Efektivní znalosti pravděpodobností jednotlivých stavů vnějších podmínek může být někdy dosaženo jenom velmi pracnými výpočty podle formule (4.56).

Doplňme si, že strategická hra daná čtveřicí (4.3), jejíž objektivní base je vyjádřena trojicí tvaru (4.29), bývá nazývána *hra s elementárními výsledky.* Tedy čtveřice (4.3) je podle kapitoly 4 hra s elementárními výsledky, když buď $\Pi = \Pi_{ext}$, nebo $\Pi = \Pi_{elem}$; srovn. také podmínku (4.38) resp. (4.39) a vztah (4.55). Strategická hra s elementárními výsledky tudíž představuje takový model konfliktní situace, v němž jsou všechny aposteriorně možné, tj. ryzí výsledky elementární. Jsou to hry v rozvinutém tvaru a hry s náhodovými faktory, kdežto hry v normálním tvaru mají ryzí výsledky obecně smíšené.

Rozložení pravděpodobnosti na prostoru stavů přírody indukuje pro každý vektor strategií podle (4.33) rozložení pravděpodobnosti na prostoru elementárních výsledků, tj. ryzí smíšený výsledek. Tím je dokončena normalisace hry, jejíž objektivní basi dostaneme *v normalisovaném tvaru* $(I, \Omega_E, \Pi_{norm})$, kde Π_{norm} jsou pravidla formálně nejjednoduššího tvaru (1.4). Přitom prostor smíšených výsledků je jednoznačně určen prostorem E a simplexem $S^{(k)}$ podle (4.17), přičemž $k = |E|$.

Naše úvahy můžeme shrnout, že znalost objektivní base, kterou podle vysloveného postulátu má každý racionální hráč, znamená pro danou konfliktní situaci provést rozbor, v němž hráč vymezí své spoluhráče, charakterisuje determinované výsledky z hlediska cíle vyšetřování a zjistí pravidla hry v rozvinutém tvaru, která převede nejprve na přednormální tvar a pak na normalisovaný tvar.

Při hořejším výkladu postulátu o znalosti hry vycházíme z rozvinutého tvaru, poněvadž tento postup odpovídá obvyklé aplikaci teorie. Postulát se však vztahuje na jakékoli hry, a tedy i na hry v nerozvinutém tvaru. Za *strategické hry v nerozvinutém tvaru* považujeme ex definitione hry s náhodovými faktory a hry v normálním tvaru. Hry v nerozvinutém tvaru se tak třídí na hry s elementárními výsledky, tj. hry, z nichž ještě nebyly eliminovány náhodové faktory a jež se někdy také nazývají *hry v přednormálním tvaru* (nazvali jsme je v minulé kapitole hry s náhodovými faktory), a na hry v normálním tvaru, z nichž jsou již případné náhodové faktory eliminovány tím, že jsou zahrnuty do výsledků. Jak víme z předcházející kapitoly, tvoří hry bez náhodových faktorů speciální případ her v nerozvinutém tvaru s elementárními výsledky, jejichž pravidla lze vyjádřit v jednodušším tvaru (4.35).

Složitost vyšetřovaných konfliktních situací se obráží v jejich matematickém modelu jako složitost objektivní base strategické hry. Složitost stoupá nejenom s počtem hráčů $n = |I|$, ale také s počtem elementárních výsledků $k = |E|$ či spíše s počtem ryzích elementárních výsledků $|E^{(0)}|$, neboť vždy nakonec můžeme předpokládat, zvlášť je-li to nutné k snížení komplikovanosti hry, že $E = E^{(0)}$, což zajistíme tím, že vyloučíme z úvahy aposteriorně nemožné výsledky; srovn. (4.20). Čísla n a k vyznačují pouze dimensi složitosti, vlastní složitost strategické hry je dána počtem strategií $m_i = |A_i|$, které má každý z hráčů k disposici ($i = 1, 2, \ldots, n$). Pro strategickou hru s elementárními výsledky musíme vzít v úvahu ještě počet stavů přírody $m_0 = |\Sigma|$; potom z předpokladu $E = E^{(0)}$ bude plynout nerovnost

$$k \leqq \prod_{i=0}^{n} m_i .$$

Poslední součin můžeme považovat za číslo charakterisující *stupeň složitosti strategické hry* s elementárními výsledky, neboť vyjadřuje počet doplněných vektorů strategií, tj. $|A^+|$ (srovn. (4.23)), a tím slouží za odhad počtu ryzích elementárních výsledků, který podle učiněného předpokladu představuje dimensi simplexu pravděpodobnostních vektorů (srovn. (4.15)) representujících smíšené výsledky. Stupeň složitosti hry v normálním tvaru charakterisuje součin

$$(5.28) \qquad m_1 m_2 \ldots m_n , \quad m_i = |A_i| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

který vyjadřuje počet vektorů strategií, tj. $|A|$, a tím slouží jako odhad počtu ryzích smíšených výsledků $|\Omega^{(0)}|$ (srovn. (4.5)). Vidíme tak, že se normalisací hry, která vede k nahrazení ryzích elementárních výsledků ryzími smíšenými výsledky, sníží její složitost. Podle (5.28) se hry v normálním tvaru třídí, zvláště pro případ $n = 2$: mluvíme o *hrách typu* $m_1 \times m_2$.

Co znamená znalost subjektivní base hry, vyplývá z úvah provedených na konci předcházejícího paragrafu o užitku. Každý hráč musí především sestavit podle svých osobních preferencí všechny elementární výsledky do preferenční škály typu (5.3) a ještě navíc číselně vyjádřit poměr přírůstků své satisfakce, tj. udat hodnoty (5.27). Tím je stanovena při zvoleném počátku a jednotce měření jednoznačně jeho užitková funkce, a tedy i jeho kardinální preferenční stupnice.

Nejnáročnější požadavek, který vystupuje v postulátu o znalosti strategické hry, se týká toho, aby každý hráč znal kardinální preferenční stupnice všech svých spoluhráčů, tj. nejenom jejich osobní preference pro elementární výsledky, nýbrž také číselné poměry (5.27), které určují užitkovou funkci až na počátek a jednotku měření užitku, jejichž znalost se nepostuluje. Všimněme si, že tím o kardinálních preferenčních stupnicích hráčů mlčky předpokládáme, že nejsou degenerované v tom smyslu, že žádný hráč není indiferentní vůči všem elementárním, a tedy i smíšeným výsledkům.

V zásadě však indiferentní hráče z našeho vyšetřování a priori nevylučujeme. Jejich užitkové funkce jsou konstantní a při rozboru konfliktu činí tito hráči nejvíce obtíží, neboť ovlivňují svými zásahy výsledek a jejich jednání není ničím motivováno. V postulátu o znalosti hry uvedený předpoklad o interpretaci dat konfliktní situace podle principu motivace jednání zahrnuje totiž v sobě požadavek, že jednání hráčů nezávisí na žádném faktoru, který není obsažen ve formalisovaném modelu konfliktu (tento požadavek se nazývá *postulát o nezávislosti na irelevantních faktorech* a chápeme ho zde jako součást postulátu o znalosti hry). Tím je řečeno, že všechny nuance postoje každého hráče k výsledkům, ať již vyplývají z jeho egoismu nebo naopak z vysoce rozvinutého stupně etického cítění, jsou již beze zbytku zahrnuty do jeho preferenční stupnice. Bez tohoto značně idealisovaného předpokladu bychom ovšem vůbec nemohli přistoupit k analyse pojmu rozumného jednání v konfliktních situacích.

V postulátu o znalosti hry se nepřímo předpokládá, že každý hráč zná svoji užitkovou funkci včetně jednotky a počátku měření. Vycházíme přitom z představy, že hráč srovnává užitek výsledků dané konfliktní situace se satisfakcí, kterou mu působí objekty (např. při ekonomickém pojetí statky a služby) existující mimo konfliktní situaci, pro něž všechny má svou jednotku měření satisfakce (standard). Přitom je počátek měření užitku vymezen rozhraním mezi kladně a záporně pociťovanou satisfakcí.

Rekapitulujme tedy, že podle základního postulátu racionality každý hráč zná nakonec strategickou hru v normalisovaném tvaru (1.5) s $\Omega = \Omega_E$, který jsme uvedli již v první kapitole; jde tu o hru s kardinálními preferencemi, které charakterisují racionalitu všech hráčů při hodnocení výsledků. Předpokládejme, že v dané strategické hře s kardinálními preferencemi každý hráč zvolí jednotku a počátek měření užitku. Matematicky tento předpoklad znamená, že je dána soustava číselných dvojic

$$\{(u_i^{(0)}, \Delta u_i^{(0)})\}_{i\in I}\,, \tag{5.29}$$

která odpovídá volbám počátků a jednotek měření užitků provedeným jednotlivými hráči. Potom existuje právě jedna soustava číselných funkcí

$$\{u_i\}_{i\in I} \quad \text{resp.} \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{5.30}$$

pro I vyjádřené v (1.1), kde u_i je pro $i \in I$ užitková funkce hráče i, která vyhovuje počátečním podmínkám (5.25) za předpokladu (5.26). Jak víme, soustava užitkových funkcí (5.30) zcela nahrazuje ve smyslu podmínky (5.15) soustavu kardinálních preferenčních stupnic (1.2). Tudíž z postulátu o znalosti hry plyne, že každý hráč nakonec zná strategickou hru ve tvaru čtveřice

$$(I, \Omega_E, \{u_i\}_{i \in I}, (\{A_i\}_{i \in I}, \varrho)), \tag{5.31}$$

kde $\{u_i\}_{i \in I}$ je soustava užitkových funkcí (5.30). Přitom znalost užitkových funkcí znamená přesněji znalost poměru

$$\frac{u_i(\omega_1) - u_i(\omega_2)}{u_i(\omega_3) - u_i(\omega_4)} \quad (i \in I)$$

pro každou čtveřici $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ smíšených výsledků.

Strategická hra s užitkovými funkcemi

V předcházející diskusi o smyslu základního postulátu o znalosti hry jsme zjistili, že každou strategickou hru s kardinálními preferencemi lze representovat jako čtveřici (5.31), kde $\{u_i\}_{i \in I}$ je soustava užitkových funkcí jednoznačně určená soustavou číselných dvojic (5.29) a počátečními podmínkami (5.25) spolu s (5.26). Obráceně je čtveřicí (5.31) jednoznačně určen normalisovaný tvar strategické hry s kardinálními preferencemi podle podmínky (5.15) o kvantitativní representaci, kterou je užitkové funkci každého hráče přiřazen právě jeden kardinální systém preferencí.

Smluvíme se, že každou číselnou funkci u na prostoru smíšených výsledků, která splňuje vztah

$$u(\omega) = \sum_{e \in E} \omega(e)\, u(e), \quad \omega \in \Omega_E, \tag{5.32}$$

budeme nazývat *užitkovou funkcí*; vztah (5.32) představuje hypotézu o středním užitku (srovn. (5.22). Přiřadíme-li dané užitkové funkci u relaci U v prostoru smíšených výsledků tím, že klademe

$$\omega U \omega', \quad \text{když a jen když} \quad u(\omega) \geqq u(\omega'); \quad \omega, \omega' \in \Omega_E, \tag{5.33}$$

bude plynout z hypotézy o středním užitku (5.32), že U je kardinální systém preferencí, přičemž u je užitková funkce pro systém preferencí U. Relaci U přiřazenou dané užitkové funkci u definicí (5.33) nazýváme systém preferencí *indukovaný* užitkovou funkcí u.

Čtveřici (5.31), v níž pro každé $i \in I$ je u_i užitková funkce, tj. číselná funkce splňující hypotézu o středním užitku (5.22), a v níž ostatní symboly mají dříve uvedený význam, budeme nazývat *strategická hra s užitkovými funkcemi*; přitom $\{u_i\}_{i \in I}$ se nazývá *soustava užitkových funkcí* dané hry. Označíme-li pro $i \in I$ symbolem U_i systém preferencí indukovaný užitkovou funkcí u_i, můžeme ve čtveřici (5.31) nahradit soustavu užitkových funkcí preferenčním schématem $\{U_i\}_{i \in I}$, čímž hru s užitkovými funkcemi převedeme na hru v normálním tvaru s kardinálními preferencemi. Při daných počátečních podmínkách na užitkové funkce si tedy normální tvar hry a tvar s užitkovými funkcemi jednoznačně odpovídají.

Říkáme proto, že dvě strategické hry s užitkovými funkcemi jsou *v podstatě stejné*, když mají obě stejnou množinu hráčů, tentýž prostor smíšených výsledků a stejná pravidla hry a liší se nejvýše svými soustavami užitkových funkcí, z nichž každá indukuje totéž preferenční schéma. Je-li $\{u_i\}_{i \in I}$ soustava užitkových funkcí v první hře a $\{u'_i\}_{i \in I}$ soustava užitkových funkcí ve druhé hře, pak podle dříve uvedeného teorému o užitkových funkcích skutečnost, že obě hry jsou v podstatě stejné, znamená, že lze najít reálná čísla $\alpha_i > 0$ a β_i $(i \in I)$ taková, že platí vztahy

$$u'_i = \alpha_i u_i + \beta_i \quad \text{pro každé} \quad i \in I . \tag{5.34}$$

Je-li (5.31) daná hra s užitkovými funkcemi, položme

$$u_I(\omega) = \{u_i(\omega)\}_{i \in I} \quad \text{pro každé} \quad \omega \in \Omega_E . \tag{5.35}$$

Zobrazení u_I přiřazuje každému smíšenému výsledku ω tzv. *I-vektor reálných čísel*, jehož i-tá komponenta $u_i(\omega)$ vyjadřuje užitek hráče i z výsledku ω. Při očíslování hráčů podle (1.1) je tedy

$$u_I(\omega) = (u_1(\omega), u_2(\omega), \ldots, u_n(\omega)) \in R^n ,$$

tj. n-rozměrný číselný vektor, kde n označuje počet hráčů. Budeme říkat, že dva smíšené výsledky ω a ω' jsou *ekvivalentní*, v symbolech $\omega \equiv \omega'$, když $\omega \sim_i \omega'$ pro všechna $i \in I$. Snadno nahlédneme, že výsledky ω a ω' jsou ekvivalentní, když a jen když platí, že $u_I(\omega) = u_I(\omega')$. Odtud vidíme, že vektor $u_I(\omega)$ představuje kvantitativní vyjádření výsledku ω, když abstrahujeme od rozdílu mezi dvěma ekvivalentními výsledky. Jinými slovy, vektor $u_I(\omega)$ je kvantitativní representací třídy všech smíšených výsledků, které jsou ekvivalentní s výsledkem ω. Poněvadž dvěma ekvivalentním výsledkům přisuzují všichni hráči stejný užitek, můžeme ekvivaletní výsledky mezi sebou identifikovat, neboť rozdíl mezi nimi je z hlediska rozboru racionálního jednání v dané hře nepodstatný.

Označme v dané hře s užitkovými funkcemi písmenem X množinu všech I-vektorů reálných čísel $x = \{x_i\}_{i \in I}$ takových, že $x = u_I(\omega)$ pro některé $\omega \in \Omega_E$; v symbolickém zápisu:

$$X = \{u_I(\omega) : \omega \in \Omega_E\} . \tag{5.36}$$

Množina X skládající se z číselných I-vektorů tvoří tedy v dané hře s užitkovými funkcemi kvantitativní representaci prostoru smíšených výsledků Ω_E. Prvky množiny X se nazývají *výplatní vektory* a množina X sama se nazývá *prostor výplatních vektorů*. Když x je výplatní vektor, tj. $x = \{x_i\}_{i \in I} \in X$, pak číslu x_i $(i \in I)$ říkáme *výplata hráči i* pro výplatní vektor x. Tudíž výplata hráči i pro daný výplatní vektor x je užitek hráče i z toho výsledku ω, který je až na ekvivalenci jednoznačně určen rovnicí $u_I(\omega) = x$.

Termín výplata nesmíme však intuitivně chápat jako peněžní částku vyplácenou hráči na základě dosaženého výsledku po skončení hry: taková interpretace je přípustná jenom pro užší kategorii konfliktních situací končících výplatami v penězích. Proto zdůrazňujeme, že v obecném případě výplata představuje subjektivní užitek daného hráče, který nemusí být srovnatelný s užitky jeho spoluhráčů.

Označuje-li ve hře dané čtveřicí (5.31) $\{U_i\}_{i\in I}$ preferenční schéma indukované soustavou užitkových funkcí $\{u_i\}_{i\in I}$, pak prostor výplatních vektorů X je nejenom kvantitativním representantem prostoru smíšených výsledků Ω_E, nýbrž také representantem preferenčního schématu $\{U_i\}_{i\in I}$. Hráč i totiž preferuje výplatní vektor x proti výplatnímu vektoru y, když a jen když $x_i > y_i$, kde x_i resp. y_i je i-tá komponenta vektoru x resp. y. Vezmeme-li poslední výrok za definici systému preferencí hráče i v prostoru výplatních vektorů X, je tím systému preferencí U_i indukovanému užitkovou funkcí u_i přiřazen tzv. *přirozený* systém preferencí hráče i v prostoru výplatních vektorů X. Tento přirozený systém preferencí hráče i není nic jiného než uspořádání i-tých komponent vektorů v X co do číselné velikosti.

Vyjdeme-li místo od soustavy užitkových funkcí přímo z preferenčního schématu $\{U_i\}_{i\in I}$, pak ovšem kvantitativní representace výsledků jako výplatních vektorů bude závislá na zvolené soustavě číselných dvojic (5.29) odpovídající volbám počátků a jednotek měření užitků provedeným jednotlivými hráči. Přechod od jedné kvantitativní representace k druhé se děje podle vztahů (5.34).

Jinými slovy, jsou-li X a X' prostory výplatních vektorů ve dvou v podstatě stejných hrách s užitkovými funkcemi, lze přechod od jedné kvantitativní representace k druhé vyjádřit symbolicky vztahem

$$X' = \{\{\alpha_i x_i + \beta_i\}_{i\in I} : x \in X\}\,,$$

kde $\alpha_i > 0$ a β_i $(i \in I)$ jsou některá reálná čísla.

Kvantitativní representaci elementárních výsledků představují výplatní vektory, které budeme nazývat elementární. Tedy podle definice je výplatní vektor x *elementární*, když existuje elementární výsledek $e \in E$ takový, že $x = u_I(e)$. Množinu všech elementárních výplatních vektorů, která je konečná, neboť prostor E je podle předpokladu konečný, označíme symbolem X_E:

$$X_E = \{u_I(e) : e \in E\}\,. \tag{5.37}$$

Očíslujeme-li hráče podle (1.1), stane se prostor výplatních vektorů X podmnožinou prostoru n-rozměrných číselných vektorů R^n. Vyjádříme-li výplatní vektor $u_I(\omega)$ v (5.36) podle hypotézy o středním užitku (5.22) a použijeme-li v (5.36) pro Ω_E vyjádření (4.17), přesvědčíme se snadno, že je prostor výplatních vektorů vytvořen v R^n množinou elementárních výplatních vektorů X_E ve smyslu rovnosti

$$X = \{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in S^{(k)}\} \tag{5.38}$$

za předpokladu, že se množina X_E skládá z k navzájem různých vektorů $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ $\ldots, x^{(k)}$, tj.

$$X_E = \{x^{(j)} : j = 1, 2, \ldots, k\}, \quad |X_E| = k ;$$

přitom jsme položili

$$(5.39) \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} = \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_1^{(j)}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_2^{(j)}, \ldots, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_n^{(j)}\Big).$$

Připomeňme, že symbol $S^{(k)}$ označuje simplex k-rozměrných pravděpodobnostních vektorů definovaný vztahem (4.15).

Poznámka. V prostoru R^n jsou definovány součet $x + y$ dvou n-rozměrných číselných vektorů $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a λ-násobek vektoru x značený λx, kde λ je libovolné reálné číslo, rovnostmi

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Definiční rovnost (5.39) představuje obecný tvar těchto definic součtu a násobku. Pravá strana rovnosti (5.38) má tvar, který je v úzké souvislosti s pojmem konvexního obalu, jak jsme jej definovali v kapitole 4. V prostoru n-rozměrných číselných vektorů je totiž konvexní obal množiny definován jednodušším způsobem, než je tomu v obecném případě. *Konvexní obal* $[M]$ konečné neprázdné množiny M vektorů ležících v prostoru R^n, která se skládá z k navzájem různých vektorů $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, je definován jako množina

$$(5.40) \qquad [M] = \Big\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in S^{(k)}\Big\}.$$

Konvexní obal množiny M ve smyslu definice (4.16) je co do formálního tvaru stejný, ale tam výraz tvaru $\sum \lambda_j x^{(j)}$ představuje rozložení pravděpodobnosti na množině M, které přiřazuje prvku $x^{(j)}$ pravděpodobnost λ_j, kdežto zde tentýž výraz znamená vektor (5.39), jehož i-tá komponenta vyjadřuje střední hodnotu číselné funkce přiřazující vektoru $x^{(j)}$ číslo $x_i^{(j)}$ vzaté s pravděpodobností λ_j. Tedy toto nové pojetí výrazu $\sum \lambda_j x^{(j)}$ představuje přechod od rozložení pravděpodobnosti na množině M k středním hodnotám komponent vektorů ležících v M, což je z pravděpodobnostního hlediska v podstatě totéž, a proto zůstáváme u stejné symboliky. Jinak řečeno, definici (4.16) můžeme chápat jako zobecnění definice (5.40) na případ libovolné konečné množiny.

Na základě definice konvexního obalu v prostoru R^n dané vztahem (5.40) můžeme rovnost (5.38) přepsat ve tvar

$$(5.41) \qquad X = [X_E],$$

který lze chápat jako kvantitativní representaci vztahu (4.17); slovy, prostor výplatních vektorů je konvexním obalem množiny všech elementárních výplatních vektorů.

Proveďme ještě tuto úvahu. Předpokládejme obecněji, že pro $i \in I$ funkce u_i představuje kvantitativní representaci systému preferencí hráče i podle (5.15), aniž splňuje hypotézu o středním užitku. Definujeme-li zobrazení u_I a množiny X a X_E formálně stejně jako v případě užitkových funkcí vztahy (5.35), (5.36) a (5.37), nemůže platit vztah (5.38) resp. (5.41), který byl odvozen s pomocí hypotézy o středním užitku. Přechod od elementárních výsledků ke smíšeným výsledkům, kterému se nemůžeme při rozboru konfliktních situací v obecném případě vyhnout, není teď již možné při kvantitativní representaci vytvořené za pomoci zobrazení u_I nahradit adekvátním přechodem od elementárních vektorů k neelementárním. Ve hře s kardinálními preefrencemi platí pro smíšené výsledky implikace:

$$\text{když} \quad \omega \equiv \omega_1\,, \quad \omega' \equiv \omega_1'\,, \quad \text{pak} \quad \lambda\omega + (1-\lambda)\,\omega' \equiv \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_1' \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1)\,,$$

takže i v našem obecnějším případě podle (5.35) bude splněna implikace:

$$\text{když} \quad u_I(\omega) = u_I(\omega_1)\,, \quad u_I(\omega') = u_I(\omega_1')\,,$$
$$\text{pak} \quad u_I(\lambda\omega + (1-\lambda)\,\omega') = u_I(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_1') \quad \text{pro} \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1\,,$$

přičemž však vektor $u_I(\lambda\omega + (1-\lambda)\,\omega')$ se obecně liši od vektoru

(5.42) $$\lambda\, u_I(\omega) + (1-\lambda)\, u_I(\omega')\,.$$

Vidíme tedy, že kvantitativní vyjádření výsledků jako vektorů výplat jednotlivých hráčům má smysl jenom ve hře s užitkovými funkcemi, neboť bez platnosti hypotézy o středním užitku nelze přisoudit vektorům tvaru (5.42) pro hru žádný rozumný význam.

Strategická hra s užitkovými funkcemi má podle definice pravidla hry dána v normálním tvaru a s pomocí těchto pravidel je definován pojem ryzího výsledku. Kvantitativní representaci ryzího výsledku budeme nazývat ryzí výplatní vektor. Tedy výplatní vektor x je *ryzí*, když lze k němu najít ryzí výsledek ω, tj. $\omega \in \Omega^{(0)}$ (srovn. definici (4.5)), který má vlastnost, že $u_I(\omega) = x$. Množinu všech ryzích výplatních vektorů označíme symbolem $X^{(0)}$:

(5.43) $$X^{(0)} = \{u_I(\omega) : \omega \in \Omega^{(0)}\}\,.$$

Podle předpokladu jsou prostory strategií všech hráčů konečné, neboť se omezujeme na konečné strategické hry, a tudíž prostor ryzích výsledků $\Omega^{(0)}$ a stejně tak jeho kvantitativní ekvivalent $X^{(0)}$ jsou konečné množiny. Přidržíme se standardního očíslování hráčů podle (1.1), aby výplatní vektory ležely v R^n, a budeme definovat *redukovaný prostor výplatních vektorů* $\tilde{X}$ jako konvexní obal množiny ryzích výplatních vektorů $X^{(0)}$; ve znacích:

(5.44) $$\tilde{X} = [X^{(0)}]\,.$$

Jinak řečeno, výplatní vektor x leží v redukovaném prostoru výplatních vektorů, když a jen když je možné najít vektory $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ ležící v množině $X^{(0)}$ a nezáporná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}\,, \quad \text{přičemž} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\,.$$

Redukovaný prostor výplatních vektorů představuje podle definice kvantitativní ekvivalent konvexního obalu $[\Omega^{(0)}]$ prostoru ryzích výsledků. Všimněme si, že podle podmínky (R) týkající se racionality hráčů co do hodnocení výsledků, kterou jsme uvedli v kapitole 4 (srovn. též ekvivaletní podmínku (4.18)), musí každý racionální hráč vzít při analyse konfliktní situace nutně v úvahu všechny výplatní vektory, které leží v redukovaném prostoru výplatních vektorů. Tudíž prostor $\tilde{X}$ představuje nejmenší množinu výplatních vektorů, na kterou je možno se omezit při vyšetřování racionálního jednání hráčů. Na druhé straně prostor $\tilde{X}$ nemusí zahrnovat skutečné výplatní vektory, které nastanou při některé realisaci hry. Nastane-li totiž při realisaci hry výsledek ω, pak sice $u_I(\omega) \in X^{(0)}$, a tedy $u_I(\omega) \in \tilde{X}$, ale poněvadž ω je obecně rozložení pravděpodobnosti na prostoru E, bude skutečným výsledkem některý elementární výsledek $e \in E$, který nastane s pravděpodobností $\omega(e)$, takže skutečný výplatní vektor, který nastane při realisaci hry, bude vektor $u_I(e) \in X_E \subset X$, přičemž tento vektor nemusí ležet v prostoru $\tilde{X}$.

Závěrem poznamenejme, že v duchu základního postulátu racionality chápeme znalost strategické hry s užitkovými funkcemi stejně jako dříve, tj. nepředpokládáme, že hráč zná faktické jednotky a faktické počátky měření užitku u svých spoluhráčů, takže nemusí při rozboru konfliktu vědět, která z her v podstatě stejných se realisuje. Přitom jednání každého hráče je motivováno systémem preferencí indukovaným jeho užitkovou funkcí, což znamená, že každý hráč se snaží maximalisovat svůj užitek.

Strategická hra v kanonickém tvaru

Pro strategickou hru s užitkovými funkcemi danou čtveřicí (5.31) definujeme pro $i \in I$ *výplatní funkci H_i hráče i* vztahem:

(5.45)
$$H_i(a) = u_i(\varrho(a)), \quad a \in A ;$$

tudíž výplatní funkce hráče i je číselná funkce na prostoru vektorů strategií A. Číslo $H_i(a)$ se nazývá ve shodě s předcházejícím paragrafem *výplata hráči i* pro vektor strategií a a vyjadřuje užitek hráče i z výsledku, ke kterému vede volba vektoru strategií a. Podle (5.34) je vztah mezi výplatními funkcemi ve dvou hrách v podstatě stejných vyjádřen rovnostmi

(5.46)
$$H'_i = \alpha_i H_i + \beta_i \quad (i \in I),$$

kde $\{H_i\}_{i \in I}$ je soustava výplatních funkcí v první hře, $\{H'_i\}_{i \in I}$ soustava výplatních funkcí ve druhé hře a $\alpha_i > 0$ a β_i $(i \in I)$ jsou některá reálná čísla. Položíme-li definitoricky

(5.47)
$$H_I(a) = \{H_i(a)\}_{i \in I} \quad \text{pro každé} \quad a \in A ,$$

pak vektorová funkce H_I zobrazuje prostor vektorů strategií A do prostoru výplatních vektorů X. Přitom množinu ryzích výplatních vektorů $X^{(0)}$ lze vyjádřit ve tvaru:

(5.48)
$$X^{(0)} = \{H_I(a) : a \in A\} ,$$

jak ihned vyplývá z definice (5.43) podle (5.45) a (5.47), uvědomíme-li si, že prostor ryzích výsledků je charakterisován vztahem (4.5). Z definice (5.44) ihned nahlédneme, že redukovaný prostor výplatních vektorů $\tilde{X}$ je jednoznačně určen soustavou výplatních funkcí $\{H_i\}_{i \in I}$ dané hry podle (5.48) a (5.44); v detailnějším zápisu:

$$\tilde{X} = [\{(H_1(a), H_2(a), \ldots, H_n(a)) : a \in A\}] \tag{5.49}$$

při očíslování hráčů podle (1.1).

Z dřívějších úvah víme, že prostor výplatních vektorů X representuje prostor výsledků Ω_E a že přirozený systém preferencí hráče i $(i \in I)$ v prostoru X odpovídající uspořádání i-tých komponent výplatních vektorů podle velikosti representuje preferenční stupnici hráče i na kvantitativně vyjádřených výsledcích. Na druhé straně soustava výplatních funkcí $\{H_i\}_{i \in I}$ nahrazuje podle (5.45) a (5.47) výsledkovou funkci, ježto určuje vektorovou funkci H_I přiřazující každému vektoru strategií a výplatní vektor $H_I(a)$ representující výsledek $\varrho(a)$. To nám dává možnost vypustit ze základních údajů o strategické hře s užitkovými funkcemi (5.31) trojici dat Ω_E, $\{u_i\}_{i \in I}$, ϱ a nahradit ji dvojicí údajů X, $\{H_i\}_{i \in I}$. Dostaneme tak čtveřici

$$(I, X, \{A_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I}), \tag{5.50}$$

která se nazývá *kanonický tvar* dané hry s užitkovými funkcemi.

Všimněme si, že přechodem ke kanonickému tvaru ztrácíme informaci o elementárních výplatních vektorech, které při realisaci hry jedině mohou skutečně nastat po provedení náhodného pokusu odpovídajícího rozložení pravděpodobnosti $\varrho(a)$, kde a je vektor strategií hráči zvolený. Tím rozumíme, že ze čtveřice údajů (5.50) nemůžeme rekonstruovat množinu elementárních výplatních vektorů X_E. Na druhé straně neztrácíme informaci o ryzích výplatních vektorech, jejichž množinu $X^{(0)}$ konstruujeme podle (5.48). Poněvadž z kanonického tvaru poznáme ryzí výplatní vektory, známe tím i redukovaný prostor výplatních vektorů $\tilde{X}$, jehož znalost je postačující, jak víme z předcházejícího paragrafu, k rozboru jednání hráčů v dané hře. Nakonec poznamenejme, že sice elementární výplatní vektory přímo neznáme, ale že ze znalosti prostoru výplatních vektorů X vystupujícího jako jeden z údajů v kanonickém tvaru hry máme o elementárních výplatních vektorech nepřímou informaci, nebcť víme, že leží v prostoru X. Tato nepřímá informace není nikterak zanedbatelná: např. má-li některý hráč svou výplatní funkci konstantní na celém prostoru vektorů strategií, nemůžeme z tohoto faktu poznat, zda je nebo není indiferentní vůči všem výsledkům. Indiference hráče vůči výsledkům se projeví teprve na celém prostoru výplatních vektorů, a to tím, že pro hráče i je i-tá komponenta x_i každého výplatního vektoru $x \in X$ rovna jednomu a témuž číslu. Strategické hry, v nichž je některý hráč indiferentní, je nutno vyšetřovat kvalitativně odlišnými prostředky než hry bez indiferentů. Proto je znalost o indiferenci hráče pro strategickou hru podstatná a přitom tato znalost není důsledkem znalosti redukovaného prostoru výplatních vektorů.

Víme-li, že daná strategická hra je bez indiferentních hráčů, stačí nám k rozboru racionálního jednání znalost redukovaného prostoru výplatních vektorů, který je jednoznačně určen soustavou výplatních funkcí. Můžeme tedy v tomto případě vypustit ve čtveřici (5.50) údaj o prostoru všech výplatních vektorů a tím převést danou hru s užitkovými funkcemi na tzv. *redukovaný kanonický tvar* daný trojicí

$$(I, \{A_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I}). \tag{5.51}$$

Redukovaný kanonický tvar hry (5.51) představuje maximální pojmové zjednodušení matematického modelu konfliktní situace, v němž jsou všechny základní údaje komprimovány ve tři klíčové, jimiž jsou množina hráčů, prostory jejich strategií a jejich výplatní funkce. Redukovaný kanonický tvar lze vyjádřit ještě jednodušeji, když hráče očíslujeme podle (1.1) a když podobně očíslujeme i jejich strategie: je-li m_i počet strategií hráče i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n = |I|$) a je-li prostor strategií A_i dán výčtem svých prvků,

$$A_i = \{a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(m_i)}\},$$

stačí položit definitoricky

$$h_i(j_1, j_2, \ldots, j_n) = H_i(a_1^{(j_1)}, a_2^{(j_2)}, \ldots, a_n^{(j_n)})$$
$$\text{pro} \quad 1 \leqq j_i \leqq m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a redukovaný kanonický tvar (5.51) representovat dvojicí údajů

$$((m_1, m_2, \ldots, m_n), (h_1, h_2, \ldots, h_n)). \tag{5.52}$$

Ve vyjádření (5.52) značí ovšem n počet hráčů, m_i počet strategií hráče v pořadí i-tého ($i = 1, 2, \ldots, n$) a $h_i(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ výplatu tj. užitek i-tého hráče za předpokladu, že první hráč zvolil svou j_1-tou strategii, druhý hráč svou j_2-tou strategii atd. a konečně n-tý hráč svou j_n-tou strategii, a to při očíslování strategií i-tého hráče od jedničky až po číslo m_i, takže $1 \leqq j_i \leqq m_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Vyjádření strategické hry ve tvaru (5.52) obsahuje již jenom čísla a číselné funkce: funkce h_i je definována na množině n-tic celých kladných čísel, jejichž komponenta v pořadí i-tá probíhá množinu $\{1, 2, \ldots, m_i\}$ representující prostor strategií A_i hráče i. Přitom součin $m_1, m_2, \ldots, m_n$ vyjadřuje podle (5.28) stupeň složitosti dané hry.

Vyjádření (5.52) lze ještě formálně zjednodušit v případě hry o dvou hráčích, tj. pro $n = 2$. Položme pro tento případ

$$q_{jk}^{(i)} = h_i(j, k)\,; \quad j = 1, \ldots, m_1; k = 1, \ldots, m_2 \quad (i = 1, 2).$$

Matice typu $m_1 \times m_2$

$$Q^{(i)} = \left\| \begin{matrix} q_{11}^{(i)} & q_{12}^{(i)} & \ldots & q_{1m_2}^{(i)} \\ q_{21}^{(i)} & q_{22}^{(i)} & \ldots & q_{2m_2}^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{m_1 1}^{(i)} & q_{m_1 2}^{(i)} & \ldots & q_{m_1 m_2}^{(i)} \end{matrix} \right\|$$

representuje funkci h_i ($i = 1, 2$), přičemž počet řádků v každé z obou matic $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$ odpovídá počtu strategií prvního hráče a počet sloupců odpovídá počtu strategií druhého hráče. Dvojice matic

$$(Q^{(1)}, Q^{(2)}) \tag{5.53}$$

tedy nahrazuje vyjádření (5.52), takže representuje redukovaný kanonický tvar (5.51) dané hry o dvou hráčích. Této representaci redukovaného kanonického tvaru hry o dvou hráčích se v literatuře říká *bimaticová hra*. Přitom $Q^{(1)}$ se nazývá *výplatní matice prvního hráče* a $Q^{(2)}$ *výplatní matice druhého hráče*. V průsečíku j-tého řádku a k-tého sloupce výplatní matice i-tého hráče ($i = 1, 2$) stojí číslo, které představuje užitek tohoto hráče z výsledku, který nastane, když první hráč zvolí svoji j-tou strategii a druhý hráč svoji k-tou strategii. Když pro dvojici matic (5.53) současně platí rovnosti

$$q_{jk}^{(2)} = -q_{jk}^{(1)} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq j \leqq m_1 \,, \quad 1 \leqq k \leqq m_2 \,, \tag{5.54}$$

což zapisujeme vztahem $Q^{(2)} = -Q^{(1)}$, stačí znát v bimaticové hře (5.53) výplatní matici prvního hráče, neboť výplatní matici druhého hráče odvodíme ze vztahů (5.54). V tomto speciálním případě můžeme nahradit redukovaný kanonický tvar hry jedinou maticí $Q^{(1)}$, která představuje výplatní matici prvního hráče. V literatuře se hra o dvou hráčích, jejíž redukovaný kanonický tvar lze representovat výplatní maticí prvního hráče, ježto výplatní matice druhého hráče je jednoznačně určena podle (5.54), nazývá *maticová hra*. Smysl vztahu $Q^{(2)} = -Q^{(1)}$ mezi výplatními maticemi vyšetříme v příští kapitole.

Každou strategickou hru s kardinálními preferencemi lze převést na kanonický tvar, a tím spíše i na redukovaný kanonický tvar. Dvojici (5.52) považujeme jenom za jinou, méně abstraktní formu redukovaného kanonického tvaru hry, v němž jsou nejen výsledky číselně representovány jako vektory, ale kde jak hráči, tak i strategie jsou representovány čísly. Jakmile totiž výsledky representujeme kvantitativně jako výplatní vektory a vypustíme z údajů o strategické hře prostor výsledků, ztratíme tím faktickou znalost o objektivní basi konfliktní situace: přestáváme se starat, o co v konfliktu fakticky jde, abychom mohli zaměřit úsilí na to, jak si mají hráči počínat, aby dosáhli toho, o co jim jde. Z tohoto hlediska přestává být znalost faktických hráčů a faktických strategií, kterých mohou použít, relevantní pro studovaný problém, takže je stejně dobře můžeme nahradit čísly, podobně jako jsme výsledky nahradili číselnými vektory: neznalost objektivní base se tím sice dále zvýší, ale stejně ji nemůžeme z údajů uvedených v (5.51) rekonstruovat. Tím je odůvodněno, proč považujeme údaje o konfliktní situaci uvedené v (5.52) a údaje uvedené v (5.51) za navzájem ekvivalentní a obojí chápeme jako redukovaný kanonický tvar matematicky modelované konfliktní situace.

K předchozí úvaze poznamenejme ještě toto: Přechod od rozvinutého tvaru strategické hry k nerozvinutému, a to nakonec k normálnímu tvaru s užitkovými funkcemi obráží pouze různé přeuspořádání konkrétních údajů o konfliktní situaci, kdežto přechod ke kanonickému tvaru znamená již definitivně abstrahovat od konkrétních dat o konfliktu. Tím sice setřeme pojmový rozdíl mezi objektivní basí a subjektivní basí konfliktní situace, ale zato dostaneme matematický popis konfliktu ve tvaru, který je pro matematické vyšetřování pohodlnější. Znalost kanonického tvaru hry není tedy, striktně vzato, znalostí hry ve smyslu základního postulátu racionality, ale je znalostí pouze těch fakt, které hrají roli při vlastním vyšetřování racionality jednání.

Abychom mohli předcházející úvahy zformulovat výrazněji, zavedeme si pojem strategické hry v kanonickém tvaru resp. v redukovaném kanonickém tvaru formálními definicemi a popíšeme, jak je třeba pro takové hry chápat postulát o znalosti hry.

Nechť I a A_i pro $i \in I$ jsou konečné množiny a nechť H_i pro $i \in I$ je číselná funkce přiřazující každému prvku a z kartézského součinu $\prod_{i\in I} A_i$ reálné číslo $H_i(a)$. Potom trojici (5.51) nazýváme *strategická hra v redukovaném kanonickém tvaru*. Je-li dále X množina číselných I-vektorů, která obsahuje všechny číselné I-vektory tvaru $\{H_i(a)\}_{i\in I}$, kde a leží v kartézském součinu množin A_i $(i \in I)$, a která se skládá právě ze všech číselných I-vektorů tvaru

$$\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_i^{(j)}\}_{i\in I},$$

kde $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in S^{(k)}$ a kde $x^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ jsou některé číselné I-vektory v počtu k, přičemž k je některé přirozené číslo, pak čtveřici (5.50) nazýváme *strategická hra v kanonickém tvaru*.

Zachováme-li pro právě popsané typy matematických modelů konfliktních situací dříve zavedenou nomenklaturu, můžeme říci, že dvě hry v kanonickém resp. v redukovaném kanonickém tvaru pokládáme za *v podstatě stejné*, když se liší jenom svými soustavami výplatních funkcí, přičemž mezi soustavou výplatních funkcí $\{H_i\}_{i\in I}$ v první hře a soustavou výplatních funkcí $\{H_i'\}_{i\in I}$ v druhé hře platí vztahy (5.46), kde $\alpha_i > 0$ a β_i $(i \in I)$ jsou některá reálná čísla. Čtveřice (5.50) resp. trojice (5.51) představuje matematický popis konfliktní situace s hráči charakterisovanými množinou I, které považujeme za racionální ve smyslu následujícího postulátu.

Postulát o znalosti hry v kanonickém resp. v redukovaném kanonickém tvaru: Každý hráč zná všechny údaje uvedené v (5.50) resp. v (5.51), což znamená, že

(a) zná počet hráčů a umí je mezi sebou rozlišovat;

(b) zná počet svých strategií i počet strategií svých spoluhráčů a umí mezi nimi rozlišovat, takže navzájem rozliší vektory strategií;

(c) každému vektoru strategií a každému z hráčů umí přiřadit užitek, který mu plyne z výsledku hry odpovídajícího tomuto vektoru strategií (znalost všech výplatních funkcí);

(d) v případě kanonického tvaru zná ještě všechny výplatní vektory, tj. prostor X.

Přitom každý hráč vychází při rozboru těchto údajů z principu realisace hry a z principu motivace jednání, které zní:

Princip realisace hry: Každý hráč $i \in I$ zvolí některou svou strategii a_i, aniž zná volby svých spoluhráčů. Tím je určen některý vektor strategií $a = \{a_i\}_{i\in I}$, jemuž je přiřazen výsledek odpovídající výplatnímu vektoru $\{H_i(a)\}_{i\in I}$, kde $H_i(a)$ je užitek, který tento výsledek přináší hráči i.

Princip motivace jednání pro kanonický tvar: Každý hráč se řídí ve svém jednání výhradně podle svého přirozeného systému preferencí v prostoru výplatních vektorů.

Princip motivace jednání pro redukovaný kanonický tvar: Každý hráč se řídí ve svém jednání výhradně podle svého přirozeného systému preferencí v množině všech číselných I-vektorů, tj. hráč $i \in I$ preferuje I-vektor x proti I-vektoru y, když $x_i > y_i$.

Poslední princip musíme chápat tak, že hráči sice neznají v dané konfliktní situaci neúplně popsané trojicí (5.51) všechny relevantní elementární výsledky, které nakonec jedině mohou fakticky nastat, ale že přitom *nejsou* vůči všem těmto výsledkům *indiferentní*, takže pro každého hráče i existují aspoň dva elementární výplatní vektory lišící se v i-té komponentně. Jinak řečeno, princip motivace jednání obsahuje implicitně předpoklad, že žádný hráč ve strategické hře v redukovaném kanonickém tvaru není indiferetní.

Podle postulátu o znalosti hry shora uvedeného je tedy dvojice údajů (5.52) postačující ke znalosti hry v redukovaném kanonickém tvaru. Spec. je znalost dvojice výplatních matic (5.53) ve hře o dvou hráčích postačující k tomu, aby bylo vyhověno hořejšímu postulátu. Proto bimaticovou hru a podobně i maticovou hru považujeme ze strategické hry v redukovaném kanonickém tvaru. V literatuře se strategické hře v redukovaném kanonickém tvaru krátce říká *normální* nebo *normalisovaná hra.*

Vyzdvihněme nakonec to, že hořejší postulát o znalosti hry ve skutečnosti postuluje částečnou neznalost výchozí konfliktní situace, a to neznalost těch skutečností, které jsou pro analysu konfliktu nepodstatné.

Elementární výplatní funkce

Strategická hra s užitkovými funkcemi byla definována jako čtveřice tvaru

$$(5.55) \qquad (I, \Omega_E, \{u_i\}_{i\in I}, \Pi),$$

kde $\Pi = \Pi_{\text{norm}}$ jsou pravidla hry v normálním tvaru. Jako strategickou hru s užitkovými funkcemi *v rozvinutém tvaru* lze definovat čtveřici (5.55), v níž $\Pi = \Pi_{\text{ext}}$ jsou pravidla hry v rozvinutém tvaru (4.46). *Elementární výplatní funkci* $H_i^{(\mathscr{P})}$ *hráče i* ($i \in I$) ve hře (5.55), kde $\Pi = \Pi_{\text{ext}}$ definujeme rovnicí

$$(5.56) \qquad H_i^{(\mathscr{P})}(\pi) = u_i(\varrho_{\mathscr{P}}(\pi)), \quad \pi \in \mathscr{P};$$

$H_i^{(\mathscr{P})}$ je tedy číselná funkce na množině všech partií dané hry a lze ji pro určitost nazývat *výplatní funkce pro rozvinutý tvar.*

Jako strategickou hru s užitkovými funkcemi *v nerozvinutém tvaru* budeme definovat čtveřici (5.55), kde $\Pi = \Pi_{\text{elem}}$ jsou pravidla hry s náhodovými faktory (4.21), tj. pravidla jsou v přednormálním tvaru; *elementární výplatní funkci* $H_i^{(E)}$ *hráče i* ($i \in I$) v této hře definijeme vztahem

$$(5.57) \qquad H_i^{(E)}(\sigma, a) = u_i(\varrho_E(\sigma, a)), \quad \sigma \in \Sigma, \quad a \in A;$$

$H_i^{(E)}$ je tudíž číselná funkce na kartézském součinu prostoru stavů přírody s prostorem vektorů strategií; říkáme jí také *výplatní funkce pro přednormální tvar.* Normalisusujeme-li pravidla dané hry podle (4.25), dostaneme touto normalisací hru ve tvaru

(5.31); soustava výplatních funkcí $\{H_i\}_{i\in I}$ této normalisované hry se odvodí ze soustavy výplatních funkcí $\{H_i^{(E)}\}_{i\in I}$ původní hry na základě vztahů

$$(5.58) \qquad H_i(a) = \sum_{\sigma\in\Sigma} p(\sigma)\, H_i^{(E)}(\sigma, a)\,, \quad a \in A \quad (i \in I)\,,$$

jak ihned plyne z hypotézy o středním užitku (5.22) a z definice normalisované výsledkové funkce (4.25) podle (5.45).

Převedeme-li ve strategické hře s užitkovými funkcemi dané v rozvinutém tvaru pravidla hry na přednormální tvar podle (4.54) a (4.56), bude vztah mezi soustavou výplatních funkcí $\{H_i^{(\mathscr{P})}\}_{i\in I}$ a soustavou výplatních funkcí $\{H_i^{(E)}\}_{i\in I}$ odpovídající elementární normalisované výsledkové funkci vyjádřen rovnostmi

$$(5.59) \qquad H_i^{(E)}(\sigma, a) = H_i^{(\mathscr{P})}(\pi(\sigma, a))\,, \quad \sigma \in \Sigma,\ a \in A\ (i \in I)\,,$$

kde $\pi(\sigma, a)$ označuje podle kapitoly 4 partii vytvořenou příslušným doplněným vektorem strategií. Dokončíme-li normalisaci dané rozvinuté hry, bude soustava výplatních funkcí $\{H_i\}_{i\in I}$ normalisovaného tvaru hry určena soustavou elementárních výplatních funkcí pro rozvinutý tvar na základě vztahů

$$(5.60) \qquad H_i(a) = \sum_{\sigma\in\Sigma} p(\sigma)\, H_i^{(\mathscr{P})}(\pi(\sigma, a))\,, \quad a \in A\ (i \in I)\,,$$

kde p je rozložení pravděpodobnosti definované rovnicí (4.56); tyto vztahy jsou okamžitým důsledkem rovností (4.58) a (5.59).

Pojem výplatního vektoru má smysl pro hru danou jako čtveřice (5.55), ať jsou v ní pravidla hry kteréhokoli z možných tvarů; srovn. definice (5.35), (5.36), (5.37). Je-li taková hra hrou s elementárními výsledky, tj. buď v rozvinutém nebo v přednormálním tvaru, je v ní navíc proti normálnímu tvaru definován pojem ryzího elementárního výsledku, tj. elementárního výsledku aposteriorně možného. *Ryzí elementární výplatní vektor* bude pak podle definice takový číselný I-vektor, k němuž lze najít ryzí elementární výsledek, tj. $e \in E^{(0)}$, takový, že platí $x = u_I(e)$. Označíme-li množinu všech ryzích elementárních výplatních vektorů symbolem $X_E^{(0)}$, máme:

$$(5.61) \qquad X_E^{(0)} = \{u_I(e) : e \in E^{(0)}\} = \{u_I(e) : e \in \Omega_{\mathscr{P}}^{(0)}\}\,,$$

kde poslední vyjádření platí ovšem jen pro rozvinutý tvar; srovn. (4.55) a definice (4.20), (4.7). Když ze hry eliminujeme elementární výsledky, které jsou aposteriori nemožné, takže $E = E^{(0)}$, dostaneme vztah:

$$(5.62) \qquad X = [X_E^{(0)}]\,;$$

slovy, prostor výplatních vektorů je v tomto případě identický s konvexním obalem množiny všech ryzích elementárních výplatních vektorů. Tudíž s pomocí ryzích elementárních výplatních vektorů můžeme konstruovat celý prostor výplatních vektorů, což není možné provést s pomocí ryzích výplatních vektorů, které jsou neelementární: ty nám stanoví jenom redukovaný prostor výplatních vektorů. Snadno nahlédneme, že lze ryzí elementární výplatní vektory konstruovat s pomocí elementárních výplatních funkcí:

$$X_E^{(0)} = \{\{H_i^{(E)}(\sigma, a)\}_{i\in I} : \sigma \in \Sigma, a \in A\} \quad \text{resp.} \quad X_E^{(0)} = \{\{H_i^{(\mathscr{P})}(\pi)\}_{i\in I} : \pi \in \mathscr{P}\} ;$$

srovn. jejich definice (5.57) a (5.56).

Nahradíme-li ve strategické hře s užitkovými funkcemi v rozvinutém tvaru prostor smíšených výsledků, soustavu užitkových funkcí a výsledkovou funkci pro rozvinutý tvar soustavou elementárních výplatních funkcí pro rozvinutý tvar, dostaneme hru jako šestici

$$(5.63) \qquad (I, (Z, \Gamma), \{H_i^{(\mathscr{P})}\}_{i\in I}, 0, (\mathscr{J}, \Delta), (Z_0^*, \{(\Gamma z, p_z)\}_{z\in Z_0^*})) .$$

Tuto šestici můžeme považovat za kanonický tvar hry v rozvinutém tvaru. V literatuře se hře dané ve tvaru (5.63) říká krátce *rozvinutá hra*. Provedeme-li obdobné nahrazení ve hře s užitkovými funkcemi dané v nerozvinutém tvaru, dostaneme čtveřici

$$(5.64) \qquad (I, (\Sigma, p), \{A_i\}_{i\in I}, \{H_i^{(E)}\}_{i\in I}) .$$

Tuto čtveřici můžeme považovat za kanonický tvar hry s náhodovými faktory. V obou případech je prostor výplatních vektorů dostatečně určen příslušnou soustavou výplatních funkcí, které jsou elementární, na základě vztahu (5.62), neboť bez újmy na obecnosti lze vždy předpokládat, že ve výchozí hře jest $E = E^{(0)}$. Nemusíme tedy rozlišovat mezi redukovaným a neredukovaným kanonickým tvarem, jak bylo nutné při pravidlech hry daných v normálním tvaru.

Přechod od rozvinuté hry (5.63) k přednormálnímu tvaru (5.64) se děje zavedením výplatních funkcí pro přednormální tvar podle (5.59). *Normalisací rozvinuté hry* (5.63) se v literatuře rozumí její převedení na redukovaný kanonický tvar (5.50) zavedením normalisovaných výplatních funkcí podle vztahů (5.60); víme již, že tomuto redukovanému kanonickému tvaru se říká normalisovaná hra. Podobně můžeme považovat za normalisaci hry (5.64) její převedení na normalisovanou hru, tj. redukovaný kanonický tvar, zavedením normalisovaných výplatních funkcí podle (5.58).

Matematické modely konfliktních situací, s nimiž se setkáváme v literatuře o teorii her, jsou převážně buď typu (5.63) nebo typu (5.51), tedy jsou dány buď jako rozvinutá hra nebo jako normální hra. V normální hře se tedy vyšetřování omezuje na redukovaný prostor výplatních vektorů, aniž se tento fakt zdůrazňuje. O všech hráčích se ovšem předpokládá, že nejsou indiferenti.

Závěrem chceme upozornit na skutečnost, že při definici rozvinuté hry vycházejí někteří autoři z pojmu partie, který se axiomatisuje, kdežto posice je pojem odvozený, který je definován, zhruba řečeno, jako množina těch partií, které mají společný počáteční úsek. Jiný způsob axiomatisace rozvinuté hry se opírá o pojetí tahu jako primitivního pojmu.

6. KOOPERACE

Koalice

Pravidla hry určují, jakým způsobem může každý z hráčů ovlivnit výsledek, ale nikterak nevylučují možnost, aby se někteří z hráčů mezi sebou dohodli ještě před zahájením hry, že budou během hry v rámci jejích pravidel spolupracovat. Znamená-li K podmnožinu hráčů, tj. $K \subset I$, kteří se dohodnou o spolupráci, a označuje-li A_K kartézský součin

$$A_K = \prod_{i \in K} A_i , \tag{6.1}$$

představuje kooperaci hráčů dohoda mezi nimi o tom, jakým způsobem budou spolupracovat v průběhu hry, což v jazyce strategií znamená společnou volbu tzv. *K-vektoru strategií* $a_K = \{a_i\}_{i \in I} \in A_K$, přičemž každý hráč $i \in K$ se zaváže, že v provedení hry použije strategie a_i tvořící složku dohodnutého K-vektoru strategií a_K. Podmnožina hráčů $K \subset I$, která se v uvedeném smyslu dohodne na kooperaci, tvoří, jak říkáme, koalici; K-vektorům $a_K \in A_K$ se pak říká *sdružené strategie koalice* K a A_K je *prostor sdružených strategií* koalice K. Smysl dohod vyplývá ze zásady, podle níž se řídíme při interpretaci pojmu koalice:

Princip závaznosti kooperace: Když $K \subset I$, řekneme, že hráči z K tvoří koalici v dané realisaci hry, když před jejím zahájením společně zvolí sdruženou strategii $a_K = \{a_i\}_{i \in K} \in A_K$ a při realisaci hry každý hráč $i \in K$ závazně použije strategie a_i, která je komponentou zvoleného K-vektoru strategií a_K.

Jinak řečeno, o koalici mluvíme tehdy, když jednou převzaté závazky jsou během realisace hry nezrušitelné a musí být dodrženy, i kdyby některý z *členů koalice* volbou jiné své strategie, tedy porušením dohody v průběhu hry mohl dosáhnout pro sebe lepšího výsledku. V tomto přístupu k problematice kooperace ve strategických hrách tím současně předpokládáme, že *žádný hráč nemůže být členem více než jedné koalice*. Představujeme si, že dodržení dohody je vynutitelné z vnějšku, např. tím, že porušení dohody by bylo penalisováno činiteli působícími mimo konflikt, přičemž risiko podstoupené porušením dohody by neúměrně převýšilo užitek z dosaženého výsledku. Toto pojetí kooperace jako společné volby sdružené strategie koalice zároveň ve většině případů předpokládá možnost výměny informací mezi členy koalice, tudíž v podstatě ničím neomezenou *komunikaci* mezi nimi.

Proti pojetí kooperace ve smyslu její závaznosti stojí jiný typ spolupráce, kdy hráči činí mezi sebou různé dohody o volbě strategií, které však nemají charakter vynutitelnosti, tj. absolutní závaznosti. V tomto druhém případě se dá předpokládat dodržení dohody mezi partnery jenom tehdy, jestliže jednostranným porušením dohody nemůže žádný z partnerů dosáhnout žádoucnějšího výsledku.

Situaci právě popsanou výstižně ilustruje populární příklad konfliktní situace, která v literatuře dostala název „dilema vězně". Dva zatčení stojí před soudem a každý z nich uvažuje, zda se má přiznat či nepřiznat k zločinu, který oba společně spáchali. Řekněme, že když se nikdo z nich nepřizná, soud každého z nich odsoudí na rok žaláře, a když se oba přiznají, budou „sedět" oba pět let. Ale když se jeden z nich přizná a druhý nikoli, pak polehčující okolnosti plynoucí z doznání umožní soudu prvního osvobodit, kdežto druhý dostane deset let. Jestliže mezi zatčenými vznikne závazná kooperace, tedy vytvoří koalici, patrně se dohodnou, že se nikdo z nich nepřizná. Neporušitelnost závazků může např. vyplývat z toho, že oba jsou členy téže gangsterské bandy a „zrádce" by se musil obávat po případném osvobození nejhorších represálií. Jestliže si však zatčení nemohou navzájem důvěřovat, takže závazná kooperace není možná, pak se oba raději přiznají, i když si tím oba pohorší. Dodržení případné nezávazné dohody o tom, že se oba přiznají, lze pak s jistotou očekávat.

Všimněme si, že v případě závazné kooperace vynucené z vnějšku (členství v téže bandě) nemusí mezi účastníky popsaného konfliktu existovat žádná možnost komunikace k tomu, aby se dohodli: typ konfliktu je nutí k společnému postupu, který má tedy charakter „tiché" dohody.

Poznamenejme, že strategické hry, v nichž nemohou vznikat závazné dohody, se nazývají *nekooperativní*. Na předcházejícím příkladu vidíme, že „řešení" jedné a téže konfliktní situace se liší podle toho, zda ji bereme v kooperativním nebo v nekooperativním pojetí.

Přistupme nyní k problému tvorby koalic. Objektivní base konfliktní situace je v podstatě charakterisována pravidla hry. Další objektivní stránka konfliktní situace se týká možností spolupráce, které její účastníci mají. Chápeme-li kooperací spolupráci ve smyslu principu závaznosti kooperace, může bránit vzniku koalic např. vzájemná nedůvěra mezi hráči. Jinou zábranou ve vzniku koalic bývá prostě nedostatek komunikace (tzv. nekomunikativní hry) nebo zákaz kooperace mezi některými hráči (např. v ekonomických konfliktních situacích protitrustové zákony), vynucený hrozbou penalisace zvenčí (nadměrnost pokut ve srovnání se zvýšením užitku) nebo dodržovaný z důvodů etických (např. v obvyklých společenských hrách). Na druhé straně vznik koalice může být vynucen vnějšími faktory (tzv. nucená kooperace), které rovněž mohou být ekonomického, legislativního, etického nebo i jiného charakteru.

Množina hráčů I se tedy v konfliktní situaci rozpadá na jednotlivé navzájem disjunktní koalice, z nichž některé mohou být případně jednočlenné, když někteří z hráčů nebo i všichni hrají na svůj vrub. Každý možný rozklad množiny I v systém disjunktních podmnožin budeme nazývat *koaliční strukturou*. Konfliktní situace je z hlediska možností (závazné) kooperace charakterisována tzv. *množinou všech přípustných koaličních struktur*, označme ji symbolem $\boldsymbol{K}$, to jest dalším základním údajem o objektivní stránce konfliktu; množina $\boldsymbol{K}$ představuje výčet všech koaličních struktur, jež mohou v dané konfliktní situaci vzniknout.

Množinu $K \subset I$, k níž existuje přípustná koaliční struktura $\mathscr{K}$, tj. $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$, taková, že K leží v $\mathscr{K}$, nazveme *přípustnou koalicí*. Prázdnou množinu vždy můžeme považovat ze přípustnou koalici. Systém všech přípustných koalic budeme označovat písmenem Ψ nebo určitěji $\Psi(\boldsymbol{K})$. Je-li pro $i \in I$ jednočlenná koalice $\{i\}$ přípustná, znamená to, že hráč i v dané hře smí hrát na svůj vrub; není-li tomu tak, jde o případ nucené kooperace.

Jsou-li Π pravidla hry a je-li $\boldsymbol{K}$ množina všech přípustných koaličních struktur, nazveme dvojici $(\boldsymbol{K}, \Pi)$ *rozšířená pravidla hry*, která interpretujeme podle zásady:

Princip realisace rozšířených pravidel hry: Před zahájením hry se hráči v I dohadují tak dlouho, až vznikne přípustná koaliční struktura $\mathscr{K} \in \boldsymbol{K}$. Každá koalice $K \in \mathscr{K}$ učiní dohodu o společné volbě sdružené strategie $a_K \in A_K$, a to nezávisle na ostatních koalicích. Hra se provede podle principu realisace hry a podle principu závislosti kooperace. Výsledek hry je pak $\varrho(\{a_K\}_{K \in \mathscr{K}})$.

Symbol $\{a_K\}_{K \in \mathscr{K}}$ ovšem značí ten vektor strategií $a = \{a_i\}_{i \in I}$, pro který jest $a_K = \{a_i\}_{i \in K}$, $K \in \mathscr{K}$. Ježto v dohodách mezi koaličními partnery vždy vystupují sdružené strategie koalice, i když jde o hru v rozvinutém tvaru, vystupuje v interpretačním principu rozšířených pravidel výsledek hry, který dostaneme s pomocí normalisované výsledkové funkce.

Rozšířená objektivní base hry s elementárními výsledky (tj. buď hry v rozvinutém tvaru nebo hry s náhodovými faktory) je definována jako trojice

$$(6.2) \qquad (I, E, (\boldsymbol{K}, \Pi)),$$

kde $\Pi = \Pi_{ext}$ (tj. Π jsou pravidla hry v rozvinutém tvaru daná pěticí (4.46)) nebo $\Pi = \Pi_{elem}$ (tj. Π jsou pravidla hry s náhodovými faktory daná trojicí (4.21)), kdežto rozšířená objektivní base hry v normálním tvaru je dána trojicí

$$(6.3) \qquad (I, \Omega, (\boldsymbol{K}, \Pi)),$$

v níž pravidla hry $\Pi = \Pi_{norm}$ jsou vyjádřena jako dvojice (1.4); srovn. (4.29) resp. (1.6).

Strategická hra s vyznačenou kooperací je podle definice čtveřice

$$(6.4) \qquad (I, \Omega, \{U_i\}_{i \in I}, (\boldsymbol{K}, \Pi)),$$

kde $(\boldsymbol{K}, \Pi)$ jsou rozšířená pravidla hry; srovn. (4.3). Jde-li zde o hru s kardinálními preferencemi, lze ji převést na strategickou hru s užitkovými funkcemi, v níž je vyznačena kooperace, totiž na tvar

$$(6.5) \qquad (I, \Omega_E, \{u_i\}_{i \in I}, (\boldsymbol{K}, \Pi)),$$

kde $\Pi = \Pi_{norm}$ a kde $\{u_i\}_{i \in I}$ je soustava užitkových funkcí dané hry; srovn. (5.4) a (5.31).

Vidíme tedy, že jedinou změnou ve shora zaváděných pojmech je rozšíření nám již známých definic o množinu všech přípustných koaličních struktur $\boldsymbol{K}$. V hořejších definicích si ostatní symboly zachovávají již dříve uvedený význam: spec. E je prostor elementárních výsledků, kdežto Ω je prostor výsledků ve smyslu kapitoly 1 resp. kapitoly 4; srovn. (4.2).

Ve strategické hře s vyznačenou kooperací vystupují tedy místo pouhých pravidel hry rozšířená pravidla zachycující možnosti kooperace mezi hráči, a proto v případě racionality všech účastníků konfliktní situace je třeba chápat postulát o znalosti hry tak, že každý hráč interpretuje rozšířenou objektivní basi hry podle principu realisace rozšířených pravidel hry zahrnujícího rovněž zásadu o závaznosti kooperace. Vágnost interpretace rozšířených pravidel hry, týkající se vzniku přípustné koaliční struktury, je jednou z příčin, ale zdaleka ne jedinou, proč obecná teorie racionálního jednání v konfliktních situacích neumožňuje dát jednoznačná doporučení hráčům, jak mají volit své strategie. Na druhé straně tato vágnost má tu výhodu, že je do matematických modelů konfliktních situací s pomocí jediného údaje — *množiny všech přípustných koaličních struktur* — zahrnuto bohaté spektrum všech možných způsobů vyjednávání a dohod mezi hráči. Poznamenejme, že v literatuře jsou činěny rozmanité pokusy o precisování procesu tvorby koalic a vzniku koaličních struktur, avšak žádný z nich není dosti vyhovující.

S rostoucím počtem hráčů roste ještě rychleji počet možných koalic, a tím spíše počet možných koaličních struktur. Klasifikujeme-li strategické hry podle vyznačené kooperace $\boldsymbol{K}$, dostaneme dva mezní případy:

(1) hry s pevnou koaliční strukturou, pro něž množina $\boldsymbol{K}$ obsahuje jedinou přípustnou koaliční strukturu, ve znacích: $\boldsymbol{K} = \{\mathscr{K}\}$;

(2) hry s volnou tvorbou koalic, v nichž všechny koaliční struktury jsou přípustné, a tedy i všechny koalice jsou přípustné, tj. $\Psi = \{K\colon K \subset I\}$. V literatuře se říká hrám s volnou tvorbou koalic *kooperativní hry.*

Pro hry s pevnou koaliční strukturou dostaneme opět dva krajní případy, mezi nimiž leží všechny ostatní; jsou to:

(a) hry s tzv. bezkoaliční strukturou, v nichž každý hráč hraje na svůj vrub a jimž se říká, jak již víme, *nekooperativní hry* (nebo také *bezkoaliční hry*); jde o hry, pro něž $\boldsymbol{K} = \{\mathscr{K}_0\}$, kde

$$\mathscr{K}_0 = \{\{i\} : i \in I\}\,. \tag{6.6}$$

V nekooperativní hře jsou přípustnými koalicemi jenom koalice jednočlenné, takže žádné netriviální koalice nemohou vzniknout a tudíž uvnitř žádné skupiny hráčů nemůže nastat závazná spolupráce;

(b) hry s tzv. maximální koalicí I, které mají jedinou přípustnou koaliční strukturu vyjádřenou vztahem

$$\mathscr{K}_I = \{I\}\,, \tag{6.7}$$

pro něž tedy $\boldsymbol{K} = \{\mathscr{K}_I\}$. Jsou to hry, v nichž nastává nucená kooperace mezi všemi hráči. Těmto hrám budeme říkat *dohodové hry* (v anglicky psané literatuře se nazývají „bargaining games" — jde v nich o vyjednávání resp. nakonec o vzájemnou dohodu mezi všemi hráči o společném postupu vedoucím k dosažení výsledku).

Ke klasifikaci her podle množiny všech přípustných koaličních struktur, kterou jsme právě v hlavních rysech popsali, poznamenejme, že v literatuře zatím nebyly vyšetřovány jiné typy her mimo hry *kooperativní, nekooperativní* a *dohodové.* Přitom každý z těchto typů strategických her se studuje specifickými prostředky vhodnými pro ten který typ a právě tyto prostředky spolu s vytyčením problematiky blíže charakterisují a doplňují jejich formální popis daný vyznačením typu kooperace $\boldsymbol{K}$.

Na závěr tohoto paragrafu učiňme ještě několik poznámek. V průběhu hry dané v rozvinutém tvaru se aktivita hráče projevuje ve volbě alternativ. Způsob volby alternativ může hráč nahradit tím, že provede před zahájením partie volbu některé ze svých strategií, což vyžaduje nejprve provést normalisaci hry. Aktivita hráče záležející ve volně strategie se tím posunuje před vlastní realisaci hry. O způsobu volby své strategie se hráč může dohodnout se členy koalice, do níž vstoupí. Tím se aktivita hráče časově posune ještě před okamžik vlastní volby strategie a projeví se tím, že hráč hledá spojence mezi ostatními hráči tak, aby s nimi vytvořil přípustnou koalici a dohodl se s nimi o společné volbě sdružené strategie koalice, která již určuje jeho strategii. Tuto strategii, která určuje způsob jeho volby alternativ v průběhu hry, je pak hráč povinen zvolit. V nekooperativní hře odpadá aktivita hráče záležející ve vytvoření koalice s některými ze spoluhráčů, kdežto v dohodové hře je hráč nucen dohodnout se se všemi ostatními spoluhráči; jenom v kooperativní hře není hráč ničím omezován při vyjednávání se spoluhráči o vytvoření kterékoli koalice, jež tohoto hráče zahrnuje.

Garance

V celém tomto paragrafu věnovaném pojmu garance učiníme předpoklad, že K je pevně daná přípustná (neprázdná) koalice v některé strategické hře s vyznačenou kooperací vyjádřené čtveřicí (6.4); ve znacích: $\emptyset \neq K \in \Psi(K)$. Dále budeme předpokládat, že tato strategická hra tvoří hru s kardinálními preferencemi, takže ji lze transformovat na tvar (6.5), kde $\{u_i\}_{i \in I}$ je některá soustava užitkových funkcí dané hry, o níž pro určitost předpokládáme, že je v dalším rovněž pevně dána; z kardinality preferencí plyne ovšem, že $\Omega = \Omega_E$.

Danou hru budeme vyšetřovat z hlediska koalice K. V této souvislosti množinu $I - K$, skládající se ze všech hráčů, kteří nejsou členy koalice K, nazveme *antikoalicí* (rozumí se tím, že $I - K$ tvoří antikoalici ke koalici K); tato množina může být případně i prázdná, což nastane v případě, když $K = I$. V našem vyšetřování zatím zanedbáme fakt, že se antikoalice $I - K$ při realisaci hry, při níž se zformuje koalice K, sama může rozpadnout v systém přípustných koalic tak, že vzniklá koaliční struktura je prvkem množiny K. Je zvykem označovat antikoalici $I - K$ kratším symbolem $-K$, čehož se v dalším výkladu přidržíme. Koalici K se jeví antikoalice $-K$ de facto jako koalice, která společně volí $(I - K)$-vektor strategií $a_{I-K} = \{a_j\}_{j \in I-K} \in A_{I-K}$; srovn. (6.1). Podle učiněné dohody o symbolice budeme psát A_{-K} místo A_{I-K} a generický symbol označující $(I - K)$-vektory strategií čili $(-K)$-vektory strategií budeme zapisovat jako a_{-K} s případnými indexy nahoře sloužícími k jejich vzájemnému rozlišení; přitom budeme mluvit o *sdružené strategii antikoalice*, i když $-K$ nebude přípustná koalice. Speciálně když K je jednočlenná koalice, tedy $K = \{i\}$ pro některé $i \in I$, užijeme k označení *prostoru sdružených strategií antikoalice* symbolu A_{-i} místo $A_{-\{i\}}$, což je ve shodě se skutečností, že podle (6.1) jest $A_{\{i\}} = A_i$. V duchu této úmluvy bude pak a_{-i} generický symbol k označení sdružené strategie antikoalice $I - i$, tj. $a_{-i} = \{a_j\}_{j \in I-i}$ (zápisu $I - i$ je zde použito místo důslednějšího $I - \{i\}$).

Kdyby byla strategická hra (6.4) dána v rozvinutém tvaru, bylo by možno popsat jednání koalice K v průběhu hry jako postupné provádění volby některé z alternativ v každém okamžiku, v němž je na tahu některý z hráčů koalice K (tj. na informačních množinách členů koalice K), přičemž každá taková volba by musila být učiněna na základě dohody mezi všemi členy koalice K. Tento z formálního hlediska nepohodlný způsob popisu jednání koalice jsme nahradili tím, že jsme jednání koalice, vycházejíce z normalisovaného tvaru hry, popsali jako volbu některé sdružené strategie koalice s interpretací požadující závaznost dohody, kterou sdružená strategie představuje. Lze tudíž bez újmy na obecnosti předpokládat, že pravidla dané hry (6.4) jsou vyjádřena v normálním tvaru (1.4). *Objektivní base* této normalisované hry se koalici K zřejmě jeví jako trojice

$$(6.8) \qquad (I, \Omega_E, (A_K, A_{-K}, \varrho)),$$

přičemž hra se realisuje tak, že koalice K zvolí některou svou sdruženou strategii $a_K \in A_K$, antikoalice $-K$ zvolí některou svou sdruženou strategii $a_{-K} \in A_{-K}$, čímž je dosaženo výsledku $\varrho(a_K, a_{-K})$; předpokládá se ovšem, že koalice a antikoalice provádějí každá svou volbu na sobě nezávisle (požadavek vzájemné neinformovanosti: přitom ovšem členové koalice volí svou sdruženou strategii po vzájemné dohodě, kdežto o tom, jak volí sdruženou strategii členové antikoalice, nečiníme zde žádný předpoklad). Připomeňme, že podle předcházejícího paragrafu dvojice (a_K, a_{-K}) označuje ten vektor strategií $a = \{a_i\}_{i\in I}$, pro který platí, že $\{a_i\}_{i\in K} = a_K$ a současně $\{a_j\}_{j\in -K} = a_{-K}$.

Vlastnosti členů koalice K z hlediska motivace jejich jednání jsou formálně popsány *subjektivní charakteristikou koalice K*, tj. soustavou jejich preferenčních stupnic

$$(6.9) \qquad \{U_i\}_{i\in K}.$$

Stejně jako jsme zanedbali možnost rozpadu antikoalice v přípustné koalice ve shodě s vyznačenou kooperací K, nevezmeme v tomto paragrafu v úvahu ani subjektivní vlastnosti členů antikoalice vyjádřené jejich systémy preferencí. Jinými slovy, postavíme se na stanovisko, že koalice K buď zná nebo ze svých znalostí použije jenom objektivní basi hry ve tvaru (6.8) s příslušnou interpretací a svou subjektivní charakteristiku (6.9). Srovnáme-li s tímto stanoviskem základní postulát racionality o znalosti hry, znamená to, že se členové koalice K chovají v dané hře racionálně jen zčásti: buď nemají znalost hry ve smyslu základního postulátu racionality, nebo této znalosti plně nevyužívají. Ještě jinak chápáno, dvojice (6.8) a (6.9) údajů o konfliktní situaci representuje celou třídu strategických her se stejnou objektivní basí, ale případně s různou rozšířenou objektivní basí (srovn. (6.2) a (6.3)), z nichž v každé je koalice K přípustná a které se mohou lišit v subjektivní basi až na subjektivní charakteristiku koalice K, jež je pro všechny hry této třídy stejná. Hořejší stanovisko tedy zachycuje skutečnost, že budeme vyšetřovat z hlediska koalice K celou třídu strategických her charakterisovanou dvojicí dat (6.8) a (6.9): takové vyšetřování tvoří výchozí bod vhodný k předběžnému rozboru jedné hry z hlediska dané koalice.

Pro koalici K definujeme *koaliční systém preferencí* jako relaci U_K v prostoru výsledků Ω_E podmínkou: pro ω, $\omega' \in \Omega_E$ je splněn vztah

$$(6.10) \qquad \omega U_K \omega', \text{ když a jen když } \omega U_i \omega' \text{ pro každé } i \in K,$$

tj. když a jen když platí, že $\omega \succsim_i \omega'$ pro každého člena i koalice K. Relace U_K je, jak ihned nahlédneme, částečné uspořádání v prostoru smíšených výsledků.

Poznámka. Relace R v množině X se nazývá reflexivní, když pro každé $x \in X$ platí, že xRx, tj. když každý prvek v X je sám se sebou v relaci R. Relace v množině X, která je reflexivní a transitivní, se nazývá částečné uspořádání v X. Snadno se přesvědčíme, že totální relace je reflexivní, takže totální uspořádání tvoří zvláštní případ částečného uspořádání. Podle předpokladu je U_i $(i \in K)$ preferenční stupnice, tedy totální uspořádání v Ω_E, takže $\omega U_i \omega$ platí pro každé $\omega \in \Omega_E$ a pro každé $i \in K$, což zaručuje, že U_K je reflexivní relace v Ω_E. Stejně tak lehko zjistíme, že z transitivity U_i pro všechna $i \in K$ plyne transitivita relace U_K. Na druhé straně, když např. pro dvojici smíšených výsledků ω a ω' platí, že $\omega \succ_i \omega'$ a $\omega' \succ_j \omega$ pro $i \neq j$, kde $i, j \in K$, pak podle definice (6.10) nemůže platit ani vztah $\omega U_K \omega'$, ani $\omega' U_K \omega$; říkáme, že výsledky ω a ω' jsou při relaci U_K nesrovnatelné.

Řekneme, že *sdružená strategie a_K koalice K zaručuje* (neboli *garantuje*) *smíšený výsledek* ω, když pro každou sdruženou strategii a_{-K} antikoalice $-K$ platí, že $\varrho(a_K, a_{-K})\ U_K \omega$; v tomto případě také říkáme, že *výsledek $\omega \in \Omega_E$ je garantován sdruženou strategií $a_K \in A_K$*. S použitím formalismu běžného v matematické logice lze podle (6.10) vyjádřit podmínku pro to, aby výsledek ω byl garantován strategií a_K koalice K, ve tvaru:

$$(6.11) \qquad \forall(a_{-K} \in A_{-K})\ \forall\,(i \in K)\ \varrho(a_K, a_{-K}) \succsim_i \omega\,.$$

Poznámka. V posledním zápisu jsme použili znaku $\forall(\ldots)$ pro logický operátor zvaný obecný kvantifikátor (čili kvantor), který čteme „pro všechna..." nebo „pro každé...". Zápis v (6.11) tedy vyjadřuje podmínku, že pro každé a_{-K}, které je prvkem množiny A_{-K}, a pro každé i, které je prvkem množiny K, platí relace $\varrho(a_K, a_{-K}) \succsim_i \omega$.

Pojem výsledku, který si koalice K zaručí určitou volbou sdružené strategie, je definován jenom s pomocí subjektivní charakteristiky koalice (6.9) a objektivní base (6.8). Smluvíme-li se, že vztah $\omega' U_K \omega''$ budeme číst tak, že *výsledek ω' je koalicí K slabě preferován proti výsledku ω''*, můžeme říci, že sdružená strategie a_K koalice K zaručuje smíšený výsledek ω, když pro každou sdruženou strategii a_{-K} antikoalice je výsledek $\varrho(a_K, a_{-K})$ slabě preferován koalicí K proti výsledku ω. To znamená, že při jakémkoli jednání protihráčů z antikoalice popsaném jejich sdruženou strategií a_{-K} je výsledek hry odpovídající použití strategie a_K pro každého člena koalice K lepší nebo alespoň tak dobrý jako výsledek ω, posuzováno z hlediska jeho systému preferencí; srovn. (6.11).

Množinu všech smíšených výsledků, které jsou garantovány některou sdruženou strategií $a_K \in A_K$, označíme symbolem $G(a_K)$; ve znacích:

$$(6.12) \qquad G(a_K) = \{\omega : \omega \in \Omega_E;\ \forall(a_{-K} \in A_{-K})\ \varrho(a_K, a_{-K})\ U_K \omega\}\,.$$

Znak G tedy představuje zobrazení přiřazující každé sdružené strategii koalice K množinu těch smíšených výsledků, které tato strategie zaručuje. Platí tvrzení:

$$(6.13) \qquad \text{když } \omega \in G(a_K),\ \omega U_K \omega',\ \text{pak } \omega' \in G(a_K)\,;$$

slovy, jestliže smíšený výsledek ω je garantován sdruženou strategií a_K a jestliže je současně koalicí K slabě preferován proti smíšenému výsledku ω', pak také výsledek ω' je garantován strategií a_K. Tento fakt je okamžitým důsledkem transitivity koaličního systému preferencí U_K.

Je-li koalice K jednočlenná, tj. $K = \{i\}$ pro některé $i \in I$, redukuje se podmínka (6.11) na tvar

$$\forall(a_{-i} \in A_{-i})\, \varrho(a_i, a_{-i}) \succsim_i \omega ;$$

tedy ***strategie*** a_i ***hráče*** i (tj. $a_i \in A_i$) *zaručuje smíšený výsledek* ω, když pro jakékoli jednání spoluhráčů popsané jejich sdruženou strategií $a_{-i} = \{a_j\}_{j \in I - i}$ dosáhne hráč i s použitím strategie a_i výsledku hry, který je nejméně tak dobrý jako výsledek ω, vzato ze stanoviska jeho osobních preferencí. Podmínku garantovanosti výsledku, která je vyjádřena s pomocí normalisované výsledkové funkce, můžeme vyjádřit v ekvivalentním tvaru s použitím užitkové funkce u_i hráče i (srovn. předpoklady uvedené na začátku tohoto paragrafu) a z ní odvozené výplatní funkce H_i (srovn. definici (5.45)):

$$\forall(a_{-i} \in A_{-i})\, H_i(a_i, a_{-i}) \geqslant u_i(\omega) ,$$

který lze přepsat jako nerovnost

$$\min \{H_i(a_i, a_{-i}) \colon a_{-i} \in A_{-i}\} \geqslant u_i(\omega) ,$$

kde symbol min na levé straně nerovnosti označuje minimum, tj. nejmenší z čísel ležících v číselné množině uvedené ve složených závorkách. Označme toto minimum symbolem $g(a_i)$:

$$g(a_i) = \min \{H_i(a_i, a_{-i}) \colon a_{-i} \in A_{-i}\} . \tag{6.14}$$

Číslo $g(a_i)$ se nazývá *garanční výplata pro strategii* $a_i \in A_i$ a vyjadřuje podle (6.14) nejmenší z výplat $H_i(a_i, a_{-i})$, které lze dosáhnout použitím strategie a_i, ať antikoalice $I - i$ volí jakoukoli sdruženou strategii a_{-i}. Na g lze nahlížet jako na číselnou funkci přiřazující každé strategii hráče i garanční výplatu pro tuto strategii. Podle provedené úvahy a vzhledem k definici (6.12) platí, že

$$G(a_i) = \{\omega \colon \omega \in \Omega_E;\ u_i(\omega) \leqslant g(a_i)\} ; \tag{6.15}$$

slovy, množina všech smíšených výsledků, které jsou garantovány strategií a_i hráče i, se skládá právě ze všech výsledků, jejichž užitek nepřevýší garanční výplatu pro strategii a_i. Množiny $G(a_i)$ a garanční výplaty $g(a_i)$ pro $a_i \in A_i$ si tedy podle vztahu (6.15) jednojednoznačně odpovídají. Vztah (6.15) můžeme vyslovit také tak, že výsledek ω je garantován strategií a_i, když a jen když užitek $u_i(\omega)$ není větší než garanční výplata pro strategii a_i. Ještě jinak řečeno, garanční výplata pro strategii a_i

je maximální užitek z výsledků garantovaných strategií a_i; v symbolech:

$$g(a_i) = \max \{u_i(\omega): \omega \in G(a_i)\},$$

kde max označuje maximum, tj. největší z čísel ležících v číselné množině vyznačené ve složených závorkách.

Jsou-li a_i a a'_i dvě strategie hráče i takové že $g(a_i) > g(a'_i)$, lze očekávat, že hráč i, chce-li si zaručit lepší výsledek, dá přednost při své volbě strategii a_i před strategií a'_i, tj. snaží se maximalisovat garanční výplatu. Je však třeba si uvědomit, že znalost hry, kterou racionální hráč má podle základního postulátu o racionalitě a která zahrnuje znalost kardinálních preferencí spoluhráčů, může vést k tomu, že hráč i dá přednost strategii a'_i před strategií a_i, i když $g(a_i) > g(a'_i)$. Bude tomu tak např. v tom případě, když pro některou sdruženou strategii a_{-i} spoluhráčů platí nerovnost

$$H_i(a_i, a_{-i}) < H_i(a'_i, a_{-i}),$$

přičemž hráč i vyvodí ze znalosti preferencí svých spoluhráčů, že ti zvolí právě strategii a_{-i}; v tomto případě by jistě nebylo racionální, kdyby se hráč řídil principem maximalisace garanční výplaty. Garanční princip při volbě strategie lze považovat za rozumný jen tehdy, když hráč nemá žádnou znalost o svých spoluhráčích, tedy když zná o konfliktní situace jen údaje (6.8) a (6.9).

Všimněme si jedné vlastnosti garantovaných výsledků, kterou můžeme vyslovit jako tvrzení: Je-li výsledek ω garantován sdruženou strategií a_K koalice K a je-li výsledek ω' garantován sdruženou strategií a'_K, pak platí pro kterékoli číslo λ ležící mezi 0 a 1 vztah

$$\lambda\varrho(a_K, a_{-K}) + (1 - \lambda)\, \varrho(a'_K, a_{-K}) \gtrsim_i \lambda\omega + (1 - \lambda)\, \omega'$$

pro každou strategii a_{-K} antikoalice $-K$ a pro všechny členy koalice $i \in K$. Spec. pro $\omega' = \omega$ nám poslední tvrzení říká, že když $\omega \in G(a_K)$, $\omega \in G(a'_K)$, pak pro libovolné λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, platí:

$$(6.16) \qquad \forall(a_{-K} \in A_{-K})\, \forall\, (i \in K)\, \lambda\varrho(a_K, a_{-K}) + (1 - \lambda)\, \varrho(a'_K, a_{-K}) \gtrsim_i \omega\,.$$

Pravíme, že *smíšený výsledek ω je garantovatelný dvojicí sdružených strategií a_K, a'_K koalice K*, když existuje reálné číslo λ vyhovující nerovnostem $0 \leqq \lambda \leqq 1$, pro něž je splněna podmínka (6.16). Snadno nahlédneme, že výsledek, který je garantován buď strategií a_K nebo strategií a'_K, je již garantovatelný dvojicí a_K, a'_K; stačí porovnat podmínky (6.11) a (6.16). Obecně však mohou existovat výsledky, které jsou garantovatelné dvojicí strategií, ale které nejsou garantovány ani jednou z nich.

O tom se přesvědčíme na následujícím příkladu, v němž bude pro jednoduchost uvažovaná koalice jednočlenná, $K = \{i\}$, takže se pro ni podmínka (6.16) zredukuje na tvar:

$$\forall(a_{-i} \in A_{-i})\, \lambda\varrho(a_i, a_{-i}) + (1 - \lambda)\, \varrho(a'_i, a_{-i}) \gtrsim_i \omega\,.$$

Přepíšeme-li tuto podmínku s pomocí užitkové funkce u_i a výplatní funkce H_i

hráče i, dostaneme (srovn. (5.20)):

$$\forall(a_{-i} \in A_{-i})\ \lambda H_i(a_i, a_{-i}) + (1 - \lambda)\, H_i(a'_i, a_{-i}) \geqq u_i(\omega)\,,$$

neboli

$$\min\{\lambda H_i(a_i, a_{-i}) + (1 - \lambda)\, H_i(a'_i, a_{-i}) \colon a_{-i} \in A_{-i}\} \geqq u_i(\omega)\,. \tag{6.17}$$

Říkáme tedy, že *smíšený výsledek* ω *je garantovatelný dvojicí strategií* a_i, a'_i *hráče* i, když lze najít číslo λ, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, pro něž je splněna podmínka (6.17).

Příklad. Jest dána hra o dvou hráčích, $I = \{1, 2\}$, v níž prostor elementárních výsledků obsahuje právě dva různé prvky, $E = \{e_1, e_2\}$, a v níž každý z hráčů má k disposici právě dvě různé strategie:

$$A_1 = \{a_1, a'_1\}\,, \quad A_2 = \{a_2, a'_2\}\,.$$

Normalisovaná výsledková funkce ϱ je definována vztahy:

$$\varrho(a_1, a_2) = \varrho(a'_1, a'_2) = e_1\,, \quad \varrho(a_1, a'_2) = \varrho(a'_1, a_2) = e_2\,.$$

Předpokládejme pro určitost, že jde o nekooperativní hru, tj. $K = \{\mathscr{K}_0\}$, kde $\mathscr{K}_0 = \{\{1\}, \{2\}\}$ (srovn. (6.6)), a že hru vyšetřujeme z hlediska koalice $K = \{1\}$, tj. z hlediska prvního hráče. Jako na začátku tohoto paragrafu budeme předpokládat, že hráči mají kardinální preference, přičemž první hráč preferuje výsledek e_1 proti výsledku e_2. Ježto znalost preferenční stupnice druhého hráče není pro pojem garance relevantní, budeme zapisovat preferenční vztahy prvního hráče bez vyznačení jeho indexu, neboť se preferenční vztahy druhého hráče v naší úvaze nevyskytnou; tudíž $e_1 \succ e_2$. Prostor smíšených výsledků je vyjádřen podle (4.17) výrazem

$$\Omega_E = \{\lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2 \colon 0 \leqq \lambda \leqq 1\}\,,$$

přičemž

$$\lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2 \succ \lambda' e_1 + (1 - \lambda')\, e_2$$

platí tehdy a jenom tehdy, když $\lambda > \lambda'$, jak plyne z kardinality preferencí prvního hráče; srovn. předcházející kapitolu. Tím jsme pro naši hru popsali všechny údaje uvedené v (6.8) a (6.9).

Z obecné definice (6.12) okamžitě zjistíme, že $G(a_1) = G(a'_1) = \{e_2\}$, takže jediný výsledek, který si může první hráč zaručit některou ze svých strategií, je výsledek e_2, který je hodnocen nejníže. Je-li u_1 ta užitková funkce prvního hráče, která přiřazuje výsledku e_2 užitek -1 a výsledku e_1 užitek $+1$, tedy obecně (srovn. (5.22))

$$u_1(\lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2) = 2\lambda - 1\,, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1\,, \tag{6.18}$$

jsou podle definice (6.14) garanční výplaty pro obě strategie prvního hráče rovny číslu -1; výplatní funkce prvního hráče totiž nabývá hodnot (srovn. definici (5.45))

$$H_1(a_1, a_2) = H_1(a'_1, a'_2) = 1\,, \quad H_1(a_1, a'_2) = H_1(a'_1, a_2) = -1\,,$$

takže

$$g(a_1) = \min\{H_1(a_1, a_2), H_1(a_1, a'_2)\} = -1 = \min\{H_1(a'_1, a_2), H_1(a'_1, a'_2)\} = \\ = g(a'_1)\,.$$

Tím jsme se znovu přesvědčili vzhledem k vyjádření (6.15), že si první hráč nemůže zaručit žádný výsledek $\lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2$, pro který jest $\lambda > 0$.

Tvrdíme nyní, že výsledek $\omega = \lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2$ je garantovatelný dvojicí strategií a_1, a'_1 prvního hráče, když jest $\lambda \leqq \frac{1}{2}$, a není garantovatelný touto dvojicí strategií pro $\lambda > \frac{1}{2}$. Máme:

$$\lambda H_1(a_1, a_2) + (1 - \lambda)\, H_1(a'_1, a_2) = 2\lambda - 1\,,$$
$$\lambda H_1(a_1, a'_2) + (1 - \lambda)\, H_1(a'_1, a'_2) = 1 - 2\lambda\,,$$

takže podmínku (6.17) lze v našem případě vyjádřit jako nerovnost

$$\min\{2\lambda - 1, 1 - 2\lambda\} \geqq u_1(\omega)\,.$$

Minimum v poslední nerovnosti je pro každé číslo λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ nekladné a nabude nejvýše hodnoty 0 pro $\lambda = \frac{1}{2}$. Odtud soudíme, že smíšený výsledek ω je garantovatelný dvojicí strategií a_1, a'_1 tehdy a jenom tehdy, když jeho užitek $u_1(\omega)$ je nekladný, což podle (6.18) znamená, že musí platit nerovnost $2\lambda - 1 \leqq 0$ čili $\lambda \leqq \frac{1}{2}$. Dokázali jsme tak, že v dané hře lze najít nekonečně mnoho výsledků garantovatelných dvojicí a_1, a'_1, z nichž první hráč hodnotí nejvýše výsledek $\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$, jehož užitek se rovná nule; přitom jediný výsledek garantovaný oběma strategiemi prvního hráče je elementární výsledek e_2 s užitkem rovným -1. Jinými slovy, první hráč si může zaručit kteroukoli ze svých strategií jenom minimální užitek rovný -1, kdežto jeho maximálně garantovatelný užitek se zvýší na 0.

Příklad, který jsme uvedli, je matematickým modelem konfliktní situace, která vzniká při jednoduché hře známé pod názvem „srovnávání mincí" (angl. matching pennies). Zúčastní se jí dva hráči, z nichž každý položí na stůl minci o smluvené hodnotě, a to tak, aby protivník nevěděl předem, je-li mince lícem nebo rubem nahoru. První hráč vyhraje, když mince ukazují obě líc nebo obě rub, tj. jsou položeny souhlasně, a prohraje v opačném případě, když jsou položeny nesouhlasně. V matematickém modelu označuje e_1 výhru prvního hráče a e_2 jeho prohru, čímž je charakterisována současně i preferenční stupnice tohoto hráče: předpokládá se o něm, že výhru preferuje proti prohře. Každý z hráčů má dvě strategie; řekněme, že a_1 resp. a_2 označuje strategii, při níž první resp. druhý hráč položí minci lícem nahoru, kdežto a'_1 resp. a'_2 značí strategii položit minci nahoru rubem; vektorům složeným z těchto strategií odpovídá shora definovaná normalisovaná výsledková funkce ϱ. Hra je zřejmě nekooperativní, neboť výhra prvního hráče má za následek prohru druhého hráče, takže spoluprací nemohou hráči dosáhnout pro oba žádoucího výsledku.

Výraz $\lambda e_1 + (1 - \lambda) e_2$ představuje nedeterminovaný výsledek, při němž nastane výhra prvního hráče s pravděpodobností λ a jeho prohra s pravděpodobností $1 - \lambda$. Tento nedeterminovaný výsledek vznikne např. tehdy, když druhý hráč zvolí pevně některou ze svých strategií, třeba a_2, kdežto první hráč použije k volbě své strategie náhodového mechanismu, který volí v našem případě strategii a_1 s pravděpodobností λ a strategii a'_1 s pravděpodobností $1 - \lambda$. Např. pro $\lambda = 1/6$ může být tímto náhodovým mechanismem obyčejná kostka, která není falešná: hráč si před zahájením hry hodí kostkou, a padne-li jedno oko, zvolí strategii a_1 (líc), a padne-li více ok, zvolí strategii a'_1 (rub). Všimněme si, že když druhý hráč zvolí strategii a'_2, pak první hráč dostane s použitím popsaného náhodového mechanismu výsledek $(1 - \lambda) e_1 + \lambda e_2$.

Zvolené počáteční podmínky na užitkovou funkci u_1 prvního hráče charakterisují výhru číslem 1 a prohru číslem -1. Znamená-li, jak je obvyklé, výhra prvního hráče zisk jedné mince, totiž té, kterou na stůl položil druhý hráč, a prohra ztrátu vlastní mince, vyjadřují hodnoty výplatní funkce H_1 prvního hráče, že výplata při výhře (tj. pro vektor strategií (a_1, a_2) nebo (a'_1, a'_2): viz hořejší vztahy) je rovna 1 a při prohře (tj. pro vektory strategií (a_1, a'_2) nebo (a'_1, a_2)) je rovna -1; v tomto případě lze výplaty také chápat jako peněžní částky, které představují zisk prvního hráče, má-li výplata kladnou hodnotu, kdežto ztrátu, je-li výplata záporná.

Hořejší tvrzení, že první hráč si může garantovat každou ze svých strategií jenom minimální užitek rovný -1, tedy znamená právě to, že si první hráč může zaručit kteroukoli z obou strategií nejvýše prohru. Interpretaci pojmu garantovatelnosti vyvodíme z nerovnosti (6.17): výsledek je garantovatelný dvojicí strategií daného hráče, když si tento hráč s pomocí vhodného náhodového mechanismu, kterého použije shora naznačeným způsobem k volbě jedné ze strategií dané dvojice, může zabezpečit, aby střední hodnota výplaty pro každou sdruženou strategii protihráčů neklesla pod užitek tohoto výsledku; střední hodnota se bere vzhledem k rozložení pravděpodobnosti realisovanému tímto náhodovým mechanismem. V našem případě fakt, že užitek maximálně garantovatelný dvojicí strategií a_1, a'_1 prvního hráče je nulový, lze interpretovat tak, že první hráč si může zabezpečit s použitím náhodového mechanismu volícího líc i rub s touž pravděpodobností rovnou $\frac{1}{2}$, aby jeho střední výplata byla právě rovna nule, čili aby nic neprohrál. Při statistické interpretaci pojmu pravděpodobnosti to znamená, že když první hráč volí v dlouhé sérii partií dané hry náhodně líc a rub se stejnou pravděpodobností, že si v průměru může zaručit nulovou ztrátu, a tudíž nejvýše nulový zisk.

Garantovatelnost a smíšené strategie

V tomto paragrafu zachováme předpoklady, které jsme učinili na začátku paragrafu předcházejícího. V něm jsme vyslovili definici garantovatelnosti výsledku pro dvojice strategií dané koalice K. Obecněji pravíme, že *smíšený výsledek ω je garantovatelný k-ticí sdružených strategií $a_K^{(1)}, a_K^{(2)}, \ldots, a_K^{(k)}$ koalice K,* když existují reálná čísla λ_j v počtu k taková, že

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\,, \quad 0 \leqq \lambda_j \leqq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, k)\,,$$

přičemž je splněna podmínka

$$\forall (a_{-K} \in A_{-K})\, \forall\, (i \in K) \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varrho(a_K^{(j)}, a_{-K}) \succsim_i \omega\,.$$

Vysloveno ještě obecněji, *smíšený výsledek ω je garantovatelný jednoparametrovou soustavou $\{a_K^{(\beta)}\}_{\beta \in B}$ sdružených strategií koalice K,* kde B je konečná neprázdná množina, když existuje rozložení pravděpodobnosti λ na množině B takové, že je splněna podmínka

$$(6.19) \qquad \forall(a_{-K} \in A_{-K})\, \forall\,(i \in K) \sum_{\beta \in B} \lambda(\beta)\, \varrho(a_K^{(\beta)}, a_{-K}) \succsim_i \omega\,;$$

srovn. (4.13). Budeme říkat, že *smíšený výsledek ω je garantovatelný pro koalici K* (resp. *pro hráče i*, když $K = \{i\}$), když lze najít jednoparametrovou soustavu $\{a_K^{(\beta)}\}_{\beta \in B}$ sdružených strategií koalice K s konečnou neprázdnou množinou parametrů B takovou, že výsledek ω je garantovatelný touto soustavou podle předcházející definice.

V příkladě uvedeném v minulém paragrafu jsme viděli, že v dané hře je každý výsledek $\omega = \lambda e_1 + (1 - \lambda)\, e_2$ při $0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$ pro prvního hráče garantovatelný a že z těchto výsledků je garantován některou strategií prvního hráče jenom výsledek e_2 odpovídající číslu $\lambda = 0$.

Vyjděme z předpokladu, že výsledek ω je garantovatelný pro koalici K. Potom podle definice lze najít rozložení λ na některé neprázdné konečné množině B a jednoparametrovou soustavu $\{a_K^{(\beta)}\}_{\beta \in B}$ sdružených strategií koalice K takovou, že platí podmínka (6.19). Položíme-li

$$B(a_K) = \{\beta\colon \beta \in B;\, a_K^{(\beta)} = a_K\} \quad \text{pro} \quad a_K \in A_K\,,$$

tvoří množinový systém $\{B(a_K)\colon a_K \in A_K\}$ rozklad množiny parametrů B (v němž rozkladové množiny nemusí být všechny neprázdné) a přitom každá množina $B(a_K)$ má při rozložení λ pravděpodobnost $\lambda(B(a_K))$. Klademe-li definitoricky

$$s_K(a_K) = \lambda(B(a_K)) \quad \text{pro} \quad a_K \in A_K\,,$$

představuje číselná funkce s_K definovaná na prostoru A_K posledním vztahem rozložení pravděpodobnosti na tomto prostoru a s její pomocí můžeme podmínku (6.19) zapsat ve tvaru

$$(6.20) \qquad \forall(a_{-K} \in A_{-K})\, \forall\,(i \in K)\, \varrho(s_K, a_{-K}) \succsim_i \omega\,,$$

kde jsme zavedli zkrácené označení

$$(6.21) \qquad \varrho(s_K, a_{-K}) = \sum_{a_K \in A_K} s_K(a_K)\, \varrho(a_K, a_{-K})\,.$$

Tím jsme ukázali, že *výsledek ω je garantovatelný pro koalici K, když a jen když existuje rozložení pravděpodobnosti s_K na prostoru A_K sdružených strategií koalice K takové, že je splněna podmínka* (6.20).

Jestliže je daná koalice jednočlenná, $K = \{i\}$, nabude podmínka (6.20) tvaru

$$\forall(a_{-i} \in A_{-i})\, \varrho(s_i, a_{-i}) \succsim_i \omega\,,$$

kde v duchu úmluv učiněných v předešlém paragrafu píšeme s_i místo $s_{\{i\}}$; symbol s_i

představuje rozložení pravděpodobnosti na prostoru strategií A_i hráče i. Poslední podmínka znamená, že platí

$$\forall(a_{-i} \in A_{-i})\; H_i(s_i, a_{-i}) \geqq u_i(\omega),$$

kde jsme v zápisu použili užitkové funkce u_i a výplatní funkce H_i hráče i a kde jsme pro zkrácení položili

$$H_i(s_i, a_{-i}) = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i)\, H_i(a_i, a_{-i});$$

poslední rovnost vyjadřuje, že symbol $H_i(s_i, a_{-i})$ představuje střední hodnotu výplat $H_i(a_i, a_{-i})$, $a_i \in A_i$, při rozložení pravděpodobnosti s_i na prostoru A_i. Tudíž podmínku (6.20) lze pro případ jednočlenné koalice nahradit nerovností

$$\min \{H_i(s_i, a_{-i}) : a_{-i} \in A_{-i}\} \geqq u_i(\omega); \tag{6.22}$$

srovn. obdobnou podmínku v předcházejícím paragrafu, v níž vystupuje místo rozložení pravděpodobnosti s_i strategie a_i. Je tedy výsledek ω garantovatelný pro hráče i tehdy a jenom tehdy, když lze najít rozložení pravděpodobnosti s_i na prostoru strategií A_i hráče i, pro něž je splněna podmínka (6.22).

V příkladě z předchozího paragrafu jsme fakticky ukázali, že výsledek ω je garantovatelný pro prvního hráče právě tehdy, když pro rozložení pravděpodobnosti $\tilde{s}_1$ na prostoru strategií A_1 prvního hráče, přiřazující každé ze strategií pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, tj.

$$\tilde{s}_1(a_1) = \tilde{s}_1(a_1') = \tfrac{1}{2},$$

platí podmínka (6.22), která je v tomto případě ekvivalentní s nerovností (6.17). Toto rozložení pravděpodobnosti, jak jsme viděli, lze realisovat příslušným náhodovým mechanismem.

Libovolné rozložení pravděpodobnosti na prostoru A_K sdružených strategií koalice K (srovn. (6.1)) se nazývá *smíšená strategie koalice K*; sdružené strategie koalice K se pak nazývají určitěji *ryzí strategie koalice K*. Množinu všech smíšených strategií koalice K budeme označovat všude v dalším textu symbolem S_K. Pro jednočlennou koalici $K = \{i\}$ píšeme S_i místo $S_{\{i\}}$ a prvky $s_i \in S_i$ nazýváme *smíšené strategie hráče i*, kdežto prvky $a_i \in A_i$ jmenujeme *ryzí strategie hráče i*. Použijeme-li symboliky zavedené v kapitole 4, lze množinu S_K, kterou nazýváme *prostor smíšených strategií* koalice K, vyjádřit vztahem (srovn. (4.16)):

$$S_K = [A_K] \quad \text{pro} \quad K \subset I; \quad \text{spec. } S_i = [A_i] \quad \text{pro} \quad i \in I. \tag{6.23}$$

Slovy, prostor smíšených strategií koalice K (resp. hráče i) je definován jako konvexní obal prostoru ryzích strategií této koalice (resp. daného hráče). Všimněme si, že vztahem (6.23) lze formálně definovat prostor S_K i pro prázdnou koalici, neboť definice (6.1) má rovněž smysl pro $K = \emptyset$: jest $S_\emptyset = A_\emptyset$, přičemž prostor $A_\emptyset$ obsahuje jenom prázdné zobrazení.

Poněvadž ve smyslu interpretace pojmu pravděpodobnosti na konečné množině není faktického rozdílu mezi smíšenou strategií přiřazující některé sdružené strategii a_K koalice K pravděpodobnost 1 a samotnou strategii a_K, považujeme prostor ryzích strategií koalice K za část prostoru smíšených strategií této koalice; tj.

$$A_K \subset S_K\,; \quad \text{spec.} \quad A_i \subset S_i \quad \text{pro} \quad i \in I\,.$$

Přitom lze říci přesněji, že ryzí strategie koalice K je ta smíšená strategie této koalice, která přiřazuje některé sdružené strategii a_K koalice K pravděpodobnost 1, kdežto všem ostatním pravděpodobnost 0; v tomto pojetí činíme formální rozdíl mezi ryzí strategií a sdruženou strategií koalice.

Užijeme-li pojmu smíšené strategie, můžeme tvrdit, že *výsledek ω je garantovatelný pro koalici K tehdy a jenom tehdy, když existuje smíšená strategie s_K koalice K, pro niž je splněna podmínka* (6.20). Pravíme, že *smíšený výsledek ω je garantován smíšenou strategií s_K koalice K*, když platí posmínka (6.20); v tomto případě také říkáme, že *smíšená strategie $s_K \in S_K$ zaručuje výsledek ω*. Tato definice je plně ve shodě s definicí garance pro strategii, která není smíšená, tj. přesněji, která je ryzí, jak zjistíme, porovnáme-li podmínky (6.11) a (6.20); srovn. (6.21). Tudíž *výsledek je garantovatelný pro koalici K, když a jen když je garantován některou smíšenou strategií koalice K.*

Viděli jsme v příkladě uvedeném v minulém paragrafu, že smíšenými strategiemi lze obecně zaručit rozsáhlejší množiny výsledků, než když použijeme jenom ryzích strategií. To je jeden z důvodů, proč se v teorii her zavádějí smíšené strategie: maximální užitek z výsledků, které je možno garantovat smíšenými strategiemi, je obecně větší než maximální užitek z výsledků, které lze garantovat jenom ryzími strategiemi, vzato ze stanoviska užitku jednoho hráče. Je zajímavé, že použitím náhodového mechanismu při volbě sdružené strategie může koalice dosáhnout pro své členy vyšších užitků, než když volí strategii bez použití vhodného náhodového mechanismu: přitom náhodový mechanismus o vhodných pravděpodobnostních vlastnostech representuje „vhodnou" smíšenou strategii koalice. To se vysvětluje tím, že protivníci koalice nemohou v sérii opakování téže hry z náhodné volby sdružených strategií s pomocí náhodového mechanismu uhodnout faktické jednání koalice a tím je jim znemožněno při pokračovaném opakování hry zvolit pro ně výhodnou protistrategii. To je zvláště dobře vidět ve hře se srovnáváním mincí: uvidíme, že i když protivník zjistí, že první hráč používá při volbě své strategie náhodového mechanismu dávajícího každou z obou strategií se stejnou pravděpodobností, nemůže této své znalosti nijak využít při volbě své vlastní strategie a nezbude mu nic jiného, než použít při volbě svých strategií náhodového mechanismu téhož typu. Náhodovému mechanismu odpovídající smíšená strategie zajišťuje prvnímu hráči nulovou ztrátu, a tedy protivníkovi neumožňuje žádný zisk. Tudíž uvedená smíšená strategie poskytuje prvnímu hráči ochranu před ztrátou, což žádná z jeho ryzích strategií nečiní.

Podmínku (6.20) garantovanosti výsledku smíšenou strategií lze vyjádřit v symetričtějším tvaru, ježto platí následující tvrzení: je-li výsledek $\omega \in \Omega_E$ garantován smíšenou strategií $s_K \in S_K$, pak je splněna podmínka:

$$\forall(s_{-K} \in S_{-K})\ \forall\,(i \in K)\ \varrho(s_K, s_{-K}) \succsim_i \omega\,, \tag{6.24}$$

kde jsme položili

$$\varrho(s_K, s_{-K}) = \sum_{a_{-K} \in A_{-K}} s_{-K}(a_{-K})\, \varrho(s_K, a_{-K})\,;$$

srovn. (6.21). Množinu všech výsledků garantovaných smíšenou strategií $s_K \in S_K$ označíme ve shodě s (6.12) symbolem $G(s_K)$. Podle (6.24) a (6.10) máme:

$$(6.25) \qquad G(s_K) = \{\omega\colon \omega \in \Omega_E;\ \forall(s_{-K} \in S_{-K})\ \varrho(s_K, s_{-K})\ U_K\ \omega\}\,.$$

Pro množiny $G(s_K)$, $s_K \in S_K$, platí tvrzení analogické tvrzení (6.13): s každým výsledkem ω ležícím v množině $G(s_K)$ v ní leží kterýkoli výsledek, proti němuž koalice K výsledek ω slabě preferuje.

Podle (6.24) platí, že smíšená strategie s_i hráče i zaručuje smíšený výsledek ω, když a jen když je splněna podmínka:

$$\forall(s_{-i} \in S_{-i})\ \varrho(s_i, s_{-i}) \succsim_i \omega \quad (S_{-i} = S_{I-i})\,,$$

neboli (srovn. (6.22))

$$\min\{H_i(s_i, s_{-i})\colon s_{-i} \in S_{-i}\} \geqq u_i(\omega)\,,$$

kde jsme položili

$$H_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} s_i(a_i)\, s_{-i}(a_{-i})\, H_i(a_i, a_{-i})\,.$$

Označíme-li ve shodě s definicí (6.14) minimum v poslední nerovnosti symbolem $g(s_i)$, můžeme dokázat platnost rovnosti:

$$(6.26) \quad g(s_i) = \min\{H_i(s_i, s_{-i})\colon s_{-i} \in S_{-i}\} = \min\{H_i(s_i, a_{-i})\colon a_{-i} \in A_{-i}\}\,.$$

Číslo $g(s_i)$ budeme nazývat jako v předcházejícím paragrafu garanční výplata pro smíšenou strategii $s_i \in S_i$. Platí:

Teorém. *Existuje aspoň jedna smíšená strategie $\bar{s}_i$ hráče i, která má vlastnost, že pro každou smíšenou strategii $s_i \in S_i$ téhož hráče je splněna nerovnost $g(\bar{s}_i) \geqq g(s_i)$. Každé strategii splňující poslední nerovnost pro všechna $s_i \in S_i$ říkáme garanční strategie hráče i. Jsou-li $\bar{s}_i$ a $\bar{s}'_i$ dvě garanční strategie hráče i, pak platí rovnosti:*

$$(6.27) \qquad g(\bar{s}_i) = g(\bar{s}'_i) = \max\{g(s_i)\colon\ s_i \in S_i\} = v(i)\,.$$

Přitom jsme symbolem $v(i)$ označili garanční výplatu pro libovolnou garanční strategii hráče i; tuto výplatu, tj. číslo $v(i)$, nazýváme *garanční výplata hráče i*. Pro garanční výplatu hráče i je splněna nerovnost

$$v(i) \geqq \max\{g(a_i)\colon a_i \in A_i\}\,,$$

která říká, že garanční výplata hráče i není menší než maximální garanční výplata pro ryzí strategie daného hráče; obvykle však platí v posledním vztahu ostrá nerovnost, jak jsme viděli ve hře se srovnáváním mincí.

Ve hře se srovnáváním mincí jsme zjistili, že $v(1) = 0$, kdežto $\max \{g(a_1), g(a_1')\} = -1$. V této hře má první hráč jedinou garanční strategii, kterou jsme nahoře označili $\tilde{s}_1$ a která přiřazuje každé z obou ryzích strategií prvního hráče pravděpodobnost $\frac{1}{2}$.

Množinu všech smíšených výsledků, které jsou garantovatelné pro koalici K, si pro příště označíme symbolem $v_\alpha(K)$. Index α se užívá v literatuře k vyznačení toho, že jde o garanci. Setkáme se ještě s indexem β, který bude charakterisovat pojem prevence, o němž pojednáme v dalších paragrafech. Množinu $v_\alpha(K)$ lze vyjádřit formulí:

$$v_\alpha(K) = \bigcup_{s_K \in S_K} G(s_K)\,, \tag{6.28}$$

v níž je symbolicky vyznačen nám známý fakt, že výsledek je garantovatelný pro koalici K, když a jen když je garantován některou smíšenou strategií této koalice. Speciálně pro jednočlennou koalici $K = \{i\}$ budeme psát kratčeji $v_\alpha(i)$. Snadno nahlédneme, že se garanční výplata hráče i dá vyjádřit vzorcem:

$$v(i) = \max \{u_i(\omega) : \omega \in v_\alpha(i)\}\,, \tag{6.28}$$

neboť mezi $g(s_i)$ a $G(s_i)$ pro $s_i \in S_i$ platí vztahy:

$$G(s_i) = \{\omega : \omega \in \Omega_E;\ u_i(\omega) \leqq g(s_i)\}\,, \quad g(s_i) = \max \{u_i(\omega) : \omega \in G(s_i)\}\,;$$

srovn. vztah (6.15) a text za ním následující.

Nakonec poznamenejme, že bychom mohli stejně jako v předcházejícím paragrafu definovat pojem výsledku garantovatelného dvojicí smíšených strategií dané koalice. Nedostali bychom tím však nic nového, protože každý takový výsledek by již byl garantován směsí těchto smíšených strategií (ve smyslu kapitoly 4 je pojem směsi smíšených strategií definován obdobně jako směs smíšených výsledků; srovn. (4.9)), což je opět smíšená strategie. Stejně tomu tak jest pro pojem výsledku garantovatelného soustavou smíšených strategií.

Na závěr chceme ještě znovu zdůraznit, že garanční výplata daného hráče představuje maximální užitek z výsledku, který si hráč může zaručit optimální volbou smíšené strategie, totiž volbou některé své garanční strategie.

Garanční hodnota hry

Doposud jsme vyšetřovali problém garance z hlediska jedné isolované koalice a nyní vezmeme v úvahu všechny možné koalice včetně prázdné. Jako dříve předpokládáme, že máme dánu strategickou hru (6.4) s vyznačenou kooperací, s kardinálními preferencemi a s pevně zvolenou soustavou užitkových funkcí $\{u_i\}_{i \in I}$, takže se na tuto hru můžeme dívat také jako na hru s užitkovými funkcemi (6.5), v níž je vyznačena kooperace. Navíc však učiníme předpoklad, že v této hře je každá koalice přípustná, což lze formálně zapsat jako požadavek, aby platilo: $\Psi(K) = \{K: K \subset I\}$. Speciálním případem takové hry je hra s volnou tvorbou koalic, tj. hra kooperativní. Vyšetřování, které budeme provádět, lze také chápat tak, že je dána hra ve tvaru (4.3), tj. bez vyznačení kooperace, přičemž se zkoumá, jaké možnosti mají všechny myslitelné koalice z hlediska garantovatelnosti výsledků bez přihlédnutí k tomu, zda mohou či nemohou fakticky vzniknout, tj. bez ohledu na to, zda jsou nebo nejsou přípustné.

Množinu všech smíšených výsledků, které jsou garantovatelné pro koalici K, jsme označili $v_\alpha(K)$, kde $K \subset I$, $K \neq \emptyset$; doplníme-li si definici (6.28) pro $K = \emptyset$ vztahem $v_\alpha(\emptyset) = \emptyset$, tj. smluvíme-li se na pojetí, že prázdná koalice si nemůže zaručit žádné výsledky, představuje symbol v_α funkci, jejímiž hodnotami jsou množiny smíšených výsledků a jež je definována na množině všech koalic, tj. pro libovolné $K \subset I$. Množině výsledků $v_\alpha(K)$, $K \subset I$, budeme říkat *garanční hodnota hry pro koalici K*. Výsledky, které jsou prvky garanční hodnoty hry pro koalici K, tj. garantovatelné pro tuto koalici, budeme nazývat také výsledky *α-dosažitelné* pro koalici K. Tato nová nomenklatura se opírá o skutečnost, že každý výsledek ω garantovatelný pro koalici K má vlastnost, že ho může koalice K dosáhnout vhodnou volbou některé své smíšené strategie, což znamená, že výsledek hry při jakékoli smíšené strategii antikoalice nemůže být pro koalici K horší než výsledek ω, srovnáváno podle jejího koaličního systému preferencí (srovn. (6.10)). Tuto vlastnost lze zapsat s pomocí obvyklých logických operátorů ve tvaru (srovn. (6.24)):

$$\exists(s_K \in S_K)\ \forall\,(s_{-K} \in S_{-K})\ \varrho(s_K, s_{-K})\ U_K\omega\,.$$

Poznámka. V posledním zápisu jsme použili dalšího symbolu $\exists$ označujícího tzv. existenční kvantifikátor (čili kvantor): $\exists(\ldots)$ čteme „existuje…“; přitom dvojice operátorů $\exists(\ldots)\ \forall(\ldots)$ představuje vlastně zkratku slovního vyjádření „existuje…, že pro všechna…“.

Vyslovená vlastnost α-dosažitelných výsledků platí jen pro koalici K, která je neprázdná. Tudíž definici garanční hodnoty hry jako funkce na množině všech koalic můžeme vyjádřit formulemi:

$$\text{(6.30)}\quad v_\alpha(K) = \{\omega\colon \omega \in \Omega_E;\ \exists(s_K \in S_K)\ \forall(s_{-K} \in S_{-K})\ \forall(i \in K)\ \varrho(s_K, s_{-K}) \gtrsim_i \omega\}$$

$$\text{pro}\quad \emptyset \neq K \subset I\,,$$

$$v_\alpha(\emptyset) = \emptyset\,;$$

srovn. se vzorcem (6.28), který platí pro $K \neq \emptyset$. Použijeme-li ve vyjádření (6.30) užitkových funkcí a z nich odvozených výplatních funkcí členů koalice K, dostaneme (srovn. (5.45) a dále (6.40)

$$\text{(6.31)}\quad v_\alpha(K) = \{\omega\colon \omega \in \Omega_E;\ \exists(s_K \in S_K)\ \forall(s_{-K} \in A_{-K})\ \forall(i \in K)\ H_i(s_K, s_{-K}) \geqslant u_i(\omega)\}$$

$$\text{pro}\ \emptyset \neq K \subset I.$$

Z vlastností množin $G(s_K)$, známých nám z předcházejících paragrafů (srovn. tvrzení (6.13) a jeho zobecnění v minulém paragrafu), vyplývá vzhledem k vyjádření (6.28) první základní vlastnost garanční hodnoty hry:

$$\text{(6.32)} \qquad \textit{když} \quad \omega \in v_\alpha(K), \quad \omega U_K \omega', \quad \textit{pak} \quad \omega' \in v_\alpha(K) ;$$

slovy, může-li některá koalice dosáhnout výsledku ω, pak může dosáhnout všech výsledků pro sebe horších anebo stejně dobrých. Druhá základní vlastnost garanční hodnoty hry se opírá o vlastnosti garantovaných výsledků, které nás vedly k zavedení pojmu garantovatelnosti (srovn. (6.16) a text této podmínce předcházející), a zní:

$$\textit{když} \quad \omega \in v_\alpha(K), \quad \omega' \in v_\alpha(K), \quad \textit{pak} \quad \lambda\omega + (1 - \lambda)\,\omega' \in v_\alpha(K) \quad \textit{pro } 0 \leqq \lambda \leqq 1 ;$$
(6.33)

slovy, jestliže některá koalice může dosáhnout jak výsledku ω, tak i výsledku ω', pak může dosáhnout kterékoli jejich směsi.

Množinu výsledků Ω' nazýváme *konvexní*, když pro libovolnou dvojici výsledků $\omega, \omega' \in \Omega'$ platí, že $\lambda\omega + (1 - \lambda)\,\omega' \in \Omega'$ pro každé $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Vlastnost (6.33) nám tedy říká, že *garanční hodnota hry je pro každou koalici konvexní množina výsledků.*

Třetí základní vlastnost garanční hodnoty hry, kterou lze odvodit z tzv. topologických vlastností prostoru smíšených strategií dané koalice, jimiž se však nebudeme zabývat, neboť vyžadují jemnějších prostředků matematické analysy, lze vyslovit nejstručněji takto: *garanční hodnota hry $v_\alpha(K)$, $K \subset I$, je množina výsledků uzavřená vzhledem ke koalici K.*

Poznámka. Nejjednodušší definici uzavřenosti množiny výsledků obdržíme, když v ní použijeme pojmu užitkové funkce. O množině výsledků Ω' pravíme, že je *uzavřená vzhledem ke koalici* K, jestliže platí:

když $\omega_n \in \Omega'$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $u_i(\omega_n) \to u_i(\omega)$ pro každé $i \in K$, pak $\omega \in \Omega'$.

Symbol $u_i(\omega_n) \to u_i(\omega)$ značí, že posloupnost čísel $u_i(\omega_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, konverguje k číslu $u_i(\omega)$, tj.

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(n_0)\ \forall(n \geqq n_0)\ u_i(\omega) - \varepsilon < u_i(\omega_n) < u_i(\omega) + \varepsilon .$$

Tedy třetí základní vlastnost garanční hodnoty hry lze zapsat ve tvaru:

(6.34) *když* $\omega_n \in v_\alpha(K)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $u_i(\omega_n) \to u_i(\omega)$ *pro každé* $i \in K$, *pak* $\omega \in v_\alpha(K)$.

Nejcharakterističtější vlastností garanční hodnoty hry z hlediska tvorby koalic je její čtvrtá základní vlastnost:

(6.35)
$$\textit{když} \quad K_1 \subset I\,,\ K_2 \subset I\,,\ K_1 \cap K_2 = \emptyset\,, \quad \textit{pak} \quad v_\alpha(K_1) \cup v_\alpha(K_2) \subset v_\alpha(K_1 \cup K_2) ;$$

slovy, dvě disjunktní koalice mohou společně dosáhnout všech výsledků, které jsou dosažitelné pro kteroukoli z nich. Utvoří-li tedy dvě koalice, jež nemají společné členy, novou koalici složenou právě ze všech členů obou koalic, dosáhnou tím nejméně tolik, co každá z nich zvlášť, ale mohou dosáhnout více.

Nakonec si všimněme, že když hráči vytvoří maximální koalici, tedy se všichni spojí k společnému postupu, mohou dosáhnout téměř každého výsledku, totiž každého výsledku, který je směsí ryzích smíšených výsledků, tj. ryzích výsledků v normalisovaném tvaru hry; platí totiž vztahy:

$$(6.36) \qquad v_\alpha(I) = \{\omega:\ \omega \in \Omega_E;\ \exists\,(\omega' \in [\Omega^0])\ \forall\,(i \in I)\ \omega' \succsim_i \omega\}\ ;$$

srovn. (4.5) a (4.18). Nahradíme-li smíšené výsledky výplatními vektory, lze ze vztahu (6.36) vyvodit, že maximální koalice dosáhne každého výplatního vektoru ležícího v redukovaném prostoru výplatních vektorů; srovn. definice (5.44) a (5.43). Ve znacích:

$$(6.37) \qquad v_\alpha(I) \supset \{\omega:\ \omega \in \Omega_E;\ u_I(\omega) \in \tilde{X}\}\ ;$$

srovn. (5.35).

Smíšené strategie maximální koalice, tj. koalice I, budeme nazývat *globální smíšené strategie* a označovat je generickým symbolem s místo s_I; prostor globálních smíšených strategií označíme S:

$$(6.38) \qquad S = S_I\,, \quad \text{tj.} \quad S = [A]$$

(srovn. definici (6.23)). Podle (5.49) lze vyjádřit redukovaný prostor výplatních vektorů formulí:

$$(6.39) \qquad \tilde{X} = \{H_I(s):\ s \in S\}\,,$$

kde jsme použili označení, které je ve shodě s předcházejícími paragrafy. Klademe totiž definitoricky:

$$(6.40) \qquad H_i(s) = u_i(\varrho(s))\,, \quad \varrho(s) = \sum_{a \in A} s(a)\,\varrho(a) \quad \text{pro} \quad s \in S\,, \quad i \in I\,,$$
$$H_I(s) = \{H_i(s)\}_{i \in I}\,.$$

Přitom z hypotézy o středním užitku (5.21) plyne pro střední výplatu $H_i(s)$ vyjádření uvedené ve speciálním tvaru již v minulém paragrafu:

$$H_i(s) = \sum_{a \in A} s(a)\,H_i(a)\,, \quad s \in S\,.$$

Opřeme-li se o formuli (6.39), která vyjadřuje, že redukovaný prostor výplatních vektorů je složen právě ze všech výplatních vektorů, jež jsou aposteriorně dosažitelné s pomocí některé globální smíšené strategie, vyvodíme platnost vztahu (6.36), a tím i (6.37), z formule (6.30), uvědomíme-li si, že antikoalice k maximální koalici je prázdná.

Dříve než přejdeme k dalšímu výkladu, smluvíme se na některých označeních. Pro každý výplatní vektor x, tj. $x \in X$ (srovn. (5.36)), $x = \{x_i\}_{i \in I}$, a pro každou koalici K bude symbol x_K označovat číselný K-vektor, jehož komponenty jsou výplaty členům koalice K pro výplatní vektor x: $x_K = \{x_j\}_{j \in K}$. Obecněji bude symbol x_K označovat jakýkoli číselný K-vektor, tj. zobrazení přiřazující každému prvku množiny K reálné číslo. Množinu všech číselných K-vektorů označíme R^K; tedy $x_K \in R^K$ znamená, že x_K je číselný K-vektor. Položíme definitoricky:

$$(6.41) \quad X_K = \{x_K: x \in X\} \quad \text{pro} \quad K \subset I\,; \quad \text{spec.} \quad X_i = \{x_i: x \in X\} \quad \text{pro} \quad i \in I\,.$$

X_K představuje množinu všech K-vektorů výplat členům koalice K pro všechny výplatní vektory; spec. X_i představuje množinu všech výplat hráči i pro všechny výplatní vektory.

Vyjděme z vyjádření (6.31) garanční hodnoty hry pro koalici K a nahraďme v něm výsledky K-vektory výplat členům koalice; dostaneme tak rovnost:

$$(6.42) \qquad v_\alpha(K) = \{\omega\colon \omega \in \Omega_E;\ u_K(\omega) \in \mathbf{v}_\alpha(K)\}\,,$$

kde ve shodě s předchozím odstavcem $u_K(\omega) = \{u_i(\omega)\}_{i \in K}$ a kde jsme položili

$$(6.43) \quad \mathbf{v}_\alpha(K) = \{x_K \in R^K\colon \exists(s_K \in S_K)\ \forall(s_{-K} \in S_{-K})\ \forall(i \in K)\ H_i(s_K, s_{-K}) \geqq x_i\}\,.$$

Množina $\mathbf{v}_\alpha(K)$ se nazývá (Aumann-Pelegova) *α-hodnota hry pro koalici K* a lze ji považovat za kanonické vyjádření garanční hodnoty hry pro danou koalici.

Z vlastností garanční hodnoty hry snadno odvodíme vlastnosti α-hodnoty hry. Píšeme-li pro $x_K, y_K \in R^K$ vztah $x_K \geqq y_K$, když a jen když $x_i \geqq y_i$ pro každé $i \in K$, lze vyslovit první základní vlastnosti α-hodnoty hry vzhledem k (6.32) jako tvrzení:

$$(6.44) \qquad \text{když} \quad x_K \in \mathbf{v}_\alpha(K)\,, \quad x_K \geqq y_K\,, \quad \text{pak} \quad y_K \in \mathbf{v}_\alpha(K)\,.$$

Obdobu vlastností (6.33) a (6.34) ze vyjádřit jako tvrzení, že α-hodnota hry $\mathbf{v}_\alpha(K)$ pro koalici K je konvexní a uzavřená množina v prostoru R^K.

Poznámka. Pojem konvexity množiny v prostoru R^k, tj. v eukleidovském prostoru, jsme definovali v poznámce uvedené v minulé kapitole a pro prostor R^K zůstane definice konvexní množiny beze změny. Uzavřená množina v eukleidovském prostoru je pojem běžně známý a nezmění se ani pro prostor R^K: množina $M \subset R^K$ je uzavřená (v prostoru R^K), když z platnosti vztahů $x_K^{(n)} \in M$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $x_K^{(n)} \to x_K$ plyne vztah $x_K \in M$; přitom předposlední vztah vyjadřuje konvergenci po souřadnicích, tj. $x_i^{(n)} \to x_i$ pro každé $i \in K$.

Charakteristickou vlastností α-hodnoty hry je ta, která se týká tvorby koalic a kterou zapíšeme (s jistou dávkou licence v označení) ve tvaru:

$$(6.45) \qquad \mathbf{v}_\alpha(K_1) \times \mathbf{v}_\alpha(K_2) \subset \mathbf{v}_\alpha(K_1 \cup K_2) \quad \text{pro} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset\,.$$

Slovy, množina všech dosažitelných vektorů výplat členům koalice, která se zformuje ze dvou různých koalic, zahrnuje všechny vektory výplat těmto členům, které jsou dosažitelné pro každou z obou koalic zvlášť.

Tudíž v_α je zobrazení, které přiřazuje každé koalici K některou množinu číselných K-vektorů, přičemž toto zobrazení má vlastnosti (6.44) a (6.45) a množina $v_\alpha(K)$ je pro každé $K \subset I$ uzavřená a konvexní v prostoru R^K. Jakékoli funkci na systému všech podmnožin množiny hráčů I, které má právě zmíněné vlastnosti, se říká *Aumann-Pelegova charakteristická funkce.* V našem případě jde o Aumann-Pelegovu charakteristickou funkci *pro garanci* neboli *garanční charakteristickou funkci* dané hry.

K pojmu charakteristické funkce ve smyslu Aumann-Pelegově se podrobněji vrátíme v příštích paragrafech. Zde jenom znovu připomeneme, že tuto charakteristickou funkci pro garanci — garanční charakteristickou funkci dané hry — lze považovat za kanonický tvar funkce v_α, kde již přejdeme od abstraktních výsledků k jejich číselnému vyjádření ve tvaru vektorů výplat jednotlivým hráčům.

Všimněme si nakonec, že základní vztah mezi garanční hodnotou hry a α-hodnotou hry lze vyjádřit podle (6.42) a (6.41) vzorcem:

$$X_K \cap v_\alpha(K) = \{u_K(\omega) \colon \omega \in v_\alpha(K)\}\ ; \quad u_K = \{u_i\}_{i \in K}\,.$$

Strategická hra v koaličním tvaru

Úvahy předcházejícího paragrafu nám umožňují přejít k nejvyabstrahovanějšímu modelu konfliktní situace, v němž si nevšímáme vlastních strategických aspektů konfliktu, nýbrž spíše konečných výsledků dosažitelných jednotlivými koalicemi. Jde o matematické modely konfliktních situací, na něž jsme upozornili v úvodní kapitole a jimž říkáme strategické hry v koaličním tvaru. *Pravidla hry v koaličním tvaru* jsou charakterisována tím, že pro každou koalici K (tj. $K \subset I$) je stanovena množina těch výsledků ω (rozumí se obecně smíšených, tj. $\omega \in \Omega_E$), kterých může koalice K společným postupem dosáhnout; tuto množinu výsledků „dosažitelných" pro koalici K označíme symbolem $v(K)$. Jak interpretovat pojem „dosažitelnosti", není apriorně nikterak vymezeno. Poněvadž zatím nejde o hru s vyznačenou kooperací, pohlížíme na údaj $v(K)$ jako na množinu těch výsledků, jichž by mohla koalice K dosáhnout, kdyby se mohla utvořit. Je ovšem zřejmé, že v tomto popisu pravidel hry je právě tvorba koalic hlavním aspektem konfliktní situace, o který se zajímáme.

Tudíž v je funkce na systému všech podmnožin množiny hráčů I, která každé množině $K \subset I$ přiřazuje jako hodnotu nějakou množinu $v(K)$ smíšených výsledků: $v(K) \subset \Omega_E$; funkci v nazýváme *koaliční výsledková funkce*, když splňuje tyto požadavky:

(1) Množina $v(K)$ je konická vzhledem ke koalici K, což znamená, že vyhovuje podmínce: když $\omega \in v(K)$, $\omega \succsim_i \omega'$ pro každé $i \in K$, pak rovněž $\omega' \in v(K)$; srovn. (6.32).

(2) Množina $v(K)$ je konvexní (srovn. (6.33)), přičemž $v(\emptyset) = \emptyset$ a $v(K) \neq \emptyset$ pro $K \neq \emptyset$.

(3) Množina $v(K)$ je uzavřená vzhledem ke koalici K; srovn. (6.34).

(4) Funkce v je superaditivní, což znamená, že má vlastnost:

$$v(K_1) \cup v(K_2) \subset v(K_1 \cup K_2) \quad \text{pro} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset ,$$

kde $K_1 \subset I$, $K_2 \subset I$; srovn. (6.35).

Interpretujeme-li koaliční výsledkovou funkci jako garanční hodnotu hry v normálním tvaru, jeví se nám shora uvedené podmínky zcela přirozenými. Požadavek (1) stejně jako tvar definice garanční hodnoty hry je však spíše diktován formálně matematickými potřebami a bylo by možné jej modifikovat; lze ho zdůvodnit např. tak, že si každá koalice může výsledky, které má ve svém dosahu, libovolně zhoršovat. Požadavek (2) mezi jiným říká, že každá neprázdná koalice může dosáhnout alespoň jednoho výsledku. Nejdůležitější je požadavek superaditivity, který zaručuje, že sdruží-li se dvě koalice bez společných členů, mohou dosáhnout společným postupem nejméně těch výsledků, které jsou v dosahu každé z nich.

Všimněme si, že neoddělitelnou součást definice koaliční výsledkové funkce tvoří podle požadavku (1) systémy preferencí hráčů, tj. celé preferenční schéma hry, takže pravidla hry v koaličním tvaru, jež jsou popsána koaliční výsledkovou funkcí, nemají charakter komponenty objektivní base hry. Objektivního charakteru pravidel hry by bylo snadné dosíci zavedením nejprve pomocné koaliční výsledkové funkce nevyhovující požadavku (1), a to za cenu komplikovanější definice; z této pomocné funkce bychom s pomocí preferenčního schématu hry odvodili koaliční výsledkovou funkci splňující shora uvedené čtyři požadavky. Tímto postupem bychom si zachovali možnost rozložit i hru v koaličním tvaru formálně na objektivní a na subjektivní složku.

Strategická hra v koaličním tvaru je definována jako čtveřice

$$(6.46) \qquad (I, \Omega, \{U_i\}_{i \in I}, v) ,$$

v níž první tři členy mají obvyklý význam (srovn. kap. 1) a čtvrtý člen v představuje koaliční výsledkovou funkci, tj. funkci splňující shora uvedené požadavky (1) až (4); přitom se činí předpoklad, že prostor výsledků Ω vyhovuje požadavku:

$$(6.47) \qquad v(I) \subset \Omega .$$

Tento předpoklad lze jednodušeji nahradit požadavkem, aby prostor výsledků byl totožný s prostorem smíšených výsledků, tj. $\Omega = \Omega_E$, čili aby preferenční schéma hry bylo definováno na celém prostoru smíšených výsledků. Ze superaditivity funkce v dostaneme vztah:

$$(6.48) \qquad v(K) \subset v(I) \quad \text{pro} \quad K \subset I .$$

Množina $v(I)$ tedy představuje maximální množinu těch výsledků, které jsou pro hráče dosažitelné. Mezi těmito dosažitelnými výsledky nemusí být žádný, který by byl elementární. To snadno nahlédneme, interpretujeme-li koaliční výsledkovou funkci ve smyslu garance, neboť každý z výsledků jsoucích v dosahu hráčů může být pod vlivem náhodových faktorů; srovn. (6.36), (4.5) a (4.25).

Podmínka (6.47) má ovšem zajistit, aby jednotliví hráči hodnotili z hlediska svých osobních preferencí všechny dosažitelné výsledky. Pokud se týče pravidel hry v koaličním tvaru, vyplývá ze schematického popisu konfliktní situace, který jsme uvedli na začátku první kapitoly, že pravidla hry mají představovat matematický popis možností, jimiž účastníci konfliktu disponují, aby ovlivnili výsledek, spolu se způsobem určení finálního výsledku. Koaliční výsledková funkce, která je vyjádřením pravidel hry tvaru (6.46), popisuje tyto možnosti i způsob určení fakti kého výsledku jenom nepřímo, takže není divu, že *pravidlům hry v koaličním tvaru nelze dát jednoznačný výklad*. S tímto jevem se setkáváme poprvé: v matematických modelech konfliktních situací daných na úrovni strategií nebo rozvinutých v čase byly jak možnosti hráčů, tak i způsoby stanovení výsledku formálně popsány přímo, takže o způsobu jejich interpretace nemohlo být žádných pochyb; na druhé straně pojem „dosažitelnosti" je dosti vágní. Uvidíme, že pojmu dosažitelnosti je možno dát s plným oprávněním i takový výklad, který je nejenom odlišný od pojmu garantovatelnosti, ale který nám ani neumožní učinit si obraz o způsobu ovlivnění finálního výsledku. Doplňme ještě, že pravidla hry vyjádřená koaliční výsledkovou funkcí nelze rozumně interpretovat ani z hlediska garantovatelnosti bez jejich rozšíření: přitom množina všech přípustných koaličních struktur tvořící součást rozšířených pravidel hry by měla být dosti bohatá, aby byl dostatečný počet přípustných koalic, které se mohou realisovat a garantovat si pro sebe dosažitelné výsledky. Tudíž interpretujeme-li hodnoty koaliční výsledkové funkce jako množiny výsledků garantovatelných pro přípustné koalice, lze chápat pravidla hry dané čtveřicí (6.46) takto:

Je-li v koaliční výsledková funkce a je-li $\mathbf{K}$ množina všech přípustných koaličních struktur, tvoří dvojice $(\mathbf{K}, v)$ tzv. *rozšířená pravidla hry v koaličním tvaru*, která obvykle interpretujeme podle zásady:

Princip realisace rozšířených pravidel hry v koaličním tvaru: Před zahájením hry se hráči z I dohadují, až vznikne přípustná koaliční struktura $\mathscr{K} \in \mathbf{K}$. Každá koalice $K \in \mathscr{K}$ učiní dohodu o společné volbě pro ni dosažitelného výsledku, označme jej ω_K, tj. $\omega_K \in v(K)$, a to nezávisle na ostatních koalicích. Hra se skončí některým výsledkem $\omega \in \Omega$, který má vlastnost, že $\omega \succsim_i \omega_K$ pro každého člena i koalice K, a to pro každou koalici $K \in \mathscr{K}$.

Podle uvedeného principu se ve hře v koaličním tvaru jednání hráčů explicitně projeví jenom při hledání vzájemné dohody o dosažitelném výsledku uvnitř koalic realisované koaliční struktury, odhlédneme-li od vyjednávání před vznikem koalic. Tudíž hráči ovlivní výsledek dvojím způsobem: především vstupem do přípustné koalice a potom tím, že si zaručí, aby faktický výsledek nebyl horší z hlediska jejich osobních preferencí než výsledky dohodnuté v rámci utvořených koalic a ležící v dosahu těchto koalic. Uvedený způsob interpretace koaliční výsledkové funkce, jak jsme již upozornili, není jediný možný: budeme jej nazývat *garančním principem* realisace pravidel hry (6.46).

Jednání hráčů tedy směřuje k nalezení dohod o dosažitelných výsledcích uvnitř vzniklých koalic, takže se vnějšímu pozorovateli nutně jeví jako jednání celých koalic. Smysl systémů preferencí jednotlivých hráčů, o nichž budeme vždy předpokládat, že tvoří preferenční stupnice, nemůže plně vysvětlit motivaci jednání utvořených koalic, tj. motivaci jejich volby dosažitelného výsledku. Vycházíme ze dvou odlišných zásad motivace koaličního jednání, z nichž každá odpovídá jinému pojetí vyjednávání uvnitř jedné a téže koalice. Jsou to:

I. princip motivace dohod (o volbě dosažitelného výsledku): Každá ve hře realisovaná koalice K se řídí při hledání dohody o volbě dosažitelného výsledku (tzv. meze dosažitelnosti) výhradně podle svého koaličního systému preferencí U_K. To znamená že ze dvou výsledků ω a ω', které jsou pro koalici K dosažitelné a z nichž je výsledek ω koalicí K slabě preferován proti výsledku ω', tj. $\omega U_K \omega'$, přičemž alespoň jeden člen i koalice K preferuje ω proti ω', tj. $\omega \succ_i \omega'$, koalice K nikdy nezvolí výsledek ω'.

II. princip motivace dohod: Každý člen i realisované koalice K se řídí při hledání dohody s ostatními členy koalice o volbě dosažitelného výsledku výhradně podle svého vlastního systému preferencí U_i. To znamená, že ze dvou výsledků ω a ω', které jsou pro koalici K dosažitelné a z nichž je výsledek ω preferován proti výsledku ω' každým členem koalice K zvlášť, tj. $\omega \succ_i \omega'$ pro každé $i \in K$, koalice K nikdy nezvolí výsledek ω'.

Druhý princip koaličního jednání je v jistém smyslu důslednější než první princip. Vychází z pojetí, že kdyby třeba jen pro jednoho člena i realisované koalice K byla porušena podmínka $\omega \succ_i \omega'$, např. by bylo $\omega \sim_i \omega'$, neměl by hráč i důvod preferovat dohodu $\omega_K = \omega$ proti dohodě $\omega_K = \omega'$: systém preferencí každého hráče má totiž zachycovat všechny nuance jeho postoje k možným výsledkům, a tedy i ty, které se týkají jeho chování v koalicích.

První princip se opírá o stanovisko, že je-li podmínka $\omega \succ_i \omega'$ splněna již pro jediného člena i koalice K, i když postoj ostatních členů koalice je indiferentní, tj. $\omega \sim_j \omega'$ pro $j \neq i$ ($j \in K$), pak pro koalici K jeho celek je výsledek ω žádoucnější: toto stanovisko vyjadřuje ochotu členů koalice k dohodě v případě, kdy je ústupek ve volbě dosažitelného výsledku nepoškodí, třebaže jim nemusí přinést prospěch. První princip koaličního jednání tedy v sobě odráží silnější ochotu ke spolupráci než druhý princip: budeme proto někdy mluvit o *silnějším* principu motivace dohod na rozdíl od *slabšího* principu druhého.

Prvnímu principu motivace dohod odpovídá pojem výsledku maximálně dosažitelného pro danou koalici. Výsledek $\omega \in v(K)$ se nazývá *maximálně dosažitelný pro koalici K*, když neexistuje výsledek dosažitelný pro koalici K, který by byl preferován koalicí K proti výsledku ω, což znamená, že neexistuje $\omega' \in v(K)$ splňující vztahy: $\omega' U_K \omega$ a $\omega' \succ_i \omega$ pro některé $i \in K$. Spec. je-li $K = I$, nazývá se výsledek maximálně dosažitelný pro maximální koalici I stručněji *maximálně dosažitelný výsledek v dané hře* (6.46). Všimněme si, že množina všech výsledků maximálně dosažitelných pro danou koalici K představuje oblast vyjednávání, z níž členové koalice společně volí, pokud se chtějí chovat racionálně, spodní mez dosažitelnosti ω_K.

Druhému principu motivace dohod by odpovídal analogický pojem jiného typu maximální dosažitelnosti, který zavedeme jen pro případ maximální koalice I. Říkáme, že výsledek ω je *hromadně racionální*, když $\omega \in v(I)$ — je pro hráče dosažitelný — a když neexistuje výsledek $\omega' \in v(I)$, pro který by bylo současně $\omega' \succ_i \omega$ pro všechna $i \in I$. Platí tvrzení:

Každý výsledek maximálně dosažitelný v dané hře v koaličním tvaru je již hromadně racionální; ale nikoli obráceně.

Uvidíme, že hromadně racionální výsledky jsou právě ty, jichž se racionální účastníci konfliktu snaží dosáhnout, i když jeví slabší ochotu ke spolupráci ve smyslu druhého principu koaličního jednání, a to bez ohledu na to, která přípustná koaliční struktura při realisaci hry vznikne. Všimneme si otázky racionality hráčů vystupujících ve hře v koaličním tvaru nyní trochu blíže.

Víme již, že *strategická hra v koaličním tvaru s vyznačenou kooperací* je podle definice čtveřice mající tvar (6.4), kde pravidla hry jsou representována koaliční výsledkovou funkcí, tj. $\Pi = v$. Abychom mohli hráče účastnící se této hry považovat za racionální, musíme především suponovat, že jde o hru s kardinálními preferencemi. Popis konfliktní situace údaji (6.4) s pravidly hry $\Pi = v$ znamená podstatné oslabení znalostí o konfliktu. Proto při našem vyšetřování racinálního jednání ve hrách v koaličním tvaru musíme vycházet z takového základního postulátu racionality, v němž se obráží fakticky omezená znalost konfliktní situace:

Postulát o znalosti hry v koaličním tvaru: Každý hráč zná všechny údaje o dané strategické hře, což vyžaduje

(1) úplnou znalost *subjektivní base* hry, tj. kardinálních preferenčních stupnic všech hráčů, a tím i množiny hráčů a prostoru smíšených výsledků;

(2) úplnou znalost *rozšířených pravidel* hry, tj. množiny všech přípustných koaličních struktur (a tím i přípustných koalic) a koaliční výsledkové funkce;

(3) správnou interpretaci všech dat, a to interpretaci rozšířených pravidel hry podle *principu jejich realisace* a interpretaci subjektivních charakteristik přípustných koalic podle *principu motivace dohod*: tzn. že hráč musí vědět, zda má interpretovat rozšířená pravidla hry podle garančního principu jejich realisace nebo podle jiného a kterého a zda má interpretovat subjektivní charakteristiky koalic (srov. (6.9)) podle *silnějšího* nebo podle *slabšího* principu motivace dohod.

Postulát o znalosti hry v koaličním tvaru nutně zahrnuje znalost rozšířených pravidel hry, neboť hlavním účelem zavedení tohoto matematického popisu konfliktu je studium tvorby koalic. V případě vyznačené kooperace, v níž je každá koalice přípustná, interpretujeme subjektivní charakteristiku každé realisované koalice obvykle podle druhého, slabšího principu motivace dohod: opíráme se přitom o stanovisko, že svoboda při vytváření koalic umožňuje každému hráči volně manévrovat se svým členstvím v koalicích a hrozbou výstupu z koalice případně nepřipustit změnu dohody, když mu to nepřinese prospěch. Ve hrách s nucenou kooperací většinou vycházíme z prvního, silnějšího principu motivace dohod: lze se domnívat, že hráči nucení vstoupit do určité koalice projevují větší ochotu spolupracovat.

Zavedení pojmu koaliční výsledkové funkce, a tím i hry v koaličním tvaru bylo motivováno rozborem pojmu garance. Nahradíme-li danou hru v normálním tvaru (s kardinálními preferencemi) odvozenou hrou v koaličním tvaru, jejíž subjektivní base zůstane beze změny a jejíž pravidla daná ve tvaru koaliční výsledkové funkce jsou odvozena z normalisovaných pravidel na základě vhodného principu, jako je např. garanční princip, říkáme tomuto přechodu *komprimování dat* normalisované hry *do koaličního tvaru*: jde tu v podstatě o přechod od normalisované výsledkové funkce ke koaliční. Spec. je-li koaliční výsledková funkce definována s pomocí normalisovaných pravidel tvaru (1.4) a subjektivní base hry (srovn. (4.30)) rovnicí $v = v_\alpha$, tj. vztahy (6.30), kde tedy $v(K)$ je garanční hodnota hry pro koalici $K(K \subset I)$, nazýváme odvozenou hru *koaličním tvarem* dané hry v normálním tvaru *pro garanci*.

Poznáme ještě jiný způsob komprimování dat hry v normálním tvaru, který je založen na pojmu prevence; existují ovšem ještě další způsoby komprimování dat. Přechod od normalisovaného tvaru ke koaličnímu tvaru lze tedy založit nejenom na pojmu garance, nýbrž i na jiných principech, takže není jednoznačný, neboť každému z těchto principů odpovídá jiná koaliční výsledková funkce. Na rozdíl od této skutečnosti je přechod od rozvinutého tvaru k normalisovanému zcela jednoznačný, ježto jej lze založit jedině na pojmu strategie.

Nakonec poznamenejme, že interpretační zásady týkající se motivace koaličního jednání lze snadno rozšířit na ostatní nám známé typy her s vyznačenou kooperací: v těch je koaliční jednání charakterisováno volbou sdružené strategie koalice nebo směsi takových strategií. Tím dostaneme *první* a *druhý princip motivace dohod o volbě* (obecně smíšených) *strategií* realisovaných koalic. Přitom postulát o znalosti hry doplňujeme nejenom požadavkem, aby každý hráč znal rozšířená pravidla hry, ale také principem motivace dohod, kterým se hráči řídí při vyjednávání o volbě sdružených strategií v koalicích. O racionálním hráči mlčky předpokládáme, že umí pracovat se smíšenými strategiemi („znalost" prostorů S_K pro $K \in \Psi(K)$; srovn. (6.23)) a že dovede převést hru z normálního tvaru na kterýkoli komprimovaný koaliční tvar, který při analyse konfliktní situace připadá v úvahu.

Strategická hra ve tvaru s charakteristickou funkcí

Strategická hra s užitkovými funkcemi v koaličním tvaru je definována podle předcházející kapitoly jako čtveřice (5.55), v níž Π jsou pravidla hry daná koaliční výsledkovou funkcí, tj. $\Pi = v$, přičemž $\{u_i\}_{i \in I}$ je soustava užitkových funkcí dané hry. Hru v koaličním tvaru s kardinálními preferencemi snadno převedeme na tvar (5.55), jsou-li dány počáteční podmínky (5.29) kladené na užitkové funkce, ježto jimi je soustava užitkových funkcí dané hry určena jednoznačně. S pomocí užitkových funkcí a koaliční výsledkové funkce definujeme (Aumannovu-Pelegovu) *charakteristickou funkci* $\mathfrak{v}$ hry v koaličním tvaru s kardinálními preferencemi $(I, \Omega_E, \{U_i\}_{i \in I}, v)$ resp. s užitkovými funkcemi $(I, \Omega_E, \{u_i\}_{i \in I}, v)$ rovnicí

$$(6.49) \qquad \mathfrak{v}(K) = \{x_K \in R^K : \exists(\omega \in v(K))\, x_K \leqq u_K(\omega)\}\,, \quad K \subset I\,,$$

kde $u_K(\omega) = \{u_i(\omega)\}_{i \in K}$, přičemž nerovnost v (6.49) znamená její platnost pro všechny souřadnice obou K-vektorů; srovn. (6.44) a text této podmínce předcházející. Charakteristická funkce představuje kanonické vyjádření koaliční výsledkové funkce: srovn. definici (6.43) spolu se vztahem (6.42).

Charakteristická funkce $\mathfrak{v}$ přiřazuje každé myslitelné koalici K jako hodnotu některou množinu číselných K-vektorů: $\mathfrak{v}(K) \subset R^K$ $(K \neq \emptyset)$. Z požadavků kladených na koaliční výsledkovou funkci plyne, že charakteristická funkce $\mathfrak{v}$ má tyto vlastnosti:

(1) $\mathfrak{v}(K)$ je *konická* množina v prostoru R^K: když $x_K \in \mathfrak{v}(K)$, $x_K \geqq y_K$, pak $y_K \in \in \mathfrak{v}(K)$; srovn. (6.44). Znamená to, že s každým K-vektorem x_K obsahuje celý „kužel" K-vektorů $\{y_K : y_K \leqq x_K\}$ s vrcholem x_K.

(2) $\mathfrak{v}(K) = \emptyset$ pro $K = \emptyset$ a $\mathfrak{v}(K)$ pro $K \neq \emptyset$ je neprázdná *konvexní* množina v prostoru R^K: když $x_K \in \mathfrak{v}(K)$, $y_K \in \mathfrak{v}(K)$, pak $\lambda x_K + (1 - \lambda)\, y_K \in \mathfrak{v}(K)$ pro $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Znamená to, že s každými dvěma body x_K a y_K obsahuje celou „úsečku" $\{\lambda x_K + (1 - \lambda)\, y_K : 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$.

(3) $\mathfrak{v}(K)$ je *uzavřená* množina v prostoru R^K.

(4) v je *superaditivní* funkce: pro $K_1 \subset I$, $K_2 \subset I$ platí, že

$$v(K_1) \times v(K_2) \subset v(K_1 \cup K_2) \quad \text{pro} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset\,;$$

srovn. (6.45). Kartézský součin na levé straně poslední inkluse představuje množinu všech $(K_1 \cup K_2)$-vektorů $x_{K_1 \cup K_2} = \{x_i\}_{i \in K_1 \cup K_2}$, které vzniknou z některého K_1-vektoru $\{x_i\}_{i \in K_1}$ ležícího v množině $v(K_1)$ a z některého K_2-vektoru $\{x_i\}_{i \in K_2}$ ležícího v množině $v(K_2)$.

Trojice (I, X, v), kde X je prostor výplatních vektorů definovaný v (5.36) a kde v je charakteristická funkce odvozená z koaliční výsledkové funkce podle (6.49), representuje *kanonický tvar* hry s kardinálními preferencemi resp. s užitkovými funkcemi dané v koaličním tvaru; o tomto kanonickém tvaru platí obdobné poznámky, jako byly uvedeny v minulé kapitole pro kanonický tvar (5.50). Přitom množiny $X_K \cap v(K)$ se skládají z K-vektorů výplat členům koalice K, které jsou pro tuto koalici dosažitelné (srovn. (6.41)). Současně platí vztahy:

$$(6.50) \qquad X_K \cap v(K) = \{u_K(\omega) \colon \omega \in \nu(K)\} \neq \emptyset \quad \text{pro} \quad K \neq \emptyset\,;$$

$$(6.51) \qquad \nu(K) = \{\omega \colon \omega \in \Omega_E;\ u_K(\omega) \in v(K)\}\,;$$

srovn. (6.42).

Převedeme-li hru s kardinálními preferencemi resp. s užitkovými funkcemi danou v normálním tvaru komprimováním dat na koaliční tvar pro garanci (tj. $\nu = \nu_\alpha$) a definujeme-li charakteristickou funkci komprimovaného koaličního tvaru hry podle (6.49), dostaneme tímto postupem právě garanční charakteristickou funkci výchozí hry: tedy převedením komprimovaného koaličního tvaru na kanonický tvar (I, X, v) dostaneme totéž, jako když nejprve vyjádříme výchozí hru v kanonickém tvaru (5.50) a z něho vycházejíce zavedeme garanční charakteristickou funkci definicí (6.43); jinak řečeno, platí rovnost $v = v_\alpha$.

Učiňme předpoklad, že hra v koaličním tvaru (6.46) splňuje požadavek, že pro některou neprázdnou konečnou množinu výsledků, označme ji $\Omega^{(0)}$, platí rovnost:

$$(6.52) \qquad \nu(I) = \{\omega \colon \omega \in \Omega_E;\ \exists(\omega' \in [\Omega^{(0)}])\ \forall\,(i \in I)\ \omega' \succsim_i \omega\}\,;$$

slovy, $\nu(I)$ je tzv. *konické rozšíření* konvexního obalu některé konečné množiny výsledků. Spec. garanční hodnota $\nu_\alpha(I)$ hry v normálním tvaru tomuto požadavku vyhovuje, jak je uvedeno v (6.36). Danou množinu $\Omega^{(0)}$, pro niž platí rovnost (6.52), budeme nazývat stejně jako pro normalisovaný tvar *prostorem ryzích výsledků* dané hry (6.46). Z ní odvodíme *redukovaný prostor výplatních vektorů* $\tilde{X}$ vztahy (5.44) a (5.43) pro případ, že jde o hru s kardinálními preferencemi, a to za předpokladu fixované soustavy užitkových funkcí. Přitom trojici $(I, \tilde{X}, v)$ považujeme za redukovaný kanonický tvar dané hry s koaliční výsledkovou funkcí splňující podmínku (6.52). Charakteristická funkce v vystupující v tomto redukovaném kanonickém tvaru vyhovuje navíc podmínce:

$$(6.53) \qquad v(I) = \{x \colon x \in R^I;\ \exists(y \in \tilde{X})\ y \geqq x\}\,;$$

lze ji charakterisovat slovy, že maximální množina pro hráče dosažitelných výplatních vektorů je tzv. *konickým rozšířením* redukovaného prostoru výplatních vektorů.

Hromadně racionální výsledky ve hře s koaliční výsledkovou funkcí vychovující podmínce (6.52) leží vesměs v konvexním obalu prostoru ryzích výsledků, tj. v $[\Omega^{(0)}]$. Podle tvrzení uvedeného v minulém paragrafu leží v $[\Omega^{(0)}]$ tím spíše všechny výsledky v dané hře maximálně dosažitelné.

Na redukovaný kanonický tvar $(I, \tilde{X}, v)$ převádíme obvykle jenom ty hry v koaličním tvaru, které neobsahují žádné indiferentní hráče: opouštíme i nepřímou znalost o elementárních výplatních vektorech, redukujíce prostor X na prostor $\tilde{X}$, a tím jsme ochuzeni o možnost případné indiferenty rozeznat; srovn. úvahy páté kapitoly.

Redukovaný kanonický tvar (5.51) hry dané na úrovni strategií lze přímo převést na redukovaný kanonický tvar s garanční charakteristickou funkcí zavedením prostoru $\tilde{X}$ definicí (5.49) resp. (6.39) spolu s (6.40) a funkce v_α definicí (6.43). Tímto postupem se v literatuře obyčejně komprimuje *normální hra* podle garančního principu na tvar s Aumannovou-Pelegovou charakteristickou funkcí.

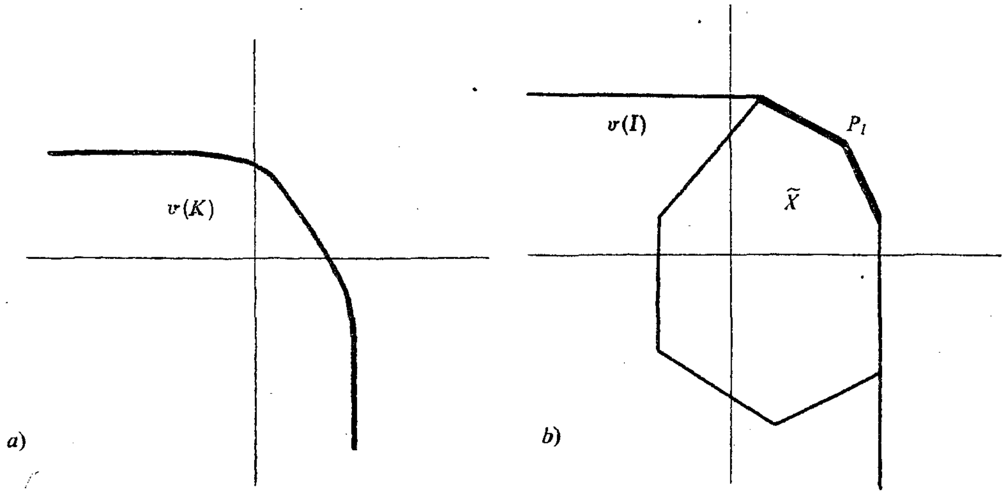
Konvexní obal konečné množiny ležící v n-rozměrném eukleidovském prostoru R^n (nebo obecněji v prostoru R^I, kde I je konečná množina: ve hře jest $n = |I|$) má název *konvexní polyedr* neboli *mnohostěn*; určitěji n-rozměrný kompaktní konvexní polyedr. Lze tedy říci, že podle (6.53) je množina $v(I)$ konickým rozšířením jistého konvexního polyedru ležícího v prostoru R^I, totiž konvexního polyedru $\tilde{X}$.

Víme již z dřívějších paragrafů, že jakákoli funkce v splňující požadavky (1) až (4), a tedy nejenom ta, která je odvozena z koaliční výsledkové funkce, je nazývána *Aumannovou-Pelegovou charakteristickou funkcí.* Libovolná trojice $(I, \tilde{X}, v)$, kde I je konečná množina, $\tilde{X}$ je konvexní polyedr a v je Aumannova-Pelegova charakteristická funkce splňující podmínku o konickém rozšíření (6.53), se nazývá strategická *hra ve tvaru s Aumannovou-Pelegovou charakteristickou funkcí,* nebo kratčeji, *hra s abstraktní charakteristickou funkcí* (na rozdíl od her s číselnou charakteristickou funkcí). Hry $(I, \tilde{X}, v)$ a $(I', \tilde{X}', v')$ považujeme za *v podstatě stejné,* když $I' = I$ (obě hry mají tytéž hráče) a když lze najít reálná čísla $\alpha_i > 0$ a β_i $(i \in I)$ taková, že platí

$$v'(K) = \left\{\{\alpha_i x_i + \beta_i\}_{i\in K}: \{x_i\}_{i\in K} \in v(K)\right\}, \quad K \subset I ;$$
$$\tilde{X}' = \left\{\{\alpha_i x_i + \beta_i\}_{i\in I}: x \in \tilde{X}\right\}.$$

Hodnoty abstraktní charakteristické funkce obvykle interpretujeme z hlediska garance, tj. jako by to byly α-hodnoty hry (srovn. paragraf věn vaný garanční hodnotě hry): $v(K)$ intuitivně chápeme jako množinu všech „výplat“ (tj. číselných K-vektorů), které si koalice K může zabezpečit, rozumí se vhodným společným postupem členů koalice; jak vypadá takový společný postup hráčů sdružených do koalice, není ovšem pravidly hry explicitně popsáno. Odůvodnění konicity charakteristické funkce je stejné jako pro koaliční výsledkovou funkci: koalice K si může zaručit s každou „výplatou“ i kteroukoli „výplatu“ horší. Konvexita intuitivně plyne ze skutečnosti, že hráči mohou sdružovat a směšovat své strategie k zabezpečení pro ně přijatelného výsledku. Uzavřenost je matematickým důsledkem definice α-hodnoty hry (srovn. definici (6.43)) a v apriorní definici charakteristické funkce vystupuje proto, že se s uzavřenými množinami v matematice pohodlněji pracuje: je splněna ve všech „rozumných“ aplikacích teorie. Smysl požadavku superaditivity je nám již dobře znám.

Na následujícím prvním obrázku je zakreslen útvar v rovině, který představuje typickou ukázku konické konvexní uzavřené množiny ve dvou dimensích: ukazuje formu, jakou může mít hodnota $v(K)$ charakteristické funkce, je-li počet členů koalice $|K| = 2$. (Souřadnicové osy na obrázku vyznačené mají obvyklou orientaci; množina $v(K)$ se skládá ze všech bodů v rovině ležících pod křivkou tvořící její hranici, body ležící na křivce v to počítaje.) Druhý obrázek ukazuje, jakou formu může mít množina $v(I)$ a polyedr $\tilde{X}$ v případě hry o dvou hráčích: $v(I)$ je konickým rozšířením mnohoúhelníku $\tilde{X}$ (podmínka (6.53)): $v(I) \supset \tilde{X}$ (dvojrozměrný polyedr je mnohoúhelník).



Také pro abstraktní charakteristickou funkci platí stejně jako pro koaliční výsledkovou funkci, že je jí možno dát i jiný výklad, než který plyne z hlediska garance, tj. pojem dosažitelnosti „výplat" lze chápat v nejrůznějším smyslu. Z intuitivního hlediska platí při jakékoli interpretaci charakteristické funkce, že jednání hráčů má směřovat k utvoření pro ně výhodných koalic a k nalezení dohod o dosažitelných „výplatách" v rámci uskutečněných koalic. Jednání koalice ako celku je motivováno podle zásad, odpovídajících větší či menší ochotě ke spolupráci:

I. princip motivace dohod (o volbě dosažitelných výplat): Realisovaná koalice K ze dvou K-vektorů x_K a y_K nikdy nezvolí K-vektor y_K, když pro něj platí, že $x_K \geqq y_K$ a $x_K \neq y_K$.

II. princip motivace dohod: Realisovaná koalice K ze dvou K-vektorů $\{x_i\}_{i \in K}$ a $\{y_i\}_{i \in K}$ nikdy nezvolí druhý z nich, když pro něj platí, že $x_i > y_i$ pro každého člena i koalice K.

Vycházejíce z prvního silnějšího principu motivace dohod, zavedeme pojem *Paretovy optimální množiny pro koalici K*, označme tuto množinu symbolem P_k, definicí

$$(6.54) \quad P_K = \{x_K : x_K \in v(K); \forall (y_K \in v(K)) \text{ když } y_K \neq x_K, \text{ pak není } y_K \geqq x_K\} ;$$

prvky množiny P_K jsou kvantitativními protějšky výsledků maximálně dosažitelných pro koalici K ve hře s koaliční výsledkovou funkcí. *Paretova optimální množina* dané *hry s abstraktní charakteristickou funkcí* je definována jako množina P_K pro

$K = I$, tj. pro maximální koalici. Každý prvek množiny P_I leží v redukovaném prostoru výplatních vektorů:

$$(6.55) \qquad P_I \subset \tilde{X} ;$$

tudíž všechny číselné I-vektory ležící v Paretově optimální množině dané hry jsou výplatní vektory.

Všimněme si, že Paretova optimální množina pro danou koalici representuje oblast vyjednávání, z níž racionální členové koalice, kteří projevují silnější snahu o kooperaci, volí spodní mez dosažitelnosti svých výplat.

Na uvedeném druhém obrázku vidíme, že se v uvažovaném případě Paretova optimální množina hry skládá právě z bodů obou tučně vyznačených úseček.

Druhý princip motivace dohod indukuje pojem hromadně racionálního výplatního vektoru (a obecněji číselného I-vektoru): číselný I-vektor x je podle definice *hromadně racionální*, když neexistuje číselný I-vektor $y \in \boldsymbol{v}(I)$, pro který by platily nerovnosti $y_i > x_i$ pro všechna $i \in I$; je-li $x \in \tilde{X}$, mluvíme o *hromadně racionálním výplatním vektoru*. Platí, že *všechny výplatní vektory ležící v Paretově optimální množině dané hry s abstraktní charakteristickou funkcí jsou hromadně racionální.*

Z vlastností charakteristické funkce $\boldsymbol{v}$ plyne, že číselná množina $\boldsymbol{v}(\{i\})$, skládající se z výplat dosažitelným pro jednočlennou koalici $K = \{i\}$, tj. dosažitelných pro hráče i, obsahuje největší číslo, které označíme symbolem $v(i)$:

$$(6.56) \qquad v(i) = \max \boldsymbol{v}(\{i\}) .$$

Toto označení je ve shodě s označením zavedeným v (6.27) pro garanční charakteristickou funkci $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\alpha$. Číslo $v(i)$ představuje užitek z výsledku maximálně dosažitelného pro hráče i: je to pro něho maximálně dosažitelná výplata. Při interpretaci charakteristické funkce z hlediska garance znamená číslo $v(i)$ maximální z výplat, kterou si hráč i může zaručit bez pomoci svých spoluhráčů a tedy bez vstupu do vícečlenné koalice. Tudíž od racionálního hráče můžeme očekávat, že vstoupí do koalice jenom tehdy, když mu zaručí výplatu, která není menší než pro něho maximálně dosažitelná výplata. Odtud:

Princip individuální racionality: Hráč i nevstoupí do žádné koalice $K(K \supset \{i\})$, která mu nabídne dohodu representovanou číselným K-vektorem $\{x_j\}_{j \in K}$, pro nějž jest $x_i < v(i)$.

Na základě principu individuální racionality definujeme *individuálně racionální* číselný I-vektor jako takový vektor x, jehož komponenty vyhovují podmínce, že platí nerovnost $x_i \geqq v(i)$ pro každé $i \in I$. Je-li navíc $x \in \tilde{X}$, nazýváme x individuálně racionální výplatní vektor. Ve hrách s racionálními účastníky budeme tedy očekávat, že finální výsledek hry po její realisaci je možno kvantitativně representovat individuálně racionálním výplatním vektorem.

Strategická hra ve tvaru s charakteristickou funkcí je matematickým modelem konfliktní situace, v němž jsou zachyceny jenom některé dílčí údaje o konfliktu, a to ty, které považujeme za významné z hlediska tvorby koalic. Na této úrovni neúplných znalostí o konfliktu, jak jsou vyjádřeny údaji vystupujícími v trojici $(I, \tilde{X}, v)$, se především smiřujeme s faktem, že jsou zanedbány znalosti členů koalic o subjektivních charakteristikách protivníků z antikoalic (srovn. vstupní úvahy paragrafu věnovaného pojmu garance: garantovatelnost se opírá o údaje uvedené v (6.8) a (6.9)); při racionalitě všech účastníků konfliktu to znamená, že členové koalice navíc nevyužívají své znalosti o racionalitě svých protivníků. Pro hry s hojným počtem přípustných koalic se lze domnívat, že je tato okolnost vyvážena volnější tvorbou koalic, takže de facto se těchto znalostí o racionalitě a subjektivních charakteristikách protivníků využije během vyjednávání před vznikem přípustné koaliční struktury. To přestává platit, je-li přípustných koalic málo: v takovém případě nemusí být model s charakteristickou funkcí vhodný ke studiu problémů racionálního jednání.

V našem případě jsou pravidla hry representována abstraktní charakteristickou funkcí v, a tedy rozšířená pravidla hry jsou dána dvojicí (K, v). Pro krajní případ, kdy K obsahuje jedinou koaliční strukturu, a to bezkoaliční, tj. $K = \{\mathscr{K}_0\}$ (srovn. (6.6)), kdy tedy hráči jsou nuceni jednat každý na svůj vrub (jde o nekooperativní hru), je zřejmé, že z hodnot funkce v lze využít jenom soustavu $\{v(\{i\})\}_{i \in I}$, neboli jenom soustavu $\{v(i)\}_{i \in I}$ maximálně dosažitelných výplat. Hra, tj. znalost o konfliktu, se tím fakticky redukuje na trojici

$$I, \tilde{X}, \{v(i)\}_{i \in I},$$

z níž lze vyčíst jen tolik, že hráči z množiny I mající možnost jednat každý jenom na svůj vrub mohou dosáhnout při realisaci hry výplatního vektoru x ležícího v prostoru $\tilde{X}$, pro který jest $x_i \geqq v(i)$ pro každého hráče i, který je tedy individuálně racionální. Z této úvahy je zřejmé, že teorie nekooperativních her nelze na matematickém modelu s charakteristickou funkcí rozvinout, neboť zanedbání znalostí o racionalitě a subjektivních charakteristikách protivníků se jeví pro tento případ jako podstatné.

Kompensace

V konfliktních situacích nastávají často případy, že někteří hráči mohou dosáhnout výsledku, jemuž připisují vysoký užitek, jen když se jim podaří vytvořit koalici s určitými partnery. Takoví hráči se pak snaží zabezpečit si spolupráci partnerů např. tím, že jim závazně přislíbí část svého vysokého užitku. K tomu jest třeba předpokládat, že užitek lze přenášet z jednoho hráče na druhého (tzv. *transferabilita užitku*), což se může dít pouze prostřednictvím některého „nositele" užitku, v ekonomickém pojetí prostřednictvím statků (nebo služeb), které existují nezávisle na konfliktní situaci a jimž hráči připisují užitek. Obvykle se předpokládá existence určitého neomezeně dělitelného statku – tzv. peněz –, který si mohou hráči mezi sebou vyměňovat a tím kompensovat malý užitek některého výsledku. Možnost kompensace užitku je založena především na předpokladu, že pro každého hráče vystupujícího v dané hře jsou *peníze užitečné*, tj. že každý hráč i umí jednoznačně přiřadit každému výsledku ω množství ξ tohoto statku tak, že užitek $u_i(\omega)$ je rovný užitku z peněžní částky ξ a že s rostoucím $u_i(\omega)$ pro měnící se ω roste peněžní částka ξ přiřazená výsledku ω.

Hypotéza o užitečnosti peněz (v dané hře): Každému hráči $i \in I$ v dané hře s množinou hráčů I a se soustavou užitkových funkcí $\{u_i\}_{i \in I}$ je přiřazena reálná funkce jedné reálné proměnné u_i^* zvaná *užitek peněz* (obšírněji, užitková funkce peněz), která je rostoucí: užitek $u_i^*(\xi)$ z peněžní částky ξ roste s peněžní částkou ξ. Dále je pro každého hráče $i \in I$ dáno zobrazení w_i přiřazující každému výsledku $\omega \in \Omega_E$ číslo $w_i(\omega)$, které představuje peněžní částku přinášející hráči i stejný užitek jako výsledek ω: $u_i^*(w_i(\omega)) = u_i(\omega)$.

Hypotéza o užitečnosti peněz má speciální význam ve hrách, v nichž jsou výsledky vyjádřeny přímo v penězích. V takových hrách je prostor smíšených výsledků Ω_E representován konvexním polyedrem v prostoru R^I, přičemž smíšený výsledek $\omega = \{w_i\}_{i \in I}$ je číselný I-vektor, jehož i-tá komponenta w_i je číslo vyjadřující peněžní částku, kterou obdrží hráč i, skončí-li hra výsledkem ω. Strategickým hrám, v nichž jsou výsledky vyjádřeny v penězích, budeme říkat *hry s peněžními výsledky* neboli *peněžní hry*. Tento název se týká nejenom typu matematického modelu konfliktní situace, ale i způsobu jeho interpretace.

Hypotéza o užitečnosti peněz se pro hru s peněžními výsledky redukuje na předpoklad, že užitková funkce u_i hráče i závisí jenom na i-té komponentě výsledku: $u_i(\omega) = u_i^*(w_i)$, $\omega = \{w_i\}_{i \in I}$ $(i \in I)$; u_i^* je zde suponovaný užitek peněz hráče i. Z tohoto předpokladu a z vlastností užitkové funkce snadno plyne, že v peněžních hrách je užitek peněz lineární funkcí peněz, tj. funkce u_i^* má tvar: $u_i^*(\xi) = \alpha_i \xi + \beta_i$ $(\alpha_i > 0)$. Tento fakt znamená, že v peněžních hrách s užitkovými funkcemi a s užitečnými penězi je užitek přenositelný z jednoho hráče na druhého.

Hypotéza o transferabilitě užitku: O hře splňující hypotézu o užitečnosti peněz říkáme, že má transferabilní užitek, když přírůstek užitku peněz u každého hráče závisí lineárně na přírůstku peněžní částky; vyjádřeno formálně: každému $i \in I$ odpovídá číslo $\alpha_i (> 0)$, že

$$u_i^*(\xi) - u_i^*(\xi') = \alpha_i(\xi - \xi') ; \quad \xi, \xi' \in R^1 .$$

Splňuje-li daná hra hypotézu o transferabilitě užitku, lze pro ni jednoznačně stanovit reálná čísla β_i $(i \in I)$, pro která platí vztahy:

$$u_i(\omega) = \alpha_i w_i(\omega) + \beta_i , \quad \omega \in \Omega_E ; \quad i \in I . \tag{6.57}$$

Slovy, užitek $u_i(\omega)$ hráče i z výsledku ω se rovná číslu, které dostaneme lineární transformací z tzv. *peněžní výplaty* hráči i pro výsledek ω. Vztah (6.57) vyjadřuje, že funkce w_i představující výplaty v penězích je již sama užitkovou funkcí hráče i odpovídající určité změně jednotky a počátku měření užitku ve srovnání s užitkovou funkcí u_i.

Hypotéza o užitečnosti peněz umožňuje převést danou hru na hru s peněžními výsledky tím, že každý výsledek ω nahradíme vektorem peněžních výplat $\{w_i(\omega)\}_{i\in I}$. Hypotéza o transferabilitě užitku nám říká, že tyto peněžní výplaty $w_i(\omega)$ již samy představují užitky hráče i, měřené ovšem v jiných jednotkách a při jiném počátku, než které hráč zvolil.

V některých případech nám dávají užitelné peníze jinou možnost, než je transferabilita užitku, totiž možnost mezi sebou srovnávat užitek jednotlivých hráčů.

Hypotéza o srovnatelnosti užitku (mezi hráči v dané hře): O hře splňující hypotézu o užitečnosti peněz pravíme, že její hráči mají užitek mezi sebou srovnatelný, když přírůstek užitku každého hráče závisí jenom na přírůstku peněžní částky a nezávisí na tom, o kterého hráče jde: jinými slovy, všichni hráči mají stejnou jednotku měření užiiku a přitom každý hráč bere za jednotku měření svého užitku (standard) užitek z některé pevné peněžní částky ξ_0; formálně vyjádřeno,

$$u_i^*(\xi) - u_i^*(\xi') = u(\xi - \xi') \quad \text{pro každé} \quad i \in I; \quad \xi, \xi' \in R^1 .$$

Zde u je některá reálná funkce jedné reálné proměnné.

Splňuje-li daná hra jak hypotézu o transferabilitě užitku, tak i hypotézu o srovnatelnosti užitku mezi hráči, projeví se to v rovnostech (6.57) tím, že jsou v nich všechny koeficienty α_i stejné, tj. $\alpha_i = \alpha$ pro každé $i \in I$; obdržíme tak vztahy

$$(6.58) \qquad u_i(\omega) = \alpha\, w_i(\omega) + \beta_i , \quad \omega \in \Omega_E ; \quad i \in I .$$

Jest ovšem $\alpha > 0$; všimněme si, že kladnost čísel α_i resp. α je důsledkem toho, že užitek peněz u_i^* je rostoucí funkce, takže bychom ji nemuseli suponovat. Bere-li každý hráč za jednotku měření svého užitku užitek z jednotkové peněžní částky $\xi_0 = 1$, odpovídá tato skutečnost koeficientu $\alpha = 1$. Jestliže se pro daného hráče i shoduje počátek měření užitku s počátkem měření množství peněz, což znamená, že peněžní obnos $\xi = 0$ dává hráči nulový užitek, projeví se to tím, že $\beta_i = 0$. Fungují-li oba předpoklady o měření užitku hráčem i současně, redukuje se rovnost (6.58) na vztah kongruence mezi užitkem a penězi: $u_i = w_i$.

V posledním případě užitek $u_i(\omega)$ je pro každý výsledek ω číselně shodný s množstvím peněz, které je přiřazeno výsledku ω podle zásady stejného užitku. Má tedy číslo $u_i(\omega)$ za předpokladu kongruence mezi užitkem a penězi dvojí interpretaci: za prvé představuje užitek hráče i z výsledku ω a za druhé představuje peněžní částku, která dává hráči i stejný užitek jako výsledek ω.

Dříve než přejdeme k pojmu kompensačních dohod, vysvětleme ještě, jak je třeba chápat formální požadavek vystupující v hypotéze o transferabilitě užitku: vyslovená hypotéza prostě tvrdí, že k tomu, aby bylo možno užitky hráčů mezi nimi přenášet, rozumí se prostřednictvím peněz, je postačující, aby užitek peněz každého hráče byl lineární funkcí peněz; v souladu s hořejší symbolikou, $u_i^*(\xi) = \alpha_i\xi + \beta_i$, tedy $\alpha_i\xi + \beta_i$ je užitek hráče i z peněžní částky ξ ($i \in I$). O postačitelnosti této podmínky o linearitě užitku se budeme moci přesvědčit, až bude jasné, co se vlastně ve hře přenášením užitku mezi hráči resp. kompensacemi užitku přesně míní.

Princip kompensace užitku: Členové realisované koalice K se dohodnou pro každý výsledek ω ($\omega \in \Omega_E$) o peněžních částkách $\xi_i(\omega)$, $i \in K$, kompensujících vzájemně jejich užitek: peněžní obnos $\xi_i(\omega)$ představuje odškodné, které hráč i dostane od ostatních členů koalice, skončí-li hra výsledkem ω, když je toto číslo kladné; je-li záporné, poskytne hráč i obnos $-\xi_i(\omega)$ jako odškodné partnerům v koalici. Dohodnuté částky se navzájem kompenzují: $\sum_{i\in K} \xi_i(\omega) = 0$.

K vytváření kompenzačních dohod je tedy třeba existence peněz. Dohodnutým kompensačním částkám $\xi_i(\omega)$ se obvykle říká *postranní výplaty*; za předpokladu, že jsou v dané hře peníze užitečné, přinese hráči i výsledek ω při dohodnuté kompensaci $\xi_i(\omega)$ užitek, který je roven číslu představujícímu užitek tohoto hráče z peněžní částky $w_i(\omega) + \xi_i(\omega)$: o penězích totiž mlčky předpokládáme, že jsou *aditivní* veličinou. Přitom číslo

$$y_i(\omega) = w_i(\omega) + \xi_i(\omega) \tag{6.59}$$

nazýváme ***podíl hráče*** i na výsledku ω.

Předpokládejme, že je v dané hře splněna hypotéza o transferabilitě užitku, tj. že užitek peněz je pro každého hráče lineární. Je-li hráč i členem koalice, v níž byly dohodnuty pro tohoto hráče postranní výplaty $\xi_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_E$, přinese hráči i výsledek ω užitek rovný číslu $u_i^*(y_i(\omega))$, tj. užitek z jeho podílu $y_i(\omega)$ na výsledku ω; srovn. definici (6.59). Učiňme předpoklad, že každý hráč dostane jako člen některé koalice při dané realisaci hry postranní výplatu v závislosti na výsledku. Potom můžeme nahradit každý výsledek ω tzv. *podílovým vektorem* $\{y_i(\omega)\}_{i\in I}$, jehož i-tá komponenta representuje podíl hráče i na výsledku ω podle (6.59). Nechť Y je některý konvexní polyedr v prostoru R^I, který obsahuje všechny podílové vektory $\{y_i(\omega)\}_{i\in I}$ pro $\omega \in \Omega_E$. Položme

$$u_i'(y) = u_i^*(y_i) \quad \text{pro} \quad y \in Y,\ i \in I,$$

kde ovšem u_i^* je užitek peněz hráče i. Z linearity užitku peněz ihned vyplývá, že funkce u_i' splňuje pro $i \in I$ hypotézu o středním užitku, takže ve hře s prostorem výsledků Y a s preferenčním schématem $\{U_i'\}_{i\in I}$ indukovaným soustavou užitkových funkcí $\{u_i'\}_{i\in I}$ (s pravidly stejnými jako má hra výchozí) hraje užitek peněz současně roli užitkové funkce pro každého hráče: je to tedy užitek ve smyslu kapitoly 5; srovn. (5.32), (5.33) a (5.39). Systém preferencí U_i' je zřejmě přirozený, tj. seřazuje vektory z prostoru Y podle velikosti i-tých komponent. Nahradili jsme tak původně danou hru se systémem užitkových funkcí $\{u_i\}_{i\in I}$ na prostoru abstraktních výsledků Ω_E na základě hypotézy o transferabilitě užitku s penězi majícími užitek u_i^* $(i \in I)$ a na základě předpokladu o smluvených kompensacích novou hrou s peněžními výplatami, v níž má každý hráč užitkovou funkci odpovídající užitku peněz původní hry.

Kdyby nebyla splněna hypotéza o transferabilitě užitku, neměla by odvozená hra s peněžními výplatami kardinální preference, a tím spíše by hráči neměli užitkové funkce charakterisující jejich užitek peněz. Linearita užitků peněz tedy zabezpečuje, že jim lze přiřknout smysl užitků, a to pro jakkoli vykompensovaný užitek typu $u_i^*(y_i(\omega))$, ve smyslu hypotézy o středním užitku. Tím je zajištěno, že vektory $\{\xi_i(\omega)\}_{i\in I}$ představující kterýkoli způsob kompensování užitku výsledku ω representují realisované přenosy užitku mezi hráči. Touto úvahou jsme se přesvědčili, že formální požadavek vystupující v hypotéze o transferabilitě užitku stačí k tomu, aby bylo možno prostřednictvím peněz užitek přenášet.

Celá předcházející úvaha platí také ve speciální případě, že kompensační částky $\xi_i(\omega)$ jsou pro všechny hráče identicky nulové: $y_i = w_i$ $(i \in I)$. Hypotéza o transferabilitě užitku nám umožňuje z dané hry s užitkovými funkcemi u_i $(i \in I)$ definovanými na prostoru Ω_E odvodit hru s peněžními výplatami, jejíž prostor výsledků je konvexní polyedr W daný formulí

$$W = \{\{w_i(\omega)\}_{i \in I} \colon \omega \in \Omega_E\} \tag{6.60}$$

a která má užitkové funkce $u_i'(i \in I)$ odpovídajícím užitkům peněz podle vzorce

$$u_i'(w) = \alpha_i w_i + \beta_i\,, \quad \omega \in W. \tag{6.61}$$

Skutečnost, že W je konvexní polyedr, vyplývá z faktu, že v původní hře představuje w_i jednu z možných užitkových funkcí hráče i pro každé $i \in I$; srovn. (6.57). Je-li H hra s užitkovými funkcemi daná čtveřicí (5.55), která splňuje hypotézu o transferabilitě užitku s užitečnými penězi charakterisovanými soustavami parametrů $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, $\{\beta_i\}_{i \in I}$ a soustavou funkcí $\{w_i\}_{i \in I}$, nazveme čtveřici $(I, W, \{u_i'\}_{i \in I}, \Pi)$ *peněžní hrou sdruženou s hrou* H; přitom W a $u_i'(i \in I)$ jsou dány formulemi (6.60) a (6.61) a odvozená peněžní hra je opět hrou s užitkovými funkcemi. Studium her s transferabilním užitkem lze tedy převést na vyšetřování s nimi sdružených her s peněžními výplatami, které mají užitkové funkce vyjadřující užitek peněz ve smyslu rovnosti (6.61).

Vraťme se na chvíli k principu kompensace užitku. Zjistili jsme, že má smysl jenom pro hry vyhovující hypotéze o transferabilitě užitku, ježto v nich se postranními výplatami užitek skutečně přenáší. Jednoduchým typem zmíněných her jsou peněžní hry s užitečnými penězi. Předpokládejme, že při realisaci takové peněžní hry nastane výsledek vyjádřený číselným I-vektorem w a že K je realisovaná koalice. Každý člen i koalice K má podle pravidel hry obdržet peněžní výplatu w_i, takže koalice K jako celek docílí úhrnné částky $\sum_{i \in K} w_i$. Jestliže členové koalice K provedou ve smyslu kompensačních dohod mezi sebou přenos užitku postranními výplatami ξ_i $(i \in K)$, dosáhne každý člen i koalice K užitku odpovídajícího jeho podílu $y_i = w_i + \xi_i$; srovn. (6.59). Má-li číslo y_i představovat podíl hráče i na úhrnné částce $\sum_{i \in K} w_i$, musí platit rovnost

$$\sum_{i \in K} y_i = \sum_{i \in K} w_i\,. \tag{6.62}$$

Tato rovnost je zaručena požadavkem o vzájemné kompensaci postranních výplat, který vystupuje v principu kompensace užitku a je kladen proto, že koalice může rozdělit mezi své členy právě jen tu částku, kterou získá; tedy $\sum_{i \in K} \xi_i = 0$.

Z rovnosti (6.62) usuzujeme, že ve hře realisovaná koalice K má zájem na docílení co největšího sumárního obnosu $\sum_{i \in K} w_i$, zvaného *úhrnná peněžní výplata koalici* K, kterou tato koalice distribuuje mezi své členy na základě jejich vzájemné dohody. Jestliže koalice K je postavena před úkol volit mezi dvěma výsledky w a w' dané peněžní hry, lze očekávat, že se rozhodne pro ten výsledek, pro který je úhrnná peněžní výplata koalici K větší: dá přednost výsledku w, když platí nerovnost

$$\sum_{i \in K} w_i > \sum_{i \in K} w_i'\,.$$

Předpokládejme, že pro uvažovanou hru s peněžními výsledky platí ještě hypotéza o srovnatelnosti užitku mezi hráči; tedy $u_i(w) = \alpha w_i + \beta_i$ s koeficientem α (>0) nezávislým na indexu i (srovn. (6.58)). Snadno nahlédneme, že pro tento případ je předcházející nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\sum_{i \in K} u_i(w) > \sum_{i \in K} u_i(w')\,,$$

v níž vystupují již přímo užitkové funkce jednotlivých členů koalice. Zobecníme-li naše úvahy na případ všech her s transferabilním užitkem, dospějeme k zásadě, podle níž se řídí ve hře se srovnatelným užitkem jednání koalice.

Princip motivace kompensačních dohod: Realisovaná koalice K ve hře, v níž jsou připuštěny postranní výplaty, se řídí při hledání dohody výhradně podle své *koaliční užitkové funkce* $\bar{u}_K$ definované rovnicí

$$\bar{u}_K(\omega) = \sum_{i \in K} u_i(\omega), \quad \omega \in \Omega_E, \tag{6.63}$$

kde $\{u_i\}_{i \in K}$ je soustava užitkových funkcí členů koalice K. To znamená, že ze dvou výsledků ω a ω' dá koalice K přednost výsledku ω proti výsledku ω', když a jen když

$$\sum_{i \in K} u_i(\omega) > \sum_{i \in K} u_i(\omega');$$

v případě rovnosti je koalice mezi oběma výsledky indiferentní.

Funkce $\bar{u}_K$ definovaná vztahem (6.63) je skutečně užitkovou funkcí ve smyslu předcházející kapitoly, neboť splňuje hypotézu středního užitku. Označíme-li $\bar{U}_K$ systém preferencí indukovaný užitkovou funkcí $\bar{u}_K$ podle (5.33)), plyne z předpokladu o tom, že daná hra splňuje hypotézu o transferabilitě užitku a současně i hypotézu o srovnatelnosti užitku, závěr, že funkce $\sum_{i \in K} w_i$ přiřazující každému výsledku součet peněžních výplat hráčům koalice K pro tento výsledek je rovněž užitková funkce pro systém preferencí $\bar{U}_K$. Číslo $\sum_{i \in K} w_i(\omega)$ představuje tedy na jedné straně úhrnnou výplatu koalici K pro ω a na druhé straně také *fiktivní užitek* koalice K z výsledku ω. Jest totiž:

$$\bar{u}_K(\omega) = \alpha(\sum_{i \in K} w_i(\omega)) + \sum_{i \in K} \beta_i.$$

Fiktivní užitky $\bar{u}_K(\omega)$ mají proti fiktivním užitkům $\sum_{i \in K} w_i(\omega)$ tu výhodu, že při jejich měření koalice K zachovává společnou jednotku měření, v níž jsou udány užitky jejích členů. Počátky měření obou fiktivních užitků se od sebe liší o konstantu $\sum_{i \in K} \beta_i$. Doplňme ještě, že relaci $\bar{U}_K$ budeme nazývat *kompensační systém preferencí* koalice K.

Hru, která splňuje hypotézu o transferabilitě užitku a současně hypotézu o srovnatelnosti užitku mezi hráči a ve které členové realisovaných koalic mohou mezi sebou přenášet svůj užitek podle principu kompensace užitku — jinými slovy, v níž jsou dovoleny postranní výplaty —, nazveme *strategická hra s kompensacemi*. Hru, ve které nejsou postranní výplaty dovoleny, nazveme *strategická hra bez kompensací*. Oba názvy se týkají způsobu interpretace základních dat uvedených v matematickém modelu konfliktní situace, a nikoli typu tohoto modelu; jde tu ovšem vždy o hry s vyznačenou kooperací.

Ve strategických hrách s kompensacemi předpokládáme, že koalice jednají podle principu motivace kompensačních dohod, kdežto ve strategických hrách bez kompensací činíme předpoklad, že koalice jednají buď podle silnějšího nebo slabšího principu motivace dohod, jak jsme je vyložili v předcházejících paragrafech. Princip, že se každá koalice ve hře s kompensacemi řídí podle svého kompensačního systému preferencí, je ze všech tří principů motivace dohod nejsilnější v tom smyslu, že hráči jeví, řídíce se jím, největší ochotu ke spolupráci; tato ochota vyplývá z toho, že si mohou své užitky navzájem kompensovat.

Úvahy tohoto paragrafu nám umožňují vyslovit pro hry s vyznačenou kooperací, které interpretujeme jako hry s kompensacemi, princip realisace hry v následující jednoduché formě.

Princip realisace hry s kompensacemi: Hra se provede podle principu realisace rozšířených pravidel hry (při zachování principu závaznosti dohod). Je-li ω výsledek po skončení hry, rozdělí se členové každé realisované koalice K o fiktivní užitek $\bar{u}_K(\omega)$ této koalice na základě vzájemné dohody podle klíče charakterisovaného některým K-vektorem $\{y'_i(\omega)\}_{i\in K}$, který splňuje podmínku: $\sum_{i\in K} y'_i(\omega) = \bar{u}_K(\omega)$; pro $i \in K$ představuje číslo $y'_i(\omega)$ užitek hráče i docílený z výsledku ω v rámci kompensační dohody.

Skutečnost, že čísla $y'_i(\omega)$ pro $i \in K$ lze interpretovat jako užitky členů koalice, je důsledkem transferability a srovnatelnosti užitku ve hře s kompensacemi. Provedeme-li totiž přenos užitku s pomocí postranních výplat

$$\xi_i(\omega) = y_i(\omega) - w_i(\omega)\,, \quad \text{kde} \quad y_i(\omega) = \frac{1}{\alpha}\,(y'_i(\omega) - \beta_i)$$

(srovn. (6.59)), představuje číslo $\alpha y_i(\omega) + \beta_i$ užitek hráče i z peněžního podílu $y_i(\omega)$ a je skutečně rovno podílu $y'_i(\omega)$ hráče i na fiktivním užitku $\bar{u}_K(\omega)$. Tudíž dohoda o K-vektoru $\{y'_i(\omega)\}_{i\in K}$ představujícím distribuci fiktivního užitku je rovnocenná dohodě o kompensačních částkách $\xi_i(\omega)$, $i \in K$.

Strategická hra s číselnou charakteristickou funkcí

Zatím jsme vyšetřovali otázku vzájemné kompensace užitku mezi hráči obecně bez ohledu na to, na jakém stupni abstrakce tvoříme matematický model konfliktní situace. V tomto paragrafu se zaměříme na matematický model konfliktní situace, v němž jsou dána pravidla hry koaliční výsledkovou funkcí. Nechť tedy (srovn. (5.55))

$$(I, \Omega_E, \{u_i\}_{i\in I}, v) \tag{6.64}$$

je strategická hra s užitkovými funkcemi v koaličním tvaru, kterou budeme interpretovat jako hru s kompensacemi. Ježto matematický model (6.64) představuje hru bez vyznačené kooperace, znamená to, že vyšetříme důsledky možnosti vzájemné kompensace užitku mezi členy všech myslitelných koalic bez přihlédnutí k tomu, zda se mohou či nemohou tyto koalice vytvořit.

Ve své úvaze nejprve vyjdeme z představy, že v dané hře je vyznačena kooperace, přičemž v některé realisaci hry vznikne koalice K. Podle principu realisace rozšířených pravidel hry v koaličním tvaru záleží jednání členů koalice K v tom, že učiní dohodu o společné volbě pro ně dosažitelného výsledku, označme jej ω_K, tj. $\omega_K \in \nu(K)$. Když použijeme principu motivace kompensačních dohod k volbě dosažitelného výsledku, dospějeme k závěru, že členové koalice K zvolí takový pro ně dosažitelný výsledek ω_K, aby byl fiktivní užitek $\bar{u}_K(\omega_K)$ koalice K z výsledku ω_K (srovn. (6.63)), tj. součet $\sum_{i \in K} u_i(\omega_K)$, co největší. Z požadavků kladených na koaliční výsledkovou funkci lze snadno vyvodit, že mezi čísly ležícími v množině všech dosažitelných fiktivních užitků koalice K, tj. v číselné množině

$$\{ \sum_{i \in K} u_i(\omega) : \omega \in \nu(K) \} ,$$

existuje největší číslo, které budeme označovat symbolem $v(K)$:

$$v(K) = \max \{ \sum_{i \in K} u_i(\omega) : \omega \in \nu(K) \} ; \quad K \subset I . \tag{6.65}$$

Výsledek $\omega \in \nu(K)$ se nazývá *maximálně dosažitelný* pro koalici K *při kompensacích*, když platí rovnost $\sum_{i \in K} u_i(\omega) = v(K)$. Z provedené úvahy vyplývá, že realisovaná koalice K učiní dohodu o společné volbě takového výsledku ω_K, který je pro tuto koalici při kompensacích maximálně dosažitelný.

Snadno se přesvědčíme, že výsledek $\omega \in \nu(K)$ je pro koalici K maximálně dosažitelný při kompensacích, když a jen když neexistuje výsledek $\omega' \in \nu(K)$ splňující vztahy $\omega' \bar{U}_K \omega$ a $\omega' \succ_i \omega$ pro některé $i \in K$, kde $\bar{U}_K$ je podle předcházejícího paragrafu systém preferencí indukovaný koaliční užitkovou funkcí $\bar{u}_K$ (srovn. (6.63) a (5.33)); relaci $\bar{U}_K$ můžeme nazývat *kompensační systém preferencí* koalice K. V paragrafu věnovaném strategickým hrám v koaličním tvaru jsme nazvali výsledek $\omega \in \nu(K)$ maximálně dosažitelným pro koalici K, když neexistoval výsledek $\omega' \in \nu(K)$ splňující vztahy $\omega' U_K \omega$ a $\omega' \succ_i \omega$ pro některé $i \in K$; zde U_K představuje koaliční systém preferencí koalice K (srovn. (6.10)), tj. částečné uspořádání v prostoru Ω_E, na rozdíl od relace $\bar{U}_K$, která je totálním uspořádáním v prostoru Ω_E. Výsledek maximálně dosažitelný pro koalici K, v jehož definici vystupuje koaliční systém preferencí U_K, budeme nazývat určitěji výsledek *maximálně dosažitelný bez kompensací*. Tudíž definici výsledku maximálně dosažitelného (pro danou koalici K) při kompensacích dostaneme z definice výsledku maximálně dosažitelného bez kompensací tím, že v ní zaměníme koaliční systém preferencí U_K kompensačním systémem preferencí $\bar{U}_K$. Přitom koaliční systém preferencí U_K odpovídá prvnímu principu motivace dohod bez kompensací, kdežto kompensační systém preferencí $\bar{U}_K$ odpovídá principu motivace dohod s kompensacemi.

Z definice výsledku maximálně dosažitelného při kompensacích plyne, že takový výsledek dostaneme na základě principu odvozeného z principu kompensačních dohod, který můžeme nazvat *principem maximalisace fiktivního užitku.*

K požadavkům kladeným na strategickou hru (6.64) připojme nyní předpoklad, že množina $\nu(I)$ je konickým rozšířením konvexního obalu některé konečné množiny výsledků, kterou označíme jako dříve (srovn. (6.52)) symbolem $\Omega^{(0)}$. *Konické roz-*

šíření libovolné množiny výsledků Ω', které označíme symbolem con Ω', lze definovat v termínech užitkových funkcí rovnicí:

$$\text{con } \Omega' = \{\omega : \omega \in \Omega_E; \exists(\omega' \in \Omega') \forall (i \in I) \, u_i(\omega') \geqq u_i(\omega)\} . \tag{6.66}$$

Náš předpoklad lze tedy stručně vyjádřit vztahem:

$$v(I) = \text{con } [\Omega^{(0)}] , \tag{6.67}$$

který je ekvivalentní s rovností (6.52). Představíme-li si na okamžik, že hra (6.64) je odvozena s pomocí garanční hodnoty (srovn. též (6.36)) ze hry v normálním tvaru, v níž $\Omega^{(0)}$ je prostor ryzích výsledků, skončí každá realisace hry výsledkem ω, který nutně leží v konvexním obalu množiny $\Omega^{(0)}$, neboť tento výsledek bude podle pravidel hry přiřazen normalisovanou výsledkovou funkcí smíšeným strategiím koalic z realisované koaliční struktury (tj. $\omega = \varrho(\{s_K\}_{K \in \mathscr{K}})$; srovn. dále (6.82)). Označuje-li $\mathscr{K}$ realisovanou koaliční strukturu, musí platit vztahy

$$\sum_{K \in \mathscr{K}} \bar{u}_K(\omega) = \sum_{K \in \mathscr{K}} \sum_{i \in K} u_i(\omega) = \sum_{i \in I} u_i(\omega) \leqq M ,$$

kde jsme položili

$$M = \max \{ \sum_{i \in I} u_i(\omega) : \omega \in [\Omega^{(0)}]\} . \tag{6.68}$$

Přitom existence posledního maxima je zaručena našimi předpoklady.

Podle principu realisace hry s kompensacemi se každá koalice $K \in \mathscr{K}$ rozdělí o fiktivní užitek $\bar{u}_K(\omega)$, docílený ve hře končící výsledkem ω, podle dohodnutého klíče daného číselným K-vektorem $\{y_i(\omega)\}_{i \in K}$, jehož komponenty představují podíly jednotlivých členů koalice K na fiktivním užitku $\bar{u}_K(\omega)$, tj.

$$\sum_{i \in K} y_i(\omega) = \bar{u}_K(\omega) = \sum_{i \in K} u_i(\omega) .$$

Pro úhrnný součet podílů všech hráčů dostaneme podle předcházejících vztahů nerovnost

$$\sum_{K \in \mathscr{K}} \sum_{i \in K} y_i(\omega) = \sum_{i \in I} y_i(\omega) \leqq M .$$

Ježto každý výsledek $\omega \in [\Omega^{(0)}]$ je aposteriorně možný a např. ve hře s neomezenou tvorbou koalic resp. koaličních struktur může libovolné rozdělení sumárního užitku $\sum_{i \in I} u_i(\omega)$ na podíly hráčům skutečně nastat, představuje každý číselný I-vektor $\{y_i(\omega)\}_{i \in I}$, který splňuje podmínku, že $\sum_{i \in I} y_i(\omega) \leqq M$, možný podílový vektor v dané hře interpretované jako hra s kompensacemi. Proto množinu

$$Y = \{y \in R^I : \sum_{i \in I} y_i \leqq M\} , \tag{6.69}$$

kde číslo M je definováno rovnicí (6.68), nazýváme *prostor podílových vektorů* dané hry (6.64).

V tomto paragrafu jsme důsledně přešli od pojmu peněžního podílu na daném výsledku ω ve smyslu definice (6.59) k pojmu podílu na sumárním fiktivním užitku $\sum_{i \in I} u_i(\omega)$, odpovídajícím výsledku ω; v tomto novém smyslu chápeme rovněž pojem podílového vektoru. K tomu jsme oprávněni, jak plyne z úvah předešlého paragrafu. Výhoda tohoto nového pojetí podílových vektorů záleží v tom, že k jejich definici stačí za daných předpokladů jenom znalost soustavy užitkových funkcí dané hry; srovn. definice (6.68) a (6.69). Ve hrách, v nichž jsou všichni hráči kongruentní s penězi (tj. $u_i = w_i$ pro všechny $i \in I$; srovn. předcházející paragraf), má podílový vektor dvojí význam: můžeme jej chápat jako vektor složený z podílů hráčů na úhrnných výplatách koalicím, nebo jako vektor složený z podílů hráčů na fiktivních užitcích vytvořených koalic.

Z vlastnosti (6.67) dané hry ihned dedukujeme, že konstanta M charakterisující prostor podílových vektorů, jež je vyjádřena vztahem (6.68), splňuje rovnost

$$M = v(I)\,, \tag{6.70}$$

kde $v(I)$ je číslo dané rovnicí (6.65) pro $K = I$.

Vedle strategických her, v nichž je prostor podílových vektorů Y charakterisován podle (6.69) konstantou $M = v(I)$, se studují hry, v nichž je prostor podílových vektorů Y definován s pomocí konstanty M obecně různé od čísla $v(I)$. Přitom se rozdílu $M - v(I)$ říká *excess* prostoru podílových vektorů dané hry, nebo kratčeji *excess hry*. Excess dané hry lze interpretovat jako přírůstek resp. úbytek sumárního užitku vynucený z vnějšku; při kongruenci hráčů s penězi lze kladný excess chápat prostě jako peněžní dar z vnějšku resp. záporný excess jako penále či poplatek, který hráči platí společnou rukou za provedení hry.

Studium her s excessem má význam především při vyšetřování těch strategických her, které jsou složeny z několika jednodušších her s navzájem disjunktními množinami hráčů. Interakce mezi hráči takové složené hry se projevuje transferem užitku mezi komponentními hrami, který vzat z hlediska jedné komponentní hry představuje excess uvažované komponenty.

Jiný přístup k pojmu excessu obdržíme, když předpokládáme obecněji, že místo vztahu (6.67) platí jenom inkluse

$$\nu(I) \subset \operatorname{con}\,[\Omega^{(0)}]\,,$$

z níž snadno odvodíme nerovnost $M \geqq v(I)$, kde konstanta M je dána původním vzorcem (6.68). Dospíváme tak opět k pojmu *strategické hry s excessem* (zde nezáporným); přitom pojem *hry bez excessu* je synonymem hry s nulovým excessem, tj. vyhovující vztahu (6.70). Hra odvozená ze hry v normálním tvaru definicí koaliční výsledkové funkce vztahem $\nu = \nu_\alpha$, kde tedy $\nu(K)$ je garanční hodnota hry pro $K \subset I$, představuje ovšem hru bez excessu, neboť podle (6.36) je splněna podmínka (6.67).

Není třeba zvláště zdůrazňovat, že pojem excessu má smysl jenom pro hry interpretované jako hry s kompensacemi.

Číslo $v(K)$ definované rovnicí (6.65) se nazývá *von Neumannova hodnota hry* pro koalici K, rozumí se dané hry (6.64). Von Neumannova hodnota hry odpovídá interpretaci hry v koaličním tvaru jako strategické hry s kompensacemi. *Aumann-Pelegova hodnota hry* $\mathfrak{v}(K)$ pro koalici K je definována pro hru (6.64) rovnicí (6.49) a odpovídá interpretaci dané hry v koaličním tvaru jako strategické hry bez kompensací; $\mathfrak{v}(K)$ je na rozdíl od čísla $v(K)$ množina číselných K-vektorů, tedy složitější matematický objekt. Položme pro $K \subset I$, kde $K \neq \emptyset$,

$$v_{\text{comp}}(K) = \{y_K \in R^K : y_K = \{y_i\}_{i \in K}, \sum_{i \in K} y_i \leqq v(K)\}. \tag{6.71}$$

Dostáváme tak pro danou hru (6.64) dvě množiny číselných K-vektorů odpovídající dané neprázdné koalici K, a to množinu $v(K)$, skládající se z K-vektorů *výplat* dosažitelných pro koalici K, a množinu $v_{\text{comp}}(K)$, skládající se z K-vektorů *podílů* dosažitelných pro koalici K; přitom výplat se dosahuje bez kompensací, kdežto podíly vzniknou vzájemnými kompensacemi užitku mezi členy koalice.

Snadno nahlédneme, že $v_{\text{comp}}(K)$ je množina právě těch číselných K-vektorů x_K, k nimž existuje výsledek ω maximálně dosažitelný pro koalici K při kompensacích takový, že platí nerovnost (srovn. (6.63))

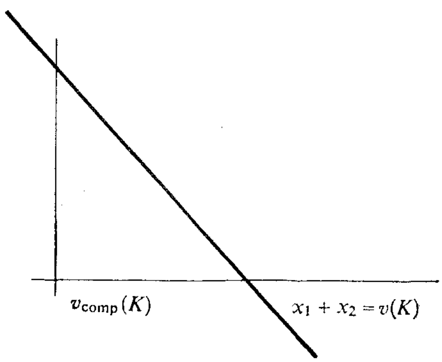
$$\bar{x}_K \leqq \bar{u}_K(\omega), \quad \text{kde} \quad \bar{x}_K = \sum_{i \in K} x_i.$$

Na druhé straně $v(K)$ definovaná vztahem (6.49) je množina těch číselných K-vektorů x_K, pro něž platí nerovnost

$$x_K \leqq u_K(\omega), \quad \text{tj.} \quad x_i \leqq u_i(\omega) \quad \text{pro} \quad i \in K,$$

kde ω je některý výsledek maximálně dosažitelný pro koalici K bez kompensací (závislý na x_K).

Definujeme-li $v_{\text{comp}}(K)$ jako funkci na systému všech podmnožin množiny hráčů I rovnicí (6.71) pro $K \neq \emptyset$ a rovnicí $v_{\text{comp}}(\emptyset) = \emptyset$, lehce zjistíme, že tato funkce splňuje požadavky (1) až (4) vystupující v definici abstraktní charakteristické funkce. Tudíž v_{comp} representuje „kompensační“ abstraktní charakteristickou funkci dané hry, odpovídající kompensačním systémům preferencí $\bar{U}_K$ ($K \subset I$), kdežto v představuje „bezkompensační“ charakteristickou funkci, odpovídající koaličním systémům preferencí U_K ($K \subset I$).



c)

Trojici (I, Y, v_{comp}), kde Y je prostor podílových vektorů daný formulí (6.69), bychom mohli pokládat za kanonický tvar hry (6.64), interpretované jako hra s kompensacemi.

Na obr. *c)* je patrné, jak vypadá hodnota $v_{\text{comp}}(K)$ „kompensační“ charakteristické funkce, je-li počet členů koalice $|K| = 2$; je to množina všech bodů uzavřené poloroviny ležící pod přímkou danou rovnicí $x_1 + x_2 = v(K)$ pro $K = \{1, 2\}$ (srovn. s obr. *a*) na str. 117).

Číselná funkce v definovaná na systému všech podmnožin množiny hráčů I rovnicí (6.65) se nazývá *von Neumannova charakteristická funkce* dané hry (6.64). Pro prázdnou koalici dostaneme z formule (6.65) vztah:

$$v(\emptyset) = 0\,. \tag{6.72}$$

Charakteristická funkce v je *superaditivní*: je-li $K_1 \subset I$, $K_2 \subset I$, pak

$$v(K_1) + v(K_2) \leqq v(K_1 \cup K_2) \quad \text{pro} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset\,. \tag{6.73}$$

Superaditivita funkce v je důsledkem superaditivity koaliční výsledkové funkce $\mathbf{v}$.

Vidíme, že „kompensační" charakteristickou funkci v_{comp} lze nahradit jednodušší číselnou charakteristickou funkcí v, což nebylo možné ve hře bez kompensací. Dospíváme tak k závěru, že hry s kompensacemi jsou formálně jednodušší než hry bez kompensací; tento poznatek zůstává v platnosti i při vyšetřování racionality jednání hráčů ve hře s kompensacemi.

Je-li $\mathbf{v}$ „bezkompensační" charakteristická funkce dané hry (6.64) definovaná rovnicí (6.49), odvodíme z ní von Neumannovu charakteristickou funkci v podle vzorce

$$v(K) = \max \{ \sum_{i \in K} x_i : \{x_i\}_{i \in K} \in \mathbf{v}(K) \}\,, \quad K \subset I\,. \tag{6.74}$$

Z poslední formule ihned obdržíme vztah

$$v(\{i\}) = v(i)\,, \quad i \in I\,, \tag{6.75}$$

kde číslo $v(i)$ je definováno s pomocí množiny $\mathbf{v}(\{i\})$ rovnicí (6.56). Proto nadále budeme psát hodnotu charakteristické funkce v pro jednočlennou koalici $K = \{i\}$ ve tvaru $v(i)$, $i \in I$.

Rozšíříme-li princip individuální racionality na kompensační dohody, tj. na podílové vektory, dospějeme k pojmu *individuálně racionálního podílového vektoru* jako takového vektoru $y \in Y$, pro který platí nerovnost $y_i \geqq v(i)$ pro každé $i \in I$.

Jako *hromadně racionální podílový vektor* definujeme takový vektor $y \in Y$, pro který platí rovnost $\sum_{i \in I} y_i = M$, kde M je konstanta charakterisující prostor podílových vektorů podle (6.69).

Ve strategické hře bez excessu (v níž $M = v(I)$) se množina všech hromadně racionálních podílových vektorů skládá ze všech bodů ležících na hranici množiny $v_{\text{comp}}(I)$ a odpovídá množině výsledků maximálně dosažitelných při kompensacích pro maximální koalici $K = I$. Na obr. *c*) je to množina všech bodů na přímce $x_1 + x_2 = v(K)$, považujeme-li koalici $K = \{1, 2\}$ za maximální koalici v dané hře, tj. předpokládáme-li, že $K = I$. Podobně se množina všech hromadně racionálních číselných I-vektorů ve hře bez kompensací skládá ze všech bodů ležících na hranici množiny $\mathbf{v}(I)$. Např. na obr. *c*) je to množina všech bodů ležících na celé křivce ohraničující množinu $\mathbf{v}(I)$; hromadně racionální výplatní vektory jsou pak ty vektory ležící na uvedené hranici, které jsou prvky prostoru $\tilde{X}$. Paretova optimální množina na obr. *c*) tučněji vyznačená, která odpovídá pojmu maximální dosažitelnosti bez kompensací, tvoří jenom část množiny všech hromadně racionálních výplatních vektorů.

Podílový vektor, který je současně individuálně i hromadně racionální, budeme nazývat *racionálním podílovým vektorem* nebo krátce *imputace* (angl. imputation). K pojmu imputace nás vede představa, že se racionální hráči řídí při vnitrokoaličním vyjednávání o distribuování fiktivního užitku principem individuální racionality a že jsou zároveň schopni přes rozdílnost svých zájmů koordinovat svou činnost resp. jednání jimi vytvořených koalic tak, aby dosáhli maximálního sumárního užitku (srovn. definici konstanty M v (6.68)). *Prostor racionálních podílových vektorů* Y_{imp} je vyjádřen vzorcem

$$Y_{\text{imp}} = \{y \in R^I : \forall\,(i \in I)\; y_i \geqq v(i)\,, \sum_{i \in I} y_i = M\}\,. \tag{6.76}$$

Předpokládáme-li, že výchozí hra (6.64) splňuje podmínku (6.67), pak dvojice (I, v), kde v je von Neumannova charakteristická funkce dané hry, representuje *kanonický tvar* hry (6.64), interpretované jako hra s kompensacemi. Je tomu tak proto, že z dvojice (I, v) lze odvodit prostor podílových vektorů Y na základě definic (6.69) a (6.70), čímž je proveden hlavní krok k rekonstrukci trojice $(I, Y, \boldsymbol{v}_{\text{comp}})$, kde „kompensační“ abstraktní charakteristická funkce $\boldsymbol{v}_{\text{comp}}$ je dána formulí (6.71) pro $K \neq \emptyset$. Prostor Y představuje množinu všech I-vektorů, jejichž komponenty jsou možné užitky, jichž mohou hráči ve hře dosáhnout, zahrneme-li do nich kompensace. Na rozdíl od hry s kompensacemi ve hře bez kompensací byla množina všech I-vektorů s komponentami, představujícími možné užitky hráčů, charakterisována prostorem výplatních vektorů X.

Za kanonický tvar strategické hry s excessem lze považovat trojici (I, M, v), kde M je konstanta charakterisující prostor podílových vektorů Y podle (6.69); přitom obecně $M \neq v(I)$.

Kanonický tvar ovšem závisí na dané soustavě užitkových funkcí. Nahradíme-li hru s užitkovými funkcemi (6.64) hrou v podstatě stejnou, tj. takovou, že se liší od dané hry jenom soustavou užitkových funkcí, označme ji $\{u'_i\}_{i \in I}$, pak z toho, že mezi oběma soustavami platí transformační vztahy tvaru (5.34), vyvodíme závěr, že kompensační systém preferencí $\bar{U}_K$ libovolné neprázdné koalice K je indukován transformovanou koaliční užitkovou funkcí

$$\sum_{i \in K} \alpha_i^{-1} u'_i\,, \quad \text{neboť} \quad \bar{u}_K(\omega) = \sum_{i \in K} \alpha_i^{-1}(u'_i(\omega) - \beta_i)$$

pro $\omega \in \Omega_E$, jak plyne z (6.63): není tedy indukován koaliční užitkovou funkcí $\sum_{i \in K} u'_i$ nové hry. To je způsobeno tím, že nová hra se soustavou užitkových funkcí $\{u'_i\}_{i \in I}$ nemusí splňovat na rozdíl od výchozí hry (6.64), kterou jsme interpretovali jako hru s kompensacemi, hypotézu o srovnatelnosti užitku. Skutečnost, že i nová hra vyhoví hypotéze o srovnatelnosti užitku, se projeví tím, že bude platit rovnost $\alpha_i = \alpha$ pro všechna $i \in I$, což odpovídá současné změně společné jednotky měření užitku, a to stejné u všech hráčů (srovn. úvahy minulého paragrafu); transferabilita užitku se ovšem při transformacích typu (5.34) zachovává.

Tudíž podmínka $\alpha_i = \alpha (i \in I)$ je nutná i postačující k tomu, abychom novou hru mohli interpretovat jako hru s kompensacemi. Je-li tato podmínka splněna, lehce zjistíme, že skutečně funkce $\sum_{i \in K} u'_i$, tj. koaliční užitková funkce odpovídající nové soustavě užitkových funkcí podle (6.63), indukuje tentýž kompensační systém preferencí $\bar{U}_K$ $(\emptyset \neq K \subset I)$. Tyto úvahy motivují zavedení následujícího pojmu strategické ekvivalence.

Dvě strategické hry s užitkovými funkcemi v koaličním tvaru, které se liší jenom svými soustavami užitkových funkcí, přičemž $\{u_i\}_{i \in I}$ je soustava užitkových funkcí v první hře a $\{u'_i\}_{i \in I}$ v druhé hře, nazveme *strategicky ekvivalentní*, když existují reálná čísla $\alpha > 0$ a $\beta_i (i \in I)$ taková, že platí vztahy

$$(6.77) \qquad u'_i = \alpha u_i + \beta_i, \quad i \in I.$$

Je-li v resp. v' von Neumannova charakteristická funkce první hry resp. druhé hry, z nichž obě jsou navzájem strategicky ekvivalentní, pak platí transformační rovnice

$$(6.78) \qquad v'(K) = \alpha v(K) + \sum_{i \in K} \beta_i, \quad K \subset I.$$

Vztah mezi konstantami M a M' charakterisujícími prostory Y a Y' podílových vektorů obou strategicky ekvivalentních her je vyjádřen formulí:

$$M' = \alpha M + \sum_{i \in I} \beta_i.$$

Z toho, co jsme zatím řekli, by se mohlo zdát, že kompensace užitku mají smysl jenom ve hrách, v nichž je užitek nejenom transferabilní, nýbrž i srovnatelný. Ve skutečnosti jsme však hypotézy o srovnatelnosti užitku použili jen k tomu, abychom mohli operovat jen s užitkovými funkcemi bez pomocných pojmů, jimiž jsou užitek peněz u_i^* a funkce $w_i (i \in I)$. Ve hře s nesrovnatelným, ale transferabilním užitkem lze rovněž provádět kompensace, a to tak, že se hráči v koalicích řídí *principem maximalisace úhrnné peněžní výplaty* $\sum_{i \in K} w_i$ $(K \subset I)$, kterou mezi sebe distribuují podle dohodnutého K-vektoru peněžních podílů $\{y_i\}_{i \in K}$; tím každý z nich docílí užitku $\alpha'_i y_i + \beta'_i$, jestliže o užitku peněz učiníme předpoklad, že splňuje podmínku transferability ve tvaru

$$u_i^*(\xi) = \alpha'_i \xi + \beta'_i; \quad \alpha'_i > 0 \quad (i \in I).$$

Po přechodu k jiné soustavě užitkových funkcí splňujících transformační vztahy (5.34) poskytnou peněžní podíly y_i užitky, měřené novými jednotkami a k novým počátkům, velikosti

$$\alpha_i(\alpha'_i y_i + \beta'_i) + \beta_i;$$

přitom nové užitky peněz $(u_i^*)'$ budou vyhovovat rovnicím

$$(u_i^*)'(\xi) = \alpha_i \alpha'_i \xi + (\alpha_i \beta'_i + \beta_i), \quad i \in I.$$

Nechceme-li připustit omezující hypotézu o srovnatelnosti užitku, můžeme se dívat na matematický model (6.64) jako na hru, v níž $\{u_i(\omega)\}_{i \in I}$ pro $\omega \in \Omega_E$ interpretujeme jako vektory peněžních výplat hráčům, pro něž jsou peníze užitečné, a spokojit se se svou znalostí, že všichni hráči mají transferabilní užitek, tj. jsou lineární s penězi. Potom lze transformační rovnice (6.77) pro strategickou ekvivalenci chápat tak, že konstanta α charakterisuje změnu peněžní jednotky a že konstanty β_i představují částky, které hráči dostanou vyplaceny (v případě $\beta_i > 0$), nebo které hráči vloží do hry (v případě $\beta_i < 0$) v nových peněžních jednotkách před započetím hry. Tím se nezmění strategické aspekty dané konfliktní situace, neboť koalice se snaží maximalisovat úhrnné peněžní výplaty odpovídající novým peněžním jednotkám: odtud název strategická ekvivalence.

Dvojici (I, v), kde I je neprázdná množina (interpretovaná jako množina hráčů obvykle očíslovaných podle (1.1)) a kde v je číselná funkce definovaná na systému všech podmnožin množiny I, přiřazující každé množině $K \subset I$ konečné reálné číslo $v(K)$ tak, že je splněna podmínka (6.72) pro prázdnou koalici a podmínka (6.73) o superaditivitě, nazýváme *strategická hra ve tvaru s von Neumannovou charakteristickou funkcí*, nebo kratčeji *hra s číselnou charakteristickou funkcí.* Prostor podílových vektorů Y hry (I, v) je definován vztahy (6.69) a (6.70): v prostoru Y definujeme pojmy podílového vektoru individuálně resp. hromadně racionálního stejně jako dříve; spec. prostor racionálních podílových vektorů Y_{imp} je dán vztahem (6.76).

Hry (I, v) a (I, v') s touž množinou hráčů jsou podle definice *strategicky ekvivalentní,* jestliže mezi jejich charakteristickými funkcemi platí vztah (6.78), kde $\alpha > 0$ a $\beta_i(i \in I)$ jsou některá reálná čísla. Strategickou hru (I, v) nazýváme *neesenciální,* když platí rovnost

$$v(I) = \sum_{i \in I} v(i) ;$$

v opačném případě ji nazýváme *esenciální hrou.* Z nerovnosti

$$\sum_{i \in K} v(i) \leqq v(K) \quad \text{pro} \quad K \subset I ,$$

plynoucí ze superaditivity charakteristické funkce v, dedukujeme, že daná hra (I, v) je neesenciální, když a jen když platí rovnosti

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(i) \quad \text{pro každé} \quad K \subset I .$$

K esenciální hře (I, v) přiřazujeme hru (I, v'') s ní strategicky ekvivalentní, jejíž charakteristická funkce je definována vztahem

$$(6.79) \qquad v''(K) = \frac{v(K) - \sum_{i \in K} v(i)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} \quad \text{pro} \quad K \subset \mathrm{I} .$$

Takto odvozená hra (I, v'') se nazývá *redukovaný tvar* (esenciální) hry (I, v) *typu* (0, 1); tento název v sobě obráží skutečnost, že pro charakteristickou funkci v'' danou v (6.79) platí vztahy

$$v''(i) = 0 \ (i \in I) , \quad v''(I) = 1 , \quad 0 \leqq v''(K) \leqq 1 \quad \text{pro} \quad K \subset I .$$

Hra, která je identická se svým redukovaným tvarem, tj. $v = v''$, je tzv. *hra v redukovaném tvaru typu* (0, 1). Redukovaný tvar *typu* $(-1, 0)$ se definuje obdobně, a to tak, aby pro něj bylo $v(i) = -1$ $(i \in I)$ a $v(I) = 0$.

Interpretujeme-li strategickou hru (I, v) s číselnou charakteristickou funkcí jako kooperativní hru s kompensacemi, při jejíž realisaci každá vytvořená koalice K obdrží peněžní částku $v(K)$, o kterou se mají členové koalice podělit, pak jmenujeme dvojici (I, v) *koaliční hra*; jediným strategickým aspektem koaliční hry je snaha hráčů vstoupit do pro ně výhodných koalic. Z tohoto hlediska neesenciální hra je taková, v níž hráči dosáhnou vstupem do koalic stejně, jako když hrají každý na svůj vrub, neboť jejím „řešením" je její jediný racionální podílový vektor $\{v(i)\}_{i \in I}$ (srovn. shora uvedenou rovnost pro neesenciální hry).

Obecněji, když se dvojice (I, v) interpretuje jako kooperativní hra s kompensacemi, která hypoteticky vznikla kanonisací z některé hry v koaličním tvaru, pak bývá v literatuře nazývána *strategická hra s postranními výplatami.*

O kooperativní hře s kompensacemi musíme vždy předpokládat, že na ní neparticipují žádní indiferentní hráči (tedy indiferentní i vůči penězům). Ve smyslu postulátu o nezávislosti na irelevantních faktorech (srovn. kap. 5, Základní postulát racionality) není indiferentní hráč ochoten vstoupit do žádné koalice, neboť není na hře zainteresován.

Příklad. Vyšetříme esenciální hru o třech hráčích, $I = \{1, 2, 3\}$, v redukovaném tvaru typu $(0, 1)$, kterou budeme interpretovat jako koaliční hru a o níž učiníme zjednodušující předpoklad, že pro její charakteristickou funkci v platí vztah

$$v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}) = 2 .$$

Charakteristická funkce v uvažované hry je jednoznačně určena trojicí čísel

$$\alpha = v(\{1, 2\}) , \quad \beta = v(\{1, 3\}) , \quad \gamma = v(\{2, 3\}) .$$

Za „řešení" této hry považujeme racionální podílový vektor $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)})$ určený vztahy

$$y_1^{(0)} = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) , \quad y_2^{(0)} = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) , \quad y_3^{(0)} = \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma) .$$

Důvod, proč tento vektor representuje řešení dané hry, vysvitne nejlépe pro případ, kdy je $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$. Tehdy totiž předpokládaní racionální hráči, aby dosáhli podle principu hromadné racionality maximálního sumárního výtěžku, musí vytvořit maximální koalici I, ježto každá jiná koaliční struktura různá od $\{I\}$ dá sumární výtěžek nižší než $v(I) = 1$. Při vyjednávání o vytvoření maximální koalice se každý hráč řídí principem individuální racionality a zároveň se každá dvojice hráčů i, j snaží dosáhnout, aby jejich celkový podíl $y_i + y_j$ z úhrnu $v(I) = 1$ nepoklesl pod $v(\{i, j\})$, ježto jinak hrozí, že vytvoří samostatnou koalici $\{i, j\}$, čímž zbylý hráč vyjde naprázdno $(v(i) = 0,\ i \in I)$. Z předpokladu, že $\alpha + \beta + \gamma = 2$, vyplyne, že jediným racionálním vektorem, který popsaným požadavkům vyhoví, je právě shora definovaný vektor $y^{(0)}$. Tento vektor má vlastnost, že pro něj platí rovnosti $y_i^{(0)} + y_j^{(0)} = v(\{i, j\})$, $i \neq j (i, j = 1, 2, 3)$.

Poznamenejme, že pro hru, v níž by bylo $\alpha + \beta + \gamma \neq 2$, nelze obdržet řešení tak jednoduché; např. princip, jímž jsme se řídili při hledání hořejšího řešení, selže v případě, kdy uvedený součet je < 2.

Prevence a minimax

V tomto paragrafu vyjdeme při svém vyšetřování z normálního tvaru strategické hry, v níž všichni hráči mají kardinální preference; přitom budeme předpokládat, že je v této hře pevně dána některá soustava užitkových funkcí $\{u_i\}_{i\in I}$. Je-li v dané strategické hře vyznačena kooperace, pak má tato hra tvar (6.4), kde

$$\Pi = \Pi_{\text{norm}} = (\{A_i\}_{i\in I}, \varrho), \quad \Omega = \Omega_E .$$

Podle principu realisace rozšířených pravidel hry vznikne před zahájením vlastní hry některá přípustná koaliční struktura $\mathscr{K} \in K$, přičemž každá realisovaná koalice $K \in \mathscr{K}$ zvolí některou svou sdruženou strategii $a_K \in A_K$. Společná volba sdružené strategie se může uskutečnit buď přímou dohodou nebo dohodou o náhodovém mechanismu, charakterisovaném rozložením pravděpodobnosti $s_K \in S_K$ (srovn. (6.23)) na prostoru sdružených strategií A_K, který vybere sdruženou strategii a_K s pravděpodobností $s_K(a_K)$; v druhém případě říkáme, že členové koalice K zvolili smíšenou strategii s_K.

Nechť tady každá koalice K zvolí některou svou smíšenou strategii $s_K \in S_K$. Potom vektor strategií $a = \{a_K\}_{K\in\mathscr{K}} \in A$ nastane s pravděpodobností, označme ji $s(a)$, která je rovna

$$s(a) = s(\{a_K\}_{K\in\mathscr{K}}) = \prod_{K\in\mathscr{K}} s_K(a_K)\,; \quad a_K \in A_K \quad (K \in \mathscr{K})\,. \tag{6.80}$$

Číselná funkce s definovaná posledním vztahem představuje globální smíšenou strategii, tj. $s \in S$ (srovn. (6.38)), kterou nazýváme *$\mathscr{K}$-vektorem smíšených strategií* (rozumí se koalic v $\mathscr{K}$); rovnost (6.80) zapisujeme v kratším tvaru

$$s = \prod_{K\in\mathscr{K}} s_K \quad \text{resp.} \quad s = \{s_K\}_{K\in\mathscr{K}}\,; \quad s_K \in S_K \quad (K \in \mathscr{K})\,. \tag{6.81}$$

Vztah (6.80) resp. (6.81) charakterisuje tzv. *stochastickou nezávislost* složek vektoru $\{a_K\}_{K\in\mathscr{K}}$ chápaného jako náhodný vektor s rozložením pravděpodobnosti s. Říkáme také, že globální smíšená strategie s je nekorelovaná modulo koaliční struktury $\mathscr{K}$. Tudíž předpoklad, že mezi členy různých koalic z nějaké koaliční struktury $\mathscr{K}$ nenastává (závazná) kooperace, který jsme učinili v úvodním paragrafu této kapitoly, se z pravděpodobnostního hlediska projevuje ve stochasticky nezávislé volbě složek vektoru $\{a_K\}_{K\in\mathscr{K}}$.

Množinu všech $\mathscr{K}$-vektorů smíšených strategií označíme S_K; v symbolickém zápisu:

$$S_{\mathscr{K}} = \prod_{K\in\mathscr{K}} S_K\,.$$

Tudíž platí: $S_{\mathscr{K}} \subset S$. Podle (6.40) platí rovnost

$$\varrho(\{s_K\}_{K\in\mathscr{K}}) = \sum_{K\in\mathscr{K}} \sum_{a_K\in A_K} \Big(\prod_{K\in\mathscr{K}} s_K(a_K)\Big)\, \varrho(\{a_K\}_{K\in\mathscr{K}})\,, \tag{6.82}$$

kde $\varrho(\{s_K\}_{K\in\mathscr{K}})$ representuje výsledek, jímž skončí uvažovaná realisace hry, když koalice patřící do koaliční struktury $\mathcal{K}$ zvolí $\mathcal{K}$-vektor smíšených strategií $\{s_K\}_{K\in\mathcal{K}}$. Užitek hráče i z výsledku (6.82) je výplata hráči i vyjádřená podle (6.40) a (5.21) formulí

$$H_i(\{s_K\}_{K\in\mathcal{K}}) = \sum_{K\in\mathcal{K}} \sum_{a_K\in A_K} \left(\prod_{K\in\mathcal{K}} s_K(a_K)\right) H_i(\{a_K\}_{K\in\mathcal{K}}) . \tag{6.83}$$

Z provedené úvahy plyne jednoduchý závěr. Když se totiž v dané hře realisuje koaliční struktura $\mathcal{K}$, jeví se hráčům objektivní base původní hry ve tvaru

$$(I, \Omega_E, (\{S_K\}_{K\in\mathcal{K}}, \varrho)) , \tag{6.84}$$

v němž je výsledková funkce ϱ rozšířena z prostoru A *ryzích* vektorů strategií na prostor $S_{\mathcal{K}} \supset A$ definicí (6.82). Trojice (6.84) představuje tzv. *smíšené rozšíření* objektivní base dané hry *vzhledem ke koaliční struktuře* $\mathcal{K}$.

Snadno nahlédneme, že pojem garantovatelnosti výsledků pro danou koalici K vychází ze smíšeného rozšíření objektivní base dané hry vzhledem ke koaliční struktuře $\{K, -K\}$ (srovn. též (6.8)) a opírá se přitom o subjektivní charakteristiku koalice K vyjádřenou v (6.9). Také při vyšetřování pojmu prevence, ke kterému nyní přistoupíme, se staráme jenom o subjektivní vlastnosti členů koalice K a vycházíme ze smíšeného rozšíření objektivní base, charakterisující interakci mezi koalicí a antikoalicí:

$$(I, \Omega_E, (S_K, S_{-K}, \varrho)) .$$

Smíšená strategie s_{-K} antikoalice $-K$ se nazývá *strategie hrozby* proti smíšenému výsledku ω (vzato z hlediska koalice K), nebo také *strategie prevence* výsledku ω, když lze pro jakoukoli smíšenou strategii s_K koalice K najít člena této koalice $i \in K$, který dosáhne nižšího score, než představuje ω, ve smyslu vztahu

$$\omega \succ_i \varrho(s_K, s_{-K}) .$$

V tomto případě také říkáme, že strategie s_{-K} *zabraňuje* tomu, aby koalice K dosáhla výsledku ω. Obráceně pravíme, že smíšený výsledek *nelze ohrozit* strategií s_{-K} antikoalice, jestliže s_{-K} není strategií hrozby proti výsledku ω, což znamená, že je splněna podmínka:

$$\exists\, (s_K \in S_K)\, \forall\, (i \in K)\, \varrho(s_K, s_{-K}) \succsim_i \omega ; \tag{6.85}$$

srovn. s touto podmínkou podmínku garantovanosti (6.24) resp. (6.11).

Smíšený výsledek ω *není* antikoalicí $-K$ *ohrozitelný*, neboli *není preventovatelný*, jestliže pro každou strategii s_{-K} je splněna podmínka (6.85); v tomto případě se výsledek ω nazývá *β-dosažitelný* pro koalici K. Označíme-li $v_\beta(K)$ množinu všech β-dosažitelných výsledků pro koalici K, dostaneme vztah:

$$v_\beta(K) = \{\omega : \omega \in \Omega_E; \forall\, (s_{-K} \in S_{-K})\, \exists\, (s_K \in S_K)\, \forall\, (i \in K)\, \varrho(s_K, s_{-K}) \succsim_i \omega\} \tag{6.86}$$

$$\text{pro} \quad \emptyset \neq K \subset I ,$$

přičemž klademe definitoricky $v_\beta(\emptyset) = \emptyset$.

Lze se přesvědčit, že v_β jako funkce na systému všech podmnožin množiny hráčů I vyhovuje požadavkům (1) až (4) kladeným na koaliční výsledkovou funkci; přitom množina $v_\beta(K)$, skládající se ze smíšených výsledků, představuje tzv. *prevenční hodnotu hry* pro koalici K. Komprimujeme-li data výchozí hry v normálním tvaru do koaličního tvaru (6.46) podle principu prevence, tj. klademe-li $v = v_\beta$, tedy definujeme $v(K)$ jako prevenční hodnotu hry pro $K \subset I$, nazýváme odvozenou hru *koaličním tvarem* dané hry *pro prevenci*. Snadno nahlédneme, že tento koaliční tvar nelze interpretovat podle principu realisace hry v koaličním tvaru, který jsme uvedli v dřívějším paragrafu a charakterisovali jako garanční. Mezi garanční a prevenční hodnotou hry zřejmě platí vztah

$$v_\alpha(K) \subset v_\beta(K)\,, \quad K \subset I\,.$$

Nakonec poznamenejme, že prevenční hodnota hry splňuje podmínku o konickém rozšíření (6.52), takže podle (6.36) platí

$$v_\alpha(I) = v_\beta(I) = \operatorname{con}\,[\Omega^{(0)}]$$

(srovn. (6.66)). Lze však ukázat, že obecně rovnost $v_\alpha(K) = v_\beta(K)$ neplatí.

Aumannova-Pelegova charakteristická funkce odvozená z prevenční hodnoty hry v_β rovnicí (6.49), kterou budeme označovat $\boldsymbol{v}_\beta$, splňuje vztah

$$(6.87)\quad \boldsymbol{v}_\beta(K) = \{x_K \in R^K : \forall\,(s_{-K} \in S_{-K})\,\exists\,(s_K \in S_K)\,\forall\,(i \in K)\; H_i(s_K, s_{-K}) \geqq x_i\}$$
$$\text{pro} \quad \emptyset \neq K \subset I\,;$$

srovn. s touto rovností vztah (6.43) pro $\boldsymbol{v}_\alpha$. Množině $\boldsymbol{v}_\beta(K)$ říkáme (Aumannova-Pelegova) *β-hodnota hry* pro koalici K a funkci $\boldsymbol{v}_\beta$ nazýváme Aumann-Pelegovou charakteristickou funkcí *pro prevenci* neboli *prevenční* charakteristickou funkcí Mezi garanční a prevenční charakteristickou funkcí platí obdobně vztahy $\boldsymbol{v}_\alpha(K) \subset \subset \boldsymbol{v}_\beta(K)$, $K \subset I$, přičemž platí $\boldsymbol{v}_\alpha(I) = \boldsymbol{v}_\beta(I)$, kdežto rovnost $\boldsymbol{v}_\alpha(K) = \boldsymbol{v}_\beta(K)$ obecně neplatí.

Důležitá von Neumannova *věta o minimaxu*, která má centrální význam v teorii strategických her, tvrdí, že i když $v_\alpha \neq v_\beta$ (resp $\boldsymbol{v}_\alpha \neq \boldsymbol{v}_\beta$), přesto platí rovnost

$$\max\,\{\sum_{i\in K} u_i(\omega) : \omega \in v_\alpha(K)\} = \max\,\{\sum_{i\in K} u_i(\omega) : \omega \in v_\beta(K)\}$$

pro $K \subset I$ (srovn. (6.65)). Z této významné rovnosti plyne, že číselná charakteristická funkce odpovídající garanční hodnotě hry je identická s číselnou charakteristickou funkcí odpovídající prevenční hodnotě hry dané v normálním tvaru. Pro hru v normálním tvaru tedy klademe

$$(6.68)\qquad v(K) = \max\,\{\sum_{i\in K} u_i(\omega) : \omega \in v_\alpha(K)\} =$$
$$= \max\,\{\sum_{i\in K} u_i(\omega) : \omega \in v_\beta(K)\}$$

a číslo $v(K)$ nazýváme von Neumannovou hodnotou nebo prostě *hodnotou hry* pro koalici K; funkce v takto definovaná se nazývá *von Neumannova charakteristická funkce* dané hry v normálním tvaru. Větu o minimaxu lze vyjádřit v ekvivalentním tvaru jako rovnost

$$\max \{ \sum_{i \in K} x_i : x_K \in v_\alpha(K)\} = \max \{ \sum_{i \in K} x_i : x_K \in v_\beta(K)\} , \quad K \subset I$$

(srovn. (6.74)), kterou lze přepsat podle (6.43) a (6.87) na tvar

$$(6.89) \qquad v(K) = \max_{s_K \in S_K} \min_{s_{-K} \in S_{-K}} \sum_{i \in K} H_i(s_K \; s_{-K}) = \\ = \min_{s_{-K} \in S_{-K}} \max_{s_K \in S_K} \sum_{i \in K} H_i(s_K, s_{-K}) , \quad K \subset I ,$$

podle něhož dostala tato věta své jméno. Von Neumannova hodnota hry $v(i)$ pro jednočlennou koalici $K = \{i\}$, $i \in I$, je totožná s garanční výplatou hráče i, jak byla definována v (6.27); srovn. (6.75). Vztahy (6.89) tedy platí speciálně pro garanční výplatu každého hráče, čímž nám poskytují prostředek k jejímu efektivnímu výpočtu.

Tudíž interpretujeme-li strategickou hru v normálním tvaru jako hru s kompensacemi a komprimujeme-li její data ať již podle principu garance, nebo podle principu prevence, dostaneme převedením jejího komprimovaného koaličního tvaru na kanonický tvar, odpovídající možnosti kompensací užitku, stejnou číselnou charakteristickou funkci v definovanou vztahem (6.88) resp. (6.89). Zároveň odvozená hra (I, v), která representuje maximální možné komprimování dat výchozí hry, je jednoznačně určena redukovaným kanonickým tvarem (5.51) dané hry podle (6.89). Definicí (6.89) se obyčejně v literatuře komprimuje normální hra na tvar s číselnou charakteristickou funkcí.

Strategická hra v normálním tvaru (s kardinálními preferencemi) se nazývá *hra s konstantním součtem*, když některá soustava užitkových funkcí $\{u_i\}_{i \in I}$ této hry má vlastnost, že

$$(6.90) \qquad \sum_{i \in I} u_i(\omega) = \gamma \quad \text{pro každé} \quad \omega \in \Omega_E ,$$

kde γ je některé reálné číslo. Soustavě užitkových funkcí splňující podmínku konstantního součtu tvaru (6.90) říkáme soustava *o konstantním součtu*. Jsou-li $\{u_i\}_{i \in I}$ a $\{u'_i\}_{i \in I}$ dvě soustavy užitkových funkcí o konstantním součtu, pak existují konstanty $\alpha > 0$ a $\beta_i (i \in I)$, takové, že platí transformační rovnice (6.77). Z posledního tvrzení plyne, že ke každé hře s konstantním součtem existuje taková její soustava užitkových funkcí, v níž je konstanta γ rovna nule; říkáme jí soustava *o nulovém součtu*. Proto se hry s konstantním součtem nazývají také *hry s nulovým součtem*.

Je-li v von Neumannova charakteristická funkce hry s konstantním součtem, která je určena formulí (6.88) resp. (6.89) ze soustavy užitkových funkcí o konstantním součtu, pak pro ni platí vztah

$$(6.91) \qquad v(K) + v(-K) = v(I) \quad \text{pro} \quad K \subset I ,$$

přičemž $v(I) = \gamma$. Jestliže v a v' jsou charakteristické funkce odpovídající dvěma soustavám užitkových funkcí o konstantním součtu téže hry, pak jsou hry (I, v) a (I, v') strategicky ekvivalentní. Spec. je-li v' charakteristická funkce určená soustavou užitkových funkcí o nulovém součtu, je pro ni splněn vztah

$$v'(-K) = -v'(K)\,, \quad K \subset I\,. \tag{6.92}$$

Při vyšetřování racionálního jednání ve strategických hrách s nulovým součtem vždy volíme soustavu užitkových funkcí, která má konstantní popříp. nulový součet, neboť jak víme, strategické aspekty konfliktních situací zůstávají invariantní vůči lineárním transformacím užitků jednotlivých hráčů.

Pro strategickou hru o dvou hráčích s konstantním součtem platí, že její preferenční schéma (U_1, U_2) vyhovuje podmínce:

$$\omega U_1 \omega'\,, \quad \text{když a jen když} \quad \omega' U_2 \omega \; (\omega, \omega' \in \Omega_E)\,. \tag{6.93}$$

Dva systémy preferencí U_1 a U_2 nazýváme navzájem *antagonistické*, jestliže pro ně platí podmínka (6.93). Kterákoli hra o dvou hráčích, nejenom v normálním tvaru a s kardinálními preferencemi, se nazývá *antagonistická*, když její preferenční schéma (U_1, U_2) splňuje podmínku (6.93), tj. když jsou systémy preferencí obou hráčů navzájem antagonistické; podmínka (6.93) charakterisuje antagonismus zájmů obou protivníků participujících v takové hře.

V antagonistické hře v normálním tvaru s kardinálními preferencemi vždy volíme při jejím vyšetřování ve smyslu hořejší poznámky soustavu užitkových funkcí (u_1, u_2) o nulovém součtu, tj. takovou, že platí rovnost

$$u_1 + u_2 = 0 \quad \text{čili} \quad u_2 = -u_1\,.$$

Odtud vyplývá, že pro výplatní funkce antagonistické hry platí vztah

$$H_1 + H_2 = 0 \quad \text{čili} \quad H_2 = -H_1\,.$$

Z posledního vztahu je patrné, že *redukovaným kanonickým tvarem antagonistické hry je maticová hra* (srovn. předcházející kapitolu). Garanční hodnoty maticové hry $v(i)$ jsou vyjádřeny formulemi (6.89) pro $K = \{i\}$, $i = 1, 2$, tj.

$$v(1) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} H_1(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} H_1(s_1, s_2) = -v(2)\,.$$

Číslo $v(1)$ se nazývá *hodnota maticové hry*. Garanční strategie v maticové hře se v literatuře nazývají *optimální strategie*. Jsou-li $\tilde{s}_1$ a $\tilde{s}_2$ garanční strategie prvního a druhého hráče, plyne z (6.27) podle předcházejícího vztahu rovnost

$$v(1) = H_1(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)\,.$$

Pro antagonistické hry tedy platí tvrzení: když každý z obou hráčů zvolí některou svoji optimální strategii, je výsledek hry jednoznačně určen jako výplatní vektor $(v(1), -v(1))$.

Je-li (I, v) jakákoli strategická hra s číselnou charakteristickou funkcí, která splňuje podmínku (6.91), nazývá se *hrou s konstantním součtem*. Jsou-li (I, v) a (I, v') dvě hry strategicky ekvivalentní, z nichž jedna je hrou s konstantním součtem, pak i druhá je hrou s konstantním součtem. K esenciální hře (I, v) s konstantním součtem přiřazujeme hru (I, v') s ní strategicky ekvivalentní, jejíž charakteristická funkce je definována vztahem

$$v'(K) = nv''(K) - |K| \quad \text{pro} \quad K \subset I\,, \quad n = |I|\,,$$

přičemž v'' je dána vzorcem (6.79). Takto odvozená hra se nazývá *redukovaný tvar* (esenciální) hry (I, v) *typu* $(-1, 0)$. Pro redukovaný tvar (I, v') dané hry s konstantním součtem platí vztah (6.92), přičemž

$$v'(i) = -1 \quad (i \in I)\,, \quad v'(I) = 0\,.$$

Je-li $v = v'$, říkáme, že hra (I, v) je dána *v redukovaném tvaru typu* $(-1, 0)$.

Na závěr poznamenejme, že jsme kanonické resp. redukované kanonické tvary zavedli pro hry bez formálně vyznačené kooperace. Při studiu strategických her s vyznačenou kooperací se omezujeme na tři typy, jak jsme již o tom mluvili dříve: na hry kooperativní, nekooperativní a dohodové. Za *základní tvary* těchto her, pro něž se vede vyšetřování racionálního jednání, považujeme: pro kooperativní hru s kompensacemi strategickou hru s číselnou charakteristickou funkcí; pro kooperativní hru bez kompensací strategickou hru s abstraktní charakteristickou funkcí (zvanou též *hra bez postranních výplat*); pro nekooperativní hru normalisovanou strategickou hru; pro dohodovou hru trojici $(I, \tilde{X}, \{v(i)\}_{i\in I})$, kde $\tilde{X}$ je konvexní polyedr (redukovaný prostor výplatních vektorů) a kde $v(i)$ jsou libovolná čísla, která interpretujeme ve smyslu vztahu (6.56).