KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 3/1967

Zur Stabilität der linearen Impulsfilter

LUDVÍK PROUZA

Es wird der Zusammenhang der Hurewicz'schen und der Ljapunov'schen Definition der Stabilität untersucht für lineare Impulsfilter, besonders für diejenigen, die zu einer Differenzengleichung mit zeitveränderlichen Koeffizienten gehören.

1. EINLEITUNG

Im vergangenen Jahrzenhtel ist eine Reihe von Arbeiten erschienen, in den sich die Autoren mit folgender Definition kritisch befassten.

Definition 1,1. Ein lineares System ist stabil, wenn bei jedem beschränkten Eingangssignal sein Ausgangssignal beschränkt bleibt.

Diese Definition ist wahrscheinlich in [6] erstmals eingeführt worden und zwar für lineare zeitinvariante Impulsfilter. Bei Versuchen, ihre Giltigkeit auf zeitveränderliche -insbesondere stetige-Systeme auszudehnen, ist man zu einigen Paradoxen gekommen [7], [8], [12], wobei z. T. auch Missverständnisse eine Rolle spielten.

Man spricht im Zusammenhang mit der Definition 1,1 von der „globalen" Stabilität, im Gegensatz zur „inneren" oder „lokalen" Ljapunovschen Stabilität. Der Inhalt des Begriffs „System" ist dabei von grosser Bedeutung.

In diesem Artikel wollen wir auf elementare Weise den Sinn und die Tragweite der Definition 1,1 für lineare Impulsfilter untersuchen, besonders für solche, welche mit Differenzengleichungen mit beschränkten Koeffizienten beschrieben werden können.

Unser Ausgangspunkt sind einige Sätze aus [4], [10], und die berühmten Sätze von Kojima-Schur und Silverman-Toeplitz über die „linearen Mittelbildungen" [1], [5].

2. EINIGE SÄTZE ÜBER DIE LÖSUNGEN EINES SYSTEMS VON LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN MIT BESCHRÄNKTEN KOEFFIZIENTEN

Betrachten wir das System

$$y_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, y_j(t) + x_i(t)\,, \tag{1}$$

$$(t = 0, 1, 2, \ldots;\; i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$\{a_{ij}(t)\}$ und $\{x_i(t)\}$ gegebene (komplexe) Folgen in der Veränderlichen t. Die Folgen $\{a_{ij}(t)\}$ werden wir im ganzen Artikel beschränkt voraussetzen, ohne das im Weiteren immer wieder zu betonen.

Satz 2,1. *Die Matrix*

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t), & \ldots, & a_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t), & \ldots, & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

habe alle Elemente über der Hauptdiagonale gleich Null, d.h.

$$a_{ij}(t) = 0 \quad \text{für} \quad i < j\,. \tag{3}$$

Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System (1) *bei jeder Wahl der beschränkten Folgen* $\{x_i(t)\}$ (*und bei beliebigen Anfangsbedingungen*) *nur beschränkte Lösungen habe, darin, dass für jedes* i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *und alle* $t > 0$

$$\sum_{k=0}^{t-1} \prod_{l=k+1}^{t-1} |a_{ii}(l)| < K < \infty \tag{4}$$

$$\Big(\prod_{t}^{t-1} = 1\Big)$$

gilt (K *unabhängig von* t).

Satz 2,2. *Falls das System* (1) *die Bedingung* (3) *erfüllt und bei jeder Wahl der beschränkten Folgen* $\{x_i(t)\}$ (*und bei beliebigen Anfangsbedingungen*) *nur beschränkte Lösungen hat, dann hat das homogene System*

$$y_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, y_j(t) \tag{5}$$

$$(t = 0, 1, 2, \ldots;\; i = 1, 2, \ldots, n)$$

n linear unabhängige beschränkte Lösungen und für alle gilt

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |y_j(t)| = 0\,. \tag{6}$$

Beweise. Die Sätze 2,1 und 2,2 sind unmittelbare Folgerungen der Sätze 1,2,3,4 aus [10].

Für das allgemeine System (1), für welches die Bedingung (3) nicht erfüllt ist, wird in [10] rekurrierend eine Matrixtransformation konstruiert, die zu einem diese Bedingung erfüllenden System führt. Aus der Transformation folgt leicht die folgende Verallgemeinerung des Satzes 2,2.

Satz 2,3. *Falls das System* (1) *bei jeder Wahl der beschränkten Folgen* $\{x_i(t)\}$ (*und bei beliebigen Aufangsbedingungen*) *nur beschränkte Lösungen hat, dann hat das homogene System* (5) n *linear unabhängige beschränkte Lösungent und für alle gilt* (6).

Definition 2,1. Die triviale Lösung von (5) heisst exponentiell stabil, wenn es zwei positive von t_0 ($t_0 \geqq 0$) unabhängige Zahlen a, α derart gibt, dass

$$|y(t, \boldsymbol{q}, t_0)| \leqq a|\boldsymbol{q}|\, e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{7}$$

gilt (dabei sind $\boldsymbol{q}$ die vektoriell geschriebenen Anfangsbedingungen für den Augenblick t_0 und $\boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{q}, t_0)$ ist diejenige Lösung, die für t_0 die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{q}$ erfüllt).

Satz 2,4. *Das System* (1) *habe bei jeder Wahl der beschränkten Folgen* $\{x_i(t)\}$ (*und bei beliebigen Anfangsbedingungen*) *nur beschränkte Lösungen. Dann ist die triviale Lösung von* (5) *exponentiell stabil.*

Beweis. Siehe [4], S. 439–440.

Anmerkung 2,1. In [4] behandelt man auch nichtlineare Differenzengleichungen, deshalb postuliert man Existenz einer positiven, von t_0 unabhängigen Zahl h und die Erfüllung von (7) nur für $|\boldsymbol{q}| < h$. Bei linearen Gleichungen kann man darauf offenbar verzichten.

Der Satz 2,4 ist eine wesentliche Verschärfung des Satzes 2,3.

3. EINIGE SÄTZE ÜBER DIE LINEAREN IMPULSFILTER

Betrachten wir das lineare Impulsfilter

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(t, k)\, x(k) \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

mit der Eingangsfolge $\{x(t)\}$ und der Ausgangsfolge $\{y(t)\}$. Seine Gewichtsmatrix ist

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} w(0, 0), & w(0, 1), & \ldots \\ w(1, 0), & w(1, 1), & \ldots \\ w(2, 0), & w(2, 1), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Bekanntlich ist (und man sieht es unmittelbar aus (8)) die $l + 1$-te Spalte der Matrix (9) die Ausgangsreaktion des Filters (8) auf die Folge $\{x(t)\}$, für welche

$$x(t) = 1 \quad \text{für} \quad t = l\,, \qquad x(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \neq l\,, \qquad (l \geqq 0) \tag{10}$$

also auf den um l „Schritte" verzögerten Einheitsimpuls. Für physikalisch realisierbare Filter ist (9) eine untere Dreiecksmatrix, d.h. $w(i, j) = 0$ für $i < j$. Neben der physikalischen Realisierbarkeit kann man an das Filter andere Forderungen stellen. Insbesondere soll das Filter stabil gemäss der Definition 1,1 sein oder weitere stärkere Bedingungen erfüllen, wie wir gleich sehen werden.

Satz 3,1. *Für die Stabilität des Filters* (8) *gemäss der Definition* 1,1 *ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w(t, k)| < M < \infty \tag{11}$$

für alle $t \geqq 0$, M *unabhängig von* t.

Satz 3,2. *Es sei die Eingangsfolge des Filters* (8) *eine Nullfolge, d.i.* $x(t) \to 0$ *für* $t \to \infty$. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ausgangsfolge des Filters auch eine Nullfolge ist, ist* (11) *und zugleich die Existenz von*

$$\lim_{t \to \infty} w(t, k) = 0 \tag{12}$$

für jedes

$$k \geqq 0\,.$$

Satz 3,3. *Damit am Filter* (8) *jeder Null-Eingangsfolge eine Null-Ausgangsfolge und jeder konvergenten Eingangsfolge eine konvergente Ausgangsfolge entsprechen, dazu sind die Bedingungen* (11), (12) *und Existenz von*

$$W = \lim_{t \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} w(t, k) \tag{13}$$

notwendig und hinreichend.

Beweise. Die Sätze 3,1, 3,2 und 3,3 folgen unmittelbar aus den berühmten Sätzen von Kojima-Schur und Silverman-Toeplitz über lineare Mittelbildungen ([1], S. 71–79 oder [5], S. 62–69).

Bekanntlich sind bei einem allgemeinen, d.i. nur mittels seiner Gewichtsmatrix definierten Filter, die Bedingungen (11), (12) und (13) unabhängig voneinander. Insbesondere kann also (11), nicht aber (12) erfüllt sein.

Vom technischen Standpunkt aus sind jedoch diejenigen Filter wichtig, die mittels einer Differenzengleichung beschrieben werden können. Es sind nämlich die einzigen

Filter, deren Blockschema mit einer endlichen Zahl von Verstärkern, Verzögerungsgliedern und Summierungsgliedern auskommt und dabei die zugehörige Matrix (9) unendlich viele von Null veschiedene Elemente enthalten kann.

4. LINEARE IMPULSFILTER, DIE MITTELS EINER DIFFERENZENGLEICHUNG BESCHRIEBEN WERDEN KÖNNEN

Betrachten wir die lineare Differenzengleichung

$$y(t) = a_1(t)\, y(t-1) + \ldots + a_n(t)\, y(t-n) + x(t) \quad (t = 0, 1, 2, \ldots,)\,. \tag{14}$$

Mit den bekannten Substitutionen

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t+1)\,, \quad \text{d.i.} \quad y(t-1) = y_1(t)\,, \\ y(t-1) &= y_2(t+1)\,, \quad \text{d.i.} \quad y(t-2) = y_2(t)\,, \\ &\vdots \\ y(t-n+1) &= y_n(t+1)\,, \quad \text{d.i.} \quad y(t-n) = y_n(t) \end{aligned} \tag{15}$$

können wir die Gleichung (14) als ein System der Form (1) schreiben:

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= a_1(t)\, y_1(t) + \ldots + a_n(t)\, y_n(t) + x(t)\,, \\ y_2(t+1) &= y_1(t)\,, \\ y_3(t+1) &= y_2(t)\,, \\ &\vdots \\ y_n(t+1) &= y_{n-1}(t)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Matrix der Koeffizienten bei $y_i(t)$ rechts in (16) ist die bekannte Matrix von Frobenius.

Für ein physikalisch realisierbares Filter bekommt man aus (14) mit der Eingangsfolge (10) und mit

$$y(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < l \tag{17}$$

bekanntlich den folgenden Satz.

Satz 4,1. *Die $(l+1)$-te Spalte der Gewichtsmatrix des zur Gleichung* (14) *gehörigen Filters entsteht durch die Rekurrenzrelationen*

$$\begin{aligned} w(l, l) &= 1\,, \\ w(l+1, l) &= a_1(l+1)\,, \\ w(l+2, l) &= a_1(l+2)\, w(l+1, l) + a_2(l+2)\,, \\ &\vdots \\ w(l+n-1, l) &= a_1(l+n-1)\, w(l+n-2, l) + \\ &\quad + a_2(l+n-1)\, w(l+n-3, l) + \ldots + a_{n-1}(l+n-1), \end{aligned} \tag{18}$$

$$w(l+n, l) \quad = a_1(l+n)\, w(l+n-1, l) + a_2(l+n)\, w(l+n-2, l) + \\ + \ldots + a_{n-1}(l+n)\, w(l+1, l) + a_n(l+n)\,.$$

Beginnend mit der $n + 1$-ten Relation kann man (18) als die zu (14) gehörende homogene Differenzengleichung auffassen. Die ersten n Relationen in (18) definieren ihre Anfangsbedingungen.

Allgemeiner bekommt man aus (14) mit (17) und mit

$$x(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < l\,, \qquad x(l) \neq 0 \tag{19}$$

die Relationen

$$\begin{aligned} y(l) \quad &= x(l)\,, \\ y(l+1) &= a_1(l+1)\, y(l) \qquad + x(l+1)\,, \\ y(l+2) &= a_1(l+2)\, y(l+1) + a_2(l+2)\, y(l) + x(l+2)\,, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{20}$$

Mit den Substitutionen ($k \geqq 0$)

$$\begin{aligned} x(l+k) &= x^*(k)\,, \quad y(l+k) = y^*(k)\,, \\ a_i(l+k) &= a_i^*(k)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{21}$$

ist es offenbar dasselbe, als ob wir den Zeitanfang verschoben hätten und eine neue Differenzengleichung lösen würden mit der Gewichtsmatrix mit den Elementen

$$\begin{gathered} w^*(0, 0) = w(l, l) = 1\,, \\ w^*(1, 0) = w(l+1, l)\,, \quad w^*(1, 1) = w(l+1, l+1) = 1\,, \\ \vdots \end{gathered} \tag{22}$$

Augenscheinlich gilt der folgende Satz.

Satz 4,2. *Gelten für die Matrix* (9) *die Bedingungen* (11), (12) *oder* (13), *so gelten sie für jede Matrix, die aus* (9) *durch Weglassen der l ersten Zeilen und Spalten entsteht* (*also mit den Elementen aus* (22)).

Man kann also sagen, dass die Eigenschaften der Gleichung (14), die aus (11), (12) oder (13) folgen, invariant zur Zeitanfangsverschiebung nach rechts bleiben.

5. LINEARE IMPULSFILTER, DIE ZU EINER DIFFERENZENGLEICHUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN GEHÖREN

Ein lineares Impulsfilter heisst zeitinvariant, wenn zu einer „verschobenen" Eingangsfolge eine um dieselbe Schrittzahl „verschobene" Ausgangsfolge gehört.

Bekanntlich ist dazu notwendig und hinreichend, dass in der Gewichtsmatrix (9)

$$w(i, j) = w(k, l) = w(k - l) \quad \text{für} \quad i - j = k - l\,, \quad j \leqq i \tag{23}$$

gilt.

Speziell gilt (23) bei (14) mit konstanten Koeffizienten $a_i(t) = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Alle Relationen (18) sind also in diesem Fall identisch.

Satz 5,1. *Erfüllt die Matrix* (9) *eines zeitinvarianten Filters die Bedingung* (11), *so erfüllt sie auch* (12) *und* (13).

Beweis. In diesem Fall bedeutet (11), dass die Reihe $\sum_{k=\infty}^{\infty} w(k)$ absolut konvergent ist. Daraus ist die Erfüllung von (12) und (13) klar.

Die Bedingung (11) bedeutet ja die Stabilität des Filters gemäss der Definition 1,1 und die Bedingungen (11) und (12) zusammen bedeuten, dass das Filter stabil und asymptotisch stabil nach Ljapunov ist. Diese Behauptung kann man bekanntlich bei einem zu einer Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten gehörenden Impulsfilter umkehren.

Dagegen folgt (11) nicht aus der blossen Stabilität nach Ljapunov. Z.B. ein Summator mit der Gewichtsmatrix

$$W = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ 1, & 1, & 0, & 0, & \ldots \\ 1, & 1, & 1, & 0, & \ldots \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{pmatrix} \tag{24}$$

ist nach Ljapunov stabil (bei einer hinreichend kleinen Anfangsbedingung und mit Null-Eingang bleibt dessen Ausgangsfolge beliebig nahe zu Null), dagegen ist (11) offenbar nicht erfüllt.

Angenehm ist, dass aus (11) neben (12) noch die stärkere Bedingung (13) folgt.

6. LINEARE IMPULSFILTER, DIE ZU EINER DIFFERENZENGLEICHUNG MIT VERÄNDERLICHEN KOEFFIZIENTEN GEHÖREN

Natürlich kann man fragen, inwieweit die Behauptungen des vorigen Absatzes im Falle einer Differenzengleichung mit veränderlichen Koeffizienten gelten.

Satz 6,1. *Ist ein lineares zu einer Differenzengleichung mit veränderlichen Koeffizienten gehörendes Impulsfilter stabil gemäss der Definition* 1,1, *so ist es stabil und asymptotisch stabil nach Ljapunov.*

Beweis. Nach der Vorausssetzung und nach dem Satz 3,1 ist (11) erfüllt. Nach den Sätzen 2,3 und 4,2 befinden sich in allen Spalten der Gewichtsmatrix (9) Nullfolgen, denn man kann die Lösungen von (18) als lineare Kombinationen der linear unabhängigen Lösungen aus dem Satze 2,3 bilden. Es ist also (12) erfüllt und aus dem Satze 3,2 folgt die Behauptung des Satzes 6,1.

Man kann fragen, ob vielleicht auch hier aus (11) nicht nur (12), sondern auch (13) folgt. Wir wollen an einem einfachen Beispiel zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Beispiel 6,1. In der Gleichung der ersten Ordnung $y(t) = a(t)\, y(t-1)$ wählen wir

$$a(t) = \tfrac{1}{2} \,.\, (-1)^{t-1} \,. \tag{25}$$

Wir können uns leicht überzeugen, dass

$$w(i,j) = (\tfrac{1}{2})^{i-j} \,.\, (-1)^{[(i-j)(i+j-1)]/2} \quad (i \geqq j)\,. \tag{26}$$

Deshalb gilt (11) (und freilich auch (12)).

Betrachten wir nun den Vorzeichenwechsel in (26), wenn wir von $w(i,j)$ zu $w(i, j-1)$ übergehen. Der neue Exponent bei (-1) ist $(i-j+1)(i+j-2)/2$. Es ist

$$\frac{(i-j+1)(i+j-2)}{2} - \frac{(i-j)(i+j-1)}{2} = j - 1\,. \tag{27}$$

Ist also i gerade, so seiht das „Ende" der i-ten Zeile in der Gewichtsmatrix so aus:

$$\ldots,\ +\tfrac{1}{8},\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{2},\ +1\,. \tag{28}$$

Ist i ungerade, so sieht das „Ende" der i-ten Zeile so aus:

$$\ldots,\ -\tfrac{1}{8},\ -\tfrac{1}{4},\ +\tfrac{1}{2},\ +1\,. \tag{29}$$

Das bedeutet

$$\sum_{j=0}^{\infty} w(i,j) < \tfrac{1}{2} \ \text{für gerade } i\,, \tag{30}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} w(i,j) > 1 \ \text{für ungerade } i\,.$$

Also ist (13) nicht erfüllt.

Man kann fragen, unter welchen Zusatzbedingungen (13) gelten kann. Wir werden eine einfache notwendige Bedingung zeigen.

Schreiben wir

$$\sum_{k=0}^{t} w(t,k) = W(t)\,. \tag{31}$$

Es ist physikalisch klar und man könnte es leicht genau beweisen, dass $W(t)$ die Lösung der Differenzengleichung (14) ist, und zwar mit Null-Anfangsbedingungen und mit $\{x(t)\}$, für welche

$$x(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0\,, \tag{32}$$

$$x(t) = 1 \quad \text{für} \quad t \geqq 0$$

gilt. Es ist also $\{x(t)\}$ der „Einheitssprung" und es gilt

$$W(t) - a_1(t)\, W(t-1) - \ldots - a_n(t)\, W(t-n) = 1\,. \tag{33}$$

Satz 6,2. *Es gelte* (11) *für eine Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten. Für die Existenz eines Grenzwertes* $\lim W(t) = W \neq 0$ *für* $t \to \infty$ *ist die Existenz von*

$$\lim_{t \to \infty} [a_1(t) + a_2(t) + \ldots + a_n(t)] = \frac{W-1}{W} \tag{34}$$

notwendig.

Beweis. Es existiert ein $L > 1$ so, dass $|a_j(t)| < L$ für $t \geqq 0$ und $j = 1, 2, \ldots, n$. Es existiere $\lim W(t) = W \neq 0$ für $t \to \infty$. Nehmen wir ein $\varepsilon > 0$ beliebig und finden ein $T_\varepsilon > n$ dazu so, dass für $t \geqq T_\varepsilon - n$ gilt

$$|W(t) - W| < \frac{\varepsilon}{(n+1) \,.\, L}\,. \tag{35}$$

In der Gleichung (33) ziehen wir beiderseits den folgenden Ausdruck ab:

$$W - a_1(t)\, W - a_2(t)\, W - \ldots - a_n(t)\, W\,. \tag{36}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}[W(t) - W] - a_1(t)\,[W(t-1) - W] - \ldots - a_n(t)\,[W(t-n) - W] = \\ = 1 - W\,.\,[1 - a_1(t) - a_2(t) - \ldots - a_n(t)]\,.\end{aligned} \tag{37}$$

Nach (35) gilt für $t > T_\varepsilon$

$$|1 - W\,.\,[1 - a_1(t) - \ldots - a_n(t)]| < \varepsilon\,, \tag{38}$$

also

$$\lim_{t \to \infty} \{1 - W\,.\,[1 - a_1(t) - \ldots - a_n(t)]\} = 0\,. \tag{39}$$

Daraus folgt (34).

Zum Schluss dieses Absatzes zeigen wir noch, dass sich der Satz 2,4 umkehren lässt.

Satz 6,3. *Es sei die triviale Lösung der zu* (14) *gehörenden homogenen Gleichung exponentiell stabil. Dann hat* (14) *bei jeder Wahl der beschränkten Folge* $\{x(t)\}$ (*und bei beliebigen Anfangsbedingungen*) *nur beschränkte Lösungen.*

Beweis. Nach (18) sind für die Gewichtsfolgen als Lösungen der homogenen Gleichung die Anfangsbedingungen in allen Spalten der Gewichtsmatrix gleichmässig beschränkt. Nach (7), (15) und (16) gilt

$$|w(l + n, l)| < A e^{-\alpha n} \tag{40}$$

mit passender Wahl von $A > 0$, $\alpha > 0$. Deshalb gilt

$$\sum_{k=0}^{t} |w(t, k)| < \frac{A}{1 - e^{-\alpha}} \tag{41}$$

für alle t und das ist (11).

7. LINEARE IMPULSFILTER, DIE ZU EINER DIFFERENZENGLEICHUNG DER ERSTEN ORDNUNG GEHÖREN

Betrachten wir die Differenzengleichung

$$y(t) = a(t)\, y(t-1) + x(t)\,. \tag{42}$$

Es sei $\{a(t)\}$ beschränkt und $a(t) \neq 0$ für alle $t \geqq 0$ (um den trivialen Fall auszuschliessen). Die Gewichtsmatrix zu (42) hat folgende Elemente:

$$\begin{array}{llll}
w(0,0) = 1\,, & & & \\
w(1,0) = a(1)\,, & w(1,1) = 1\,, & & \\
w(2,0) = a(2)\,a(1)\,, & w(2,1) = a(2)\,, & w(2,2) = 1\,, & \\
w(3,0) = a(3)\,a(2)\,a(1)\,, & w(3,1) = a(3)\,a(2)\,, & w(3,2) = a(3)\,, & \\
 & \vdots & w(3,3) = 1\,, &
\end{array} \tag{43}$$

Die Stabilitätsbedingungen (4) lauten:

$$\begin{aligned}
&1 < K\,,\\
&1 + |a(1)| < K\,,\\
&1 + |a(2)| + |a(2)\,a(1)| < K\,,\\
&\qquad\vdots
\end{aligned} \tag{44}$$

Vergleichen wir (44) mit (11), wo wir (43) benutzen, so ist der folgende Satz klar.

Satz 7,1. *Für die Differenzengleichung der ersten Ordnung sind die Bedingungen* (4) *und* (11) *identisch.*

Wir werden jetzt noch die Erfüllung von (13) untersuchen. Nach dem Satz 6,2 ist dazu die Existenz von $\lim a(t)$ für $t \to \infty$ notwendig.

Satz 7,2. *Es existiere* $\lim a(t) = a$ *für* $t \to \infty$ *und es sei* $|a| = A < 1$. *Dann gilt* (11) *und* (13).

Beweis. Offenbar existiert $\lim |a(t)| = A < 1$ für $t \to \infty$. Man kann zu jedem ϱ, für welches $A < \varrho < 1$, ein T_ϱ finden so, dass für alle $t \geqq T_\varrho$ gilt $|a(t)| < \varrho$. Nach (43) ist bei $t \geqq T_\varrho$

$$\begin{aligned}
|w(t,0)| &= |a(t)|\,|a(t-1)| \ldots |a(T_\varrho + 1)|\,|a(T_\varrho)| \ldots |a(1)|\,,\\
|w(t,1)| &= |a(t)|\,|a(t-1)| \ldots |a(T_\varrho + 1)|\,|a(T_\varrho)| \ldots |a(2)|\,,\\
&\qquad\vdots\\
|w(t,T_\varrho)| &= |a(t)|\,|a(t-1)| \ldots |a(T_\varrho + 1)|\,,\\
&\qquad\vdots\\
|w(t,t-1)| &= |a(t)|\,,\\
|w(t,t)| &= 1\,.
\end{aligned} \tag{45}$$

Also ist für $t \geqq T_\varrho$

$$(46) \qquad |w(t, 0)| + |w(t, 1)| + \ldots + |w(t, t)| < 1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^{t-T_\varrho} + \\ + \varrho^{t-T_\varrho}[|a(T_\varrho)| + |a(T_\varrho)|\,|a(T_\varrho - 1)| + \ldots + \\ + |a(T_\varrho)| \ldots |a(2)|\,|a(1)|] < \frac{1}{1-\varrho} + \varrho^t \,.\, H_\varrho$$

mit

$$H_\varrho = \varrho^{-T_\varrho}[|a(T_\varrho)| + |a(T_\varrho)|\,|a(T_\varrho - 1)| + \ldots + a(T_\varrho)|| \ldots |a(2)|\,|a(1)|] \,.$$

Aus (46) ist (11) klar. Für die Stabilität gemäss der Definition 1,1 ist also die Existenz von $\lim |a(t)| = A < 1$ für $t \to \infty$ hinreichend (s. auch Beispiel 6,1).

Es existiere jetzt $\lim a(t) = a$ für $t \to \infty$, es sei $0 < a < 1$. Wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$(47) \qquad 0 < a - \varepsilon\,, \quad a + \varepsilon = \varrho < 1$$

gilt und T_ε dazu so, dass für alle $t \geqq T_\varepsilon$

$$(48) \qquad |a(t) - a| < \varepsilon$$

gilt. Nach (47) können wir $T_\varepsilon = T_\varrho$ wählen. Aus (47) und (48) folgt weiter

$$(49) \qquad \begin{array}{rlll} |a(t) - a| & < \varepsilon & \text{für} & t \geqq T_\varepsilon\,, \\ |a(t)\,a(t-1) - a^2| & < 2\varrho\varepsilon & \text{für} & t - 1 \geqq T_\varepsilon\,, \\ |a(t)\,a(t-1)\,a(t-2) - a^3| & < 3\varrho^2\varepsilon & \text{für} & t - 2 \geqq T_\varepsilon\,, \\ & \vdots & & \end{array}$$

Nun ist

$$(50) \qquad \left|\sum_{k=0}^{t} w(t, k) - \sum_{k=0}^{t} a^{t-k}\right| \leqq \sum_{k=0}^{T_\varepsilon - 1} |w(t, k)| + \sum_{k=0}^{T_\varepsilon - 1} |a^{t-k}| + \sum_{k=T_\varepsilon}^{t} |w(t, k) - a^{t-k}| \,.$$

Rechts gilt aber (vgl. (45) und (46))

$$(51) \qquad \sum_{k=0}^{T_\varepsilon - 1} |w(t, k)| < \varrho^t \,.\, H_\varrho\,, \quad \sum_{k=0}^{T_\varepsilon - 1} |a^{t-k}| < \varrho^t \,.\, G_\varrho$$

mit

$$G_\varrho = \sum_{k=0}^{T_\varepsilon - 1} |a^{-k}| \,.$$

Die beiden Ausdrücke in (51) können wir also durch die Wahl von genügend grossem t beliebig klein machen. Für den dritten Ausdruck rechts in (50) erhalten wir die Abschätzung

$$(52) \qquad \sum_{k=T_\varepsilon}^{t} |w(t, k) - a^{t-k}| < \frac{\varepsilon}{(1-\varrho)^2} \,.$$

Wählen wir ε hinreichend klein, so ist (52) beliebig klein. Wählen wir also zuerst ε hinreichend klein und dann t hinreichend gross, wo wird (50) links beliebig klein. Daraus folgt unmittelbar (13), und zwar ist

$$W = \lim_{t \to \infty} \sum_{k=0}^{t} w(t, k) = \frac{1}{1 - a}. \tag{53}$$

Ähnlich könnte man den Beweis für $-1 < a < 0$ durchführen.

Satz 7,3. *Es existiere* $\lim |a(t)| = A > 1$ *für* $t \to \infty$. *Dann gilt* (11) *nicht.*

Beweis. Wählen wir ϱ so, dass $1 < \varrho < A$ und finden T_ϱ so, dass für alle $t \geqq T_\varrho$ gilt $|a(t)| > \varrho$. Aus (45) folgt

$$|w(t, 0)| > \varrho^{t - T_\varrho} \,.\, |a(T_\varrho)| \ldots |a(1)|\,, \tag{54}$$

also $|w(t, 0)| \to \infty$ für $t \to \infty$. So kann (11) nicht gelten.

8. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Über die Bedingungen (4) und (11) könnte man sich überzeugen, dass sie nur im Falle der Differenzengleichung der ersten Ordnung identisch sind. Für den Fall der allgemeinen Gleichung höherer Ordnung ist der Übergang zum System mit der Dreiecksmatrix schwierig, so dass sich die Bedingungen (4) für die Praxis wenig eignen. Mit (11) ist es aber nicht besser. Alle in [10] behandelten Beispiele sind Gleichungen nur erster Ordnung.

Man könnte wundern, dass die so mächtigen Kriterien (11), (12), (13), die bei verschiedenen Summierungsverfahren leicht anzuwenden sind, gerade im Falle der Differenzengleichungen nur sehr beschränkten praktischen Nutzen bringen. Die Ursache liegt darin, dass das Bildungsgesetz der Gewichtsmatrix bei den Differenzengleichungen nur rekurrent gegeben ist, bei den Summierungsverfahren dagegen explizit.

Man könnte beweisen, dass vielleicht die meisten Summierungsverfahren – als allgemeine lineare Impulsfilter betrachtet – durch keine linearen Differenzengleichungen (mindestens durch diejenigen mit beschränkten Koeffizienten) entstanden sein können.

Wir zeigen das für die einfachste Cesàro-Fejérsche Gewichtsmatrix.

Satz 8,1. *Die Matrix*

$$W = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{55}$$

ist aus keiner linearen Differenzengleichung endlicher Ordnung mit beschränkten Koeffizienten entstanden.

Beweis. Das Filter mit der Matrix (55) ist stabil gemäss der Definition 1,1. Nach dem Satz 2,4 müsste sich also z. B. die erste Spalte von (55) durch eine konvergente geometrische Folge majorisieren lassen. Das ist offenbar unmöglich.

(Eingegangen am 10. Mai 1967.)

LITERATUR

[1] Cooke R. G.: Infinite Matrices and Sequence Spaces. Macmillan, London 1950. Rus. Übersetzung: Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, Москва (Zitation im Text bezieht sich zu dieser Übersetzung).
[2] Friedland B.: A Technique for the Analysis of Time-Varying Sampled-Data Systems. Trans. AIEE *75* (1957), 407–412.
[3] Гельфонд А. О.: Исчисление конечных разностей. ГИТТЛ, Москва 1952.
[4] Hahn W.: Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen. Math. Ann. *136* (1958), 430–441.
[5] Hardy G. H.: Divergent Series. Oxford U. Press 1949. Rus. Übersetzung: Расходящиеся ряды. Иноиздат, Москва 1951 (Zitation im Text bezieht sich zu dieser Übersetzung).
[6] Hurewicz W.: Kap. V. des Buches: James H. M. - Nichols N. B. - Phillips R. S.: Theory of Servomechanisms. MIT, 1947.
[7] Johnson G. W. - Gibson J. E.: On Liapunov Stability vs Bounded Input — Bounded Output. IEEE Trans. *AC-9* (1964), 2, 178–179.
[8] Kalman R.: On the Stability of Time-Varying linear Systems. IRE Trans. *CT-9*, (1962, Dez.), 420–422.
[9] Крутько П. Д.: Статистическая динамика импульсных систем. Сов. радио, Мосвка 1963.
[10] Li Ta: Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen. Acta Math. *63* (1934), 99–141.
[11] Тартаковский Г. П.: К теориц линейных импульсныхс истем с переменными параметрами. Радиотехн. и электроника (1957), 11, 3—14.
[12] Youla D. C.: On the Stability of Linear Systems. IEEE Trans., *CT* (1963, Juni), 276–279.

VÝTAH

Ke stabilitě lineárních impulsových filtrů

LUDVÍK PROUZA

Vyšetřuje se souvislost Hurewiczovy a Ljapunovovy definice stability pro lineární impulsové filtry, zvláště ty, které přísluší k diferenční rovnici s časově proměnnými koeficienty. Vyšetřování se opírá o věty o „lineárních průměrech", pocházející od Kojimy, Schura, Silvermanna a Toeplitze, a o věty o řešeních lineárních diferenčních rovnic, pocházející od Li Ta a Hahna. Zvláštní pozornost se věnuje rovnicím prvního řádu a praktické aplikovatelnosti.

Dr. Ludvík Prouza, CSc., Ústav pro výzkum radiotechniky, Opočínek, p. Lány na Důlku.