KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 3/1967

Последовательное повторение игры при неопределенности

Станислав Йиловец

Рассматривается повторение игры двух игроков и показывается класс стратегий (=стратегических процессов) II-го игрока гарантирующих, что ожидаемый проигрыш II-го игрока сходится к достижимому минимуму, если число повторений стремится к бесконечности. Эта сходимост равномерна относительно выбора стратегий I-го игрока.

Мы будем заниматься повторением игры двух игроков (A, B, w). Предполагается, что второй игрок может в k-м шагу (т. е. в k-м повторении игры (A, B, w)) выбирать свою стратегию на основе стратегий, принятых первым игроком в предшествующих $k - 1$ играх или на основе несмещенных оценок этих стратегий. Цель второго игрока – максимализировать свой средний выигрыш для фиксированного числа повторений, которое ему не известно.

На стратегии первого игрока не ставится никаких ограничений. В частности, не предполагается, что поведение первого игрока в течение повторения игры можно описать вероятностным образом, как это предполагается во многих статьях, занимающихся применением опыта в теории игр и в статистических решениях.

С первого взгляда кажется, что в этом случае второму игроку придется применять минимаксную стратегию. Но это не так. Как показал уже Ханнан, второй игрок может действовать таким образом, что его средняя потеря в первых n играх не перевосходит ϱ_n на больше чем $c/\sqrt{n}$, каково бы ни было n. Здесь c постоянная и ϱ_n обозначает минимум средней потери при условии, что второй игрок с самого начала знает каковы будут частоты стратегий первого игрока после n повторений игры.

Вопросами этого рода впервые занимался Ханнан [1] и исследование продолжали например Э. Самуэл и Ван Рызин, особенно в случае статистических игр. Но проще всего рассматривать повторение статистической игри как повторение обычной игры в которой второму игроку (статистику) доступны только несмещенные оценки стратегий первого игрока (природы).

Чтобы упростить обозначения и доказательства, мы будем предполагать, что множество стратегий первого игрока состоит только из двух точек, несмотря на то, что нижеследующие теоремы имеют силу в случае, если число стратегий первого игрока конечно (некоторые предположения надо конечно выдоизменить) а я надеюсь, что удастся доказать их даже в более общем случае.

Начиная с этого мы условимся в следующем: Заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ и игра (A, B, w) т. е. A, B и Ω – непустые множества, $\mathscr{S}$ – σ-поле подмножеств множества Ω, μ – вероятностная мера на $\mathscr{S}$ и w – такая вещественная функция определенная на $A \times B$, что

$$(1) \qquad \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} w(a, b) = K < \infty .$$

Согласно вышесказанному, мы будем предполагать, что $A = \{0, 1\}$. Для обозначения множества всех целых положительных чисел и множества всех вещественных чисел мы будем употреблять соответственно символы N и R. Символом $\boldsymbol{A}$ обозначим бесконечномерное произведение множеств $\boldsymbol{A} = A \times \times A \times \ldots \times A \times \ldots$.

Для дальнейшего удобно распространить область определения функции w на множество $R \times B$ следующим образом

$$(2) \qquad w(x, b) = (1 - x)\, w(0, b) + x w(1, b)\,, \quad x \in R\,, \quad b \in B\,.$$

Введем теперь функцию ϱ на R соотношением

$$(3) \qquad \varrho(x) = \inf_{b \in B} w(x, b)\,, \quad x \in R\,.$$

В статистических играх принято называть функцию ϱ Байесовским риском. Известно, что в силу предположения (1) функция ϱ представляет собой непрерывную и вогнутую функцию и таким образом, ее односторонные производные удовлетворяют неравенствам

$$(4) \qquad \varrho'_-(x) \geqq \varrho'_+(x) \geqq \varrho'_-(y) \geqq \varrho'_+(y) \quad \text{для всех} \quad x < y\,.$$

Отображение множества R в множество B мы будем называть процедурой. Процедура β называется ε-оптимальной процедурой, если для всех $x \in R$ выполняется неравенство

$$w(x, \beta(x)) \leqq \varrho(x) + \varepsilon\,.$$

Очевидно, что для положительного ε всегда существует ε-оптимальная процедура.

Последовательность процедур $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется регулярной последовательностью $\{\varepsilon_k\}$-оптимальных процедур, если выполняются следующие условия*

(P1) $$w(x, \beta_k(x)) \leqq \varrho(x) + \varepsilon_k \quad \text{для всех} \quad x \in R \quad \text{и} \quad k \in N$$

(P2) $$\max_{j \in \{0,1\}} \sup_{k \in N} \operatorname{Var} w(j, \beta_k(.)) = c_0 < \infty .$$

Предложение. *Если $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность положительных чисел, то существует регулярная последовательность $\{\varepsilon_n\}$-оптимальных процедур.*

Доказательство. Для каждого $x \in R$ и $k \in N$ существует $b_k(x) \in B$ так, что

$$w(x, b_k(x)) < \varrho(x) + \frac{1}{k}$$

и что существуют пределы $\lim_{k \to \infty} w(j, b_k(x))$ для $j = 0, 1$. Обозначим

(5) $$w_j(x) = \lim_{k \to \infty} w(j, b_k(x)), \quad x \in R, \quad j = 0, 1 .$$

Очевидно, что

(6) $$\varrho(x) = (1 - x)\, w_0(x) + x\, w_1(x), \quad x \in R .$$

Покажем, прежде всего, что функция $w_j(.)$ не возрастает в промежутке $(-\infty, j)$ и не убывает в промежутке $(j, +\infty)$, $j = 0, 1$. Так как

$$(1 - x)\, w_0(y) + x\, w_1(y) = \lim_{n \to \infty} w(x, b_n(y)) \geqq \varrho(x),$$
$$(1 - y)\, w_0(x) + y\, w_1(x) = \lim_{n \to \infty} w(y, b_n(x)) \geqq \varrho(y), \quad x, y \in R,$$

то согласно (5) отсюда следует

$$x(w_1(x) - w_1(y)) \leqq (1 - x)(w_0(y) - w_0(x)),$$
$$(1 - y)(w_0(y) - w_0(x)) \leqq \qquad y(w_1(x) - w_1(y)) .$$

Таким образом, если $x < y < 1$, то

$$\left(\frac{x}{1 - x} - \frac{y}{1 - y}\right)(w_1(x) - w_1(y)) \leqq 0$$

и, следовательно, $w_1(x) \geqq w_1(y)$; если $1 < x < y$, то имеют место обратные неравенства. Значит, утверждение касающееся функции w_1, доказано. Кусочная монотонность функции w_0 доказывается вполне аналогичным образом.

Зафиксируем теперь $n \in N$ и обозначим

$$\varepsilon = \min\{1, \varepsilon_n\}$$

* Если f вещественная функция на R, то $\operatorname{Var} f$ обозначает изменение f в R.

$$E_{i,j}^{(r)} = (r, r+1\rangle \cap \tag{7}$$

$$\cap \left\{x : \frac{\varepsilon i}{4(|r|+1)} + w_0(r) < w_0(x) \leqq \frac{\varepsilon(i+1)}{4(|r|+1)} + w_0(r)\right\} \cap$$

$$\cap \left\{x : \frac{\varepsilon j}{4(|r|+1)} + w_1(r) < w_1(x) \leqq \frac{\varepsilon(j+1)}{4(|r|+1)} + w_1(r)\right\},$$

$$r, j, i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots .$$

Выберем теперь из каждого непустого множества $E_{i,j}^{(r)}$ по одной точке. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ последовательность всех выбранных точек. Так как w_0 и w_1 ограничены, то для фиксированного r только конечное число множеств $E_{i,j}^{(r)}$ не пусто. Таким образом, последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ не имеет собственных предельных точек, и, следовательно, мы можем последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ занумеровать целым числами так, что $x_m < x_{m+1}$, $m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Символом E_m, $m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, обозначим множество, из которого выбрана точка x_m. Заметим, что множества E_m, $m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, образуют разбиение множества R.

Для каждого целого m существует ввиду (5) такой номер $k_m \in N$, что

$$\max_{j\in\{0,1\}} |w_j(x_m) - w(j, b_{k_m}(x_m))| < \frac{\varepsilon}{6 \,.\, 2^{|m|}([|x_m|] + 1)} . \tag{8}$$

Определим процедуру β_n соотношением

$$\beta_n(x) = b_{k_m}(x_m) \quad \text{если} \quad x \in E_m . \tag{9}$$

Пусть $x \in R$. Если $x \in E_m$, то согласно (6), (7), (8) и (9)

$$(1 - x)\, w(0, \beta_n(x)) + x w(1, \beta_n(x)) - \varrho(x) \leqq$$

$$\leqq |1 - x|\, |w(0, b_{k_m}(x_m)) - w_0(x_m)| + |x|\, |w(1, b_{k_m}(x_m)) - w_1(x_m)| +$$

$$+ |1 - x|\, |w_0(x_m) - w_0(x)| + |x|\, |w_1(x_m) - w_1(x)| < \varepsilon \leqq \varepsilon_n .$$

Значит, β_n — ε_n-оптимальная процедура. Оценим теперь изменение функции $(wj, \beta_n(.))$. Если $y_0 < y_1 < \ldots < y_k$, $j \in \{0, 1\}$, то в силу (8) и (9)

$$\sum_{i=1}^{k} |w(j, \beta_n(y_i)) - w(j, \beta_n(y_{i-1}))| \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w(j, \beta_n(x_m)) - w(j, \beta_n(x_{m-1}))| \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w(j, \beta_n(x_m)) - w_j(x_m)| + \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w_j(x_m) - w_j(x_{m-1})| +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w_j(x_{m-1}) - w(j, \beta_n(x_{m-1}))| \leqq \varepsilon + \operatorname{Var} w_j \leqq 1 + \operatorname{Var} w_j .$$

 Так как $w_j(.)$ является ограниченной и кусочно монотонной функцией, то $\operatorname{Var} w_j < \infty$, так что имеет место (P2). Предложение доказано.

Лемма 1. *Пусть* $x \in R$. *Если* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая последовательность точек множества B, что*

$$\lim_{k \to \infty} w(x, b_k) = \varrho(x),$$

то имеют место неравенства

$$(11) \qquad (\xi - x)\,\varrho'_-(x) + \varrho(x) \leqq \liminf_{k \to \infty} w(\xi, b_k) \leqq$$
$$\leqq \limsup_{k \to \infty} w(\xi, b_k) \leqq (\xi - x)\,\varrho'_+(x) + \varrho(x)$$

для $\xi \leqq x$ *и*

$$(12) \qquad (\xi - x)\,\varrho'_+(x) + \varrho(x) \leqq \liminf_{k \to \infty} w(\xi, b_k) \leqq$$
$$\leqq \limsup_{k \to \infty} w(\xi, b_k) \leqq (\xi - x)\,\varrho'_-(x) + \varrho(x)$$

для $\xi \geqq x$.

Доказательство. Покажем, прежде всего, что

$$(13) \qquad \varrho'_+(x) \leqq \liminf_{k \to \infty} (w(1, b_k) - w(0, b_k)) \leqq$$
$$\leqq \limsup_{k \to \infty} (w(1, b_k) - w(0, b_k)) \leqq \varrho'_-(x).$$

Так как

$$w(x + h, b_k) \geqq \varrho(x + h), \quad h \in R,$$

то

$$w(x + h, b_k) - w(x, b_k) \geqq \varrho(x + h) - \varrho(x) + \varrho(x) - w(x, b_k).$$

Согласно (2) отсюда следует, что

$$w(1, b_k) - w(0, b_k) \geqq \frac{\varrho(x + h) - \varrho(x)}{h} + \frac{\varrho(x) - w(x, b_k)}{h}$$

для $h > 0$ и

$$w(1, b_k) - w(0, b_k) \leqq \frac{\varrho(x + h) - \varrho(x)}{h} + \frac{\varrho(x) - w(x, b_k)}{h}$$

для $h < 0$. Переходя теперь к пределу при $k \to \infty$ и затем при $h \to 0$, получим (13).

Чтобы доказать неравенства (11) и (12), хватит применить (13) к тождеству

$$w(\xi, b_k) = (\xi - x)(w(1, b_k) - w(0, b_k)) + (1 - x)\,w(0, b_k) + x w(1, b_k).$$

Из предыдущей леммы непосредственно вытекает, что для каждого положительного ε существует процедура β, удовлетворяющая для всех $x \in \langle 0, 1 \rangle$ неравенствам

$$(14) \qquad \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_-(x) - \varepsilon \leqq w(\xi, \beta(x)) \leqq \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_+(x) + \varepsilon\,,$$

если $0 \leqq \xi \leqq x$, и

$$(15) \qquad \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_+(x) - \varepsilon \leqq w(\xi, \beta(x)) \leqq \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_-(x) + \varepsilon\,,$$

если $x \leqq \xi \leqq 1$.*

Докажем теперь более убедительное утверждение.

Лемма 2. *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует процедура β, удовлетворяющая условиям* (14), (15) *и*

$$(16) \qquad |w(1, \beta(0)) - \varrho(0) - \varrho'_+(0)| \leqq \varepsilon\,,$$

$$(17) \qquad |w(0, \beta(1)) - \varrho(1) + \varrho'_-(1)| \leqq \varepsilon\,.$$

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, $\varepsilon_i \to 0$, и пусть β_k – процедура, удовлетворяющая неравенствам (14) и (15) для $\varepsilon = \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Согласно (12), существует такая последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к 0 справа, что

$$w(0, \beta_k(\alpha_k)) \leqq \varrho(0) + \varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\limsup_{k \to \infty} \left(w(1, \beta_k(\alpha_k)) - \varrho(\alpha_k) - (1 - \alpha_k)\,\varrho'_-(\alpha_k)\right) = 0\,.$$

Но так как ϱ вогнутая функция, то

$$\lim_{x \to 0+} \left(\varrho(x) + (1 - x)\,\varrho'_-(x)\right) = \varrho(0) + \varrho'_+(0)$$

и, следовательно,

$$(18) \qquad \limsup_{k \to \infty} w(1, \beta_k(\alpha_k)) = \varrho(0) + \varrho'_+(0)\,.$$

Если определить

$$\left.\begin{aligned} \tilde\beta_k(x) &= \beta_k(x) \quad \text{для} \quad x \neq 0 \\ \tilde\beta_k(0) &= \beta_k(\alpha_k) \end{aligned}\right\} k = 1, 2, \ldots,$$

то $\tilde\beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, представляет собой ε_k-оптимальную процедуру и в силу

* Заметим, что процедура β представляет собой ε-оптимальную процедуру, как следует из (14), если положить $\xi = x$.

 (18) и (12) имеет место

$$(19) \qquad \lim_{k\to\infty} w(1, \beta_k(0)) = \varrho(0) + \varrho'_+(0)\,.$$

Таким образом, видоизменением последовательности процедур $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ в точке $x = 0$, мы получили последовательность процедур $\{\tilde{\beta}_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую, помимо неравенств (14) и (15), еще условию (19). Аналогичным образом можно видоизменить последовательность процедур $\{\tilde{\beta}_k\}_{k=1}^{\infty}$, в точке $x = 1$ так, что

$$(20) \qquad \lim_{k\to\infty} w(0, \tilde{\beta}_k(1)) = \varrho(1) - \varrho'_-(1)\,.$$

В силу предположения, что $\varepsilon_k \to 0$ и в силу (19) и (20), существует такой номер $k = k(\varepsilon)$, что процедура $\beta = \tilde{\beta}_{k(\varepsilon)}$ обладает свойствами (14), (15), (16) и (17), каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Определение 1. Если для каждого $k \in N$ b_k представляет собой такое отображение множества $\Omega \times \boldsymbol{A}$ в множество B, что

1) для фиксированного $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ $w(0, b_k(\,.\,; \boldsymbol{a}))$ и $w(1, b_k(\,.\,; \boldsymbol{a}))$ являются случайными величинами

2) для фиксированного $\omega \in \Omega$ $b_k(\omega; \boldsymbol{a})$ зависит только от первых $k - 1$ координат точки $\boldsymbol{a}$, то последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется стратегическим процессом второго игрока в последовательном повторении игры (A, B, w).

Ниже мы будем стратегический процесс второго игрока в последовательном повторении игры (A, B, w) просто называть стратегическим процессом.

Стратегический процесс называется простым, если для фиксированного $\omega \in \Omega$ и $k \in N$ $b_k(\omega; \boldsymbol{a})$ зависит только от суммы первых $k - 1$ координат точки $\boldsymbol{a}$, и называется детерминистическим, если $b_k(\omega; \boldsymbol{a})$ не зависит от ω.

Не трудно доказать, что для каждого стратегического процесса $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует такая последовательность стратегий первого игрока $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\mathsf{E}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(\,.\,; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) \geqq \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

для всех $n \in N$.

Заметим еще, что (см. [1], теорема 1) имеет место неравенство

$$\varrho(\alpha) \geqq \inf_{\{b_k\}_{k=1}^{\infty}} \sup_{M_{n,\alpha}} \mathsf{E}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(\,.\,; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) \geqq \varrho(\alpha) - \frac{c}{\sqrt{n}}\,.$$

Здесь c постоянная, зависящая только от функции w, $M_{n,\alpha} = \{\{a_k\}_{k=1}^{\infty} : a_k \in A,\ n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i = \alpha\}$, и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — стратегический процесс.

Таким образом, вполне естественно определять оптимальность стратегического процесса следующим образом.

Определение 2. Стратегический процесс $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется оптимальным относительно риска, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(.\,; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) \leqq \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \varepsilon$$

для всех $n \geqq n_0$ и всех $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbf{A}$.

Возникает вопрос, какими свойствами обладает стратегический процесс, оптимальный относительно риска, предполагая дополнительно, что последовательность стратегий первого игрока представляет собой последовательность независимых и одинакого распределенных случайных величин. Ответ дается следующей теоремой

Теорема 1. *Пусть стратегический процесс $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ оптимален относительно риска. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 \in N$, что для каждого $n \geqq n_0$ и для каждой последовательности $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых и одинакого распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве A, имеет место неравенство*

$$0 \leqq \mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(\xi_k, b_k(.\,; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \ldots)) - \varrho(\mathsf{E}\xi_1) < \varepsilon\,,$$

если

$$w(j, b_k(.\,; \xi_1(.), \xi_2(.), \ldots, \xi_{k-1}(.), \ldots))\,, \quad j = 0, 1\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

представляют собой случайные величины.

Доказательство. Так как

$$|\varrho(x) - \varrho(y)| \leqq |\varrho'_+(0)| \,.\, |x - y|\,, \quad x, y \geqq 0\,,$$

то в силу неравенства Буняковского и независимости случайных величин ξ_k имеет место

$$E\left(\varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) - \varrho(\mathsf{E}\xi_1)\right) \leqq |\varrho'_+(0)|\,\mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \mathsf{E}\xi_1\right| \leqq$$

$$\leqq |\varrho'_+(0)|\sqrt{\left(\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathsf{E}\xi_1)^2\right)\right)} = |\varrho'_+(0)|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\mathsf{E}(\xi_1 - \mathsf{E}\xi_1)^2\right)} \leqq \frac{|\varrho'_+(0)|}{4\sqrt{n}}\,.$$

Обозначим

$$S_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(\xi_k(\omega), b_k(\omega; \xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_{k-1}(\omega), \ldots))\,, \quad n \in N\,, \quad \omega \in \Omega$$

и фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как стратегический процесс $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ оптимален относительно риска, существует такой номер $n_1 \in N$, что

$$E\left(S_n - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\middle|\ \xi_1(\omega) = a_1,\ \xi_2(\omega) = a_2, \ldots\right) =$$

$$= E\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(\,.\,; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для каждого $n \geqq n_1$ и каждой последовательности $(a_1, a_2, \ldots) \in \boldsymbol{A}$. Если представить ES_n в виде

$$ES_n - \varrho(E\xi_1) = E\left(E\left(S_n - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\middle|\ \xi_1, \xi_2, \ldots\right)\right) + E\left(\varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) - \varrho(E\xi_1)\right),$$

то из вышесказанного следует, что для $n \geqq \max\{n_1, (\varrho'_+(0)/2\varepsilon)^2\}$

$$ES_n - \varrho(E\xi_1) < \varepsilon\,,$$

какова бы ни была последовательность независимых и одинакого распределенных случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Остается доказать, что $ES_n \geqq \varrho(E\xi_1)$. Обозначим

$$w_j^{(k)}(\omega) = w(j, b_k(\omega; \xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots))\,,$$
$$j = 0, 1, \quad k \in N\,, \quad \omega \in \Omega\,.$$

Достаточно показать, что для каждого $k \in N$

$$E((1 - \xi_k)\, w_0^{(k)} + \xi_k w_1^{(k)}) \geqq \varrho(E\xi_1)\,.$$

Но согласно известным свойствам условных математических ожиданий

$$E((1 - \xi_k)\, w_0^{(k)} + \xi_k w_1^{(k)}) = EE((1 - \xi_k)\, w_0^{(k)} + \xi_k w_1^{(k)} \mid w_0^{(k)}, w_1^{(k)}) =$$
$$= E(w_0^{(k)} E(1 - \xi_k \mid w_0^{(k)}, w_1^{(k)}) + w_1^{(k)} E(\xi_k \mid w_0^{(k)}, w_1^{(k)})) =$$
$$= E(w_0^{(k)}(1 - E\xi_1) + w_1^{(k)} E\xi_1) \geqq E\varrho(E\xi_1) = \varrho(E\xi_1)$$

и это требовалось доказать.

Теперь мы будем заниматься существованием стратегических процессов оптимальных относительно риска.

Теорема 2. *Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю и $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность процедур, удовлетворяющая условиям*

$$\varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_-(x) - \varepsilon_k \leqq w(\xi, \beta_k(x)) \leqq \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_+(x) + \varepsilon_k\,, \tag{21}$$
$$\textit{если} \quad 0 \leqq \xi \leqq x\,,$$

$$(22) \quad \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_{+}(x) - \varepsilon_k \leqq w(\xi, \beta_k(x)) \leqq \varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'_{-}(x) + \varepsilon_k\,,$$

$$\text{если} \quad x \leqq \xi \leqq 1\,,$$

$$(23) \qquad |w(0, \beta_k(1)) - \varrho(1) + \varrho'_{-}(1)| \leqq \varepsilon_k$$

$$(24) \qquad |w(1, \beta_k(0) - \varrho(0) - \varrho'_{+}(0)| \leqq \varepsilon_k$$

для всех $k \in N$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$.

Тогда детерминистический стратегический процесс $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *определяемый равенством*

$$b_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots) = \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right), \quad k = 1, 2, \ldots *$$

является оптимальным относительно риска только тогда, если функция ϱ *имеет производную в открытом промежутке* (0,1).

Подчеркнем, что последовательность процедур $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (21)–(24), в силу леммы 2, существует всегда, если $\varepsilon_k > 0$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство необходимости. Предположим, что функция ϱ не имеет производную в точке $x \in (0, 1)$, так что $\varrho'_{+}(x) < \varrho'_{-}(x)$. Мы построим такую последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ стратегий первого игрока, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geqq$$

$$\geqq x(1 - x)\,\frac{\varrho'_{-}(x) - \varrho'_{+}(x)}{2}\,.$$

В силу (21) и (22) имеют место неравенства

$$w(0, \beta_k(\xi)) \geqq \varrho(x) - x\,\varrho'_{+}(x) - \varepsilon_k\,, \quad \text{если} \quad \xi > x$$

$$w(1, \beta_k(\xi)) \geqq \varrho(x) + (1 - x)\,\varrho'_{-}(x) - \varepsilon_k\,, \quad \text{если} \quad \xi < x\,.$$

Так как $\varrho(x) \leqq (1 - x)\,w(0, \beta_k(x)) + xw(1, \beta_k(x))$, то не трудно обнаружить, что неравенство

$$w(0, \beta_k(x)) < \varrho(x) - \tfrac{1}{2}x(\varrho'_{+}(x) + \varrho'_{-}(x)) + \frac{\varepsilon_k}{1 - x}$$

влечет за собой неравенство

$$w(1, \beta_k(x)) > \varrho(x) + \tfrac{1}{2}(1 - x)(\varrho'_{+}(x) + \varrho'_{-}(x)) - \frac{\varepsilon_k}{x}\,.$$

* Для $k = 1$ определим $\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i = 0$.

 Определим теперь последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$a_1 = 1\,,$$

и для $n > 1$

$$a_n = 1\,,\quad \text{если}\quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i < x \quad \text{или если}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i = x \quad \text{и} \quad w(0, \beta_n(x)) < \varrho(x) - \frac{x}{2}\left(\varrho'_+(x) + \varrho'_-(x)\right) + \frac{\varepsilon_k}{1-x}\,,$$

и

$$a_n = 0\,,\quad \text{если}\quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i > x \quad \text{или если}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i = x \quad \text{и} \quad w(0, \beta_n(x)) \geqq \varrho(x) - \frac{x}{2}\left(\varrho'_+(x) + \varrho'_-(x)\right) + \frac{\varepsilon_k}{1-x}\,.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = x \tag{25}$$

и что

$$w\left(a_k, \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)\right) \geqq \tag{26}$$

$$\geqq \left(-\varepsilon_k + a_k(\varrho(x) + (1-x)\,\varrho'_-(x)) + (1-a_k)\left(\varrho(x) - x\,\varrho'_+(x)\right)\right)(1-d_k) +$$

$$+ c_k\left(\varrho(x) + \tfrac{1}{2}(1-x)\left(\varrho'_+(x) + \varrho'_-(x)\right) - \frac{\varepsilon_k}{x}\right) +$$

$$+ (d_k - c_k)\left(\varrho(x) - \tfrac{1}{2}x\left(\varrho'_+(x) + \varrho'_-(x)\right) + \frac{\varepsilon_k}{1-x}\right),\quad k = 1, 2, \ldots.$$

Здесь

$$c_k = 1\,,\quad \text{если}$$

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i = x \quad \text{и} \quad w(0, \beta_k(x)) < \varrho(x) - \frac{x}{2}\left(\varrho'_+(x) + \varrho'_-(x)\right) + \frac{\varepsilon_k}{1-x}\,,$$

$$c_k = 0 \quad \text{в противоположном случае}$$

и

$$d_k = 1\,,\quad \text{если}\quad \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i = x\,;$$

$$d_k = 0 \quad \text{в противоположном случае}\,.$$

Суммированием неравенств (26) мы получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w\left(a_k, \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)\right) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geqq$$
$$\geqq -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\left(1 + \frac{c_k}{x} - \frac{d_k - c_k}{1-x}\right) +$$
$$+ \left(\varrho(x) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x)\,\varrho'_-(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) x\,\varrho'_+(x)\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\varrho'_-(x) - \varrho'_+(x))\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k(1-x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k)\,x\right).$$

При $n \to \infty$ первое слагаемое очевидно сходится к 0 и второе, согласно (25), сходится к $x(1-x)(\varrho'_-(x) - \varrho'_+(x))$. Теперь будем оценивать третье слагаемое. Если x иррациональное число, то $c_k = d_k = 0$ для всех $k \in N$. Если $x = r/s$ где r и s представляют собой взаимно простые числа, то $(1/n)\sum_{k=1}^{n} d_k < 1/s$, и, следовательно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k < \min\{x, 1-x\}\,. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь функцию от ξ

$$f(\xi) = x(1-x) - \xi(1-x) - (D - \xi)\,x\,,$$

где $0 < x < 1$ и $0 \leqq D < \min\{x, 1-x\}$. В соответствии с этим предположением $f(0) > 0$ и $f(D) > 0$, и так как f линейная функция, то $f(\xi) > 0$ для всех $\xi \in \langle 0, D\rangle$. В силу (27) отсюда следует, что

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k(1-x) - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k\right) x \geqq x(1-x).$$

Таким образом,

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w\left(a_k, \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)\right) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\right) \geqq$$
$$\geqq \tfrac{1}{2}x(1-x)(\varrho'_-(x) - \varrho'_+(x))\,,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство достаточности. В этом доказательстве условимся обозначать левостороннюю производную функции ϱ в точке $x = 1$ символом $\varrho'(1)$ и правостороннюю производную в точке $x = 0$ символом $\varrho'(0)$. Подчеркнем, прежде всего, что существование производной в открытом интервале $(0, 1)$

влечет за собой равномерную непрерывность функции ϱ' в замкнутом интервале $\langle 0, 1\rangle$. Это следует из общеизвестных свойств вогнутых функций и того, что в силу (1) односторонные производные функции ϱ ограничены.

Обозначим

$$\bar{a}_0 = 0\,,$$

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\,,$$

$$Q_n(a_1, a_2, \ldots) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, \beta_k(\bar{a}_k)) - \varrho(\bar{a}_n)\,,$$

$$P_n(a_1, a_2, \ldots) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \big(w(a_k, \beta_k(\bar{a}_{k-1})) - w(a_k, \beta_k(\bar{a}_k))\big)\,,$$

$$n = 1, 2, \ldots\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \tag{28}$$

$$= Q_n(a_1, a_2, \ldots) + P_n(a_1, a_2, \ldots)\,.$$

Очевидно, что

$$Q_n(a_1, a_2, \ldots) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(k\bar{a}_k - (k-1)\,\bar{a}_{k-1}, \beta_k(\bar{a}_k)) - \varrho(\bar{a}_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \big(kw(\bar{a}_k, \beta_k(\bar{a}_k)) - (k-1)\,w(\bar{a}_{k-1}, \beta_k(\bar{a}_k))\big) - \varrho(\bar{a}_n) =$$

$$= w(\bar{a}_n, \beta_n(\bar{a}_n)) - \varrho(\bar{a}_n) +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} (k-1)\big(w(\bar{a}_{k-1}, \beta_{k-1}(\bar{a}_{k-1})) - w(\bar{a}_{k-1}, \beta_k(\bar{a}_k))\big)\,.$$

Так как

$$w(\bar{a}_n, \beta_n(\bar{a}_n)) \leqq \varrho(\bar{a}_n) + \varepsilon_n\,,$$

$$w(\bar{a}_{k-1}, \beta_{k-1}(\bar{a}_{k-1})) \leqq w(\bar{a}_{k-1}, \beta_k(\bar{a}_k)) + \varepsilon_{k-1}\,,$$

то

$$Q_n(a_1, a_2, \ldots) \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\,. \tag{29}$$

Теперь будем оценивать $P_n(a_1, a_2, \ldots)$. Так как мы предполагаем, что ϱ имеет производную в промежутке $(0, 1)$, то согласно (21)–(24) имеет место

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle}\ \max_{\xi\in\{0,1\}} |w(\xi, \beta_k(x)) - \varrho(x) - (\xi - x)\,\varrho'(x)| < \varepsilon_k$$

и, следовательно

$$w(a_k, \beta_k(\bar{a}_{k-1})) - w(a_k, \beta_k(\bar{a}_k)) \leqq$$
$$\leqq \varrho(\bar{a}_{k-1}) + (a_k - \bar{a}_{k-1})\,\varrho'(\bar{a}_{k-1}) - \varrho(\bar{a}_k) - (a_k - \bar{a}_k)\,\varrho'(\bar{a}_k) + 2\varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если $\varepsilon > 0$, то в силу равномерной непрерывности ϱ' в $\langle 0, 1\rangle$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\max_{\xi\in\langle 0,1\rangle} |\varrho(x) + (\xi - x)\,\varrho'(x) - \varrho(y) - (\xi - y)\,\varrho'(y)| < \varepsilon$$

если $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ и $|x - y| < \delta$. Ввиду того, что последовательность $s_n(a_1, a_2, \ldots) = \bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к 0 равномерно на $\boldsymbol{A}$, существует такой номер k_0, что для всех $(a_1, a_2, \ldots) \in \boldsymbol{A}$ и $k \geqq k_0$ имеет место неравенство $|\bar{a}_k - \bar{a}_{k-1}| < \delta$. Следовательно,

$$|\varrho(\bar{a}_{k-1}) + (a_k - \bar{a}_{k-1})\,\varrho'(\bar{a}_{k-1}) - \varrho(\bar{a}_k) - (a_k - \bar{a}_k)\,\varrho'(\bar{a}_k)| < \varepsilon$$

для всех $k \geqq k_0$ и $(a_1, a_2, \ldots) \in \boldsymbol{A}$. Таким образом,

$$P_n(a_1, a_2, \ldots) \leqq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0} (w(a_k, \beta_k(\bar{a}_{k-1})) - w(a_k, \beta_k(\bar{a}_k))) + \frac{n - k_0}{n}\,\varepsilon$$

и согласно (1)

$$P_n(a_1, a_2, \ldots) \leqq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k + \frac{2k_0 K}{n} + \frac{n - k_0}{n}\,\varepsilon\,. \tag{30}$$

Из (28), (29) и (30) непосредственно следует, что стратегический процесс $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ является оптимальным относительно риска.

Теперь мы приведем одну лемму, которая нам понадобится в доказательстве следующей теоремы.

Лемма 3. *Пусрь F_1 и F_2 — функции распределения, f — вещественная функция, определенная на R. Если f имеет конечное изменение в R, то*

$$\left| \int f \,\mathrm{d}F_1 - \int f \,\mathrm{d}F_2 \right| \leqq \operatorname{Var} f . \sup_{x\in R} |F_1(x) - F_2(x)|\,,$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса.

Доказательство. Так как f имеет конечное изменение, то существуют такие неубывающие и ограниченные функции f_1 и f_2, что $f = f_1 - f_2$ и $\operatorname{Var} f = \operatorname{Var} f_1 + \operatorname{Var} f_2$. Таким образом, достаточно доказать лемму в случае, когда f не убывает. В этом случае

$$\operatorname{Var} f = f(+\infty) - f(-\infty),$$

где

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{и} \quad f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Обозначим

$$E_{m,j} = \left\{ x : f(-\infty) + \frac{j-1}{m} \operatorname{Var} f < f(x) \leqq f(-\infty) + \frac{j}{m} \operatorname{Var} f \right\},$$

$$j = 0, 1, \ldots, m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$f_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \left(f(-\infty) + \frac{j}{m} \operatorname{Var} f \right) \chi_{E_{m,j}}(x), \quad x \in R.$$

Здесь $\chi_{E_{m,j}}$ обозначает индикатор множества $E_{m,j}$. Очевидно, что f_m представляют собой ограниченные измеримые в смысле Бореля функции и

$$\sup_{x \in R} |f_m(x) - f(x)| \leqq \frac{\operatorname{Var} f}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом,

$$\left| \int f \, dF_1 - \int f \, dF_2 \right| \leqq \int |f - f_m| \, dF_1 + \int |f - f_m| \, dF_2 +$$
$$+ \left| \int f_m \, dF_1 - \int f_m \, dF_2 \right| \leqq \frac{2 \operatorname{Var} f}{m} + \left| \int f_m \, dF_1 - \int f_m \, dF_2 \right|.$$

Пусть μ_i – вероятностная мера, соответствующая функции распределения F_i, $i = 1, 2$. Согласно определению функции f_m, имеет место

$$\int f_m \, dF_1 - \int f_m \, dF_2 = \frac{\operatorname{Var} f}{m} \sum_{j=1}^{m} j(\mu_1(E_{m,j}) - \mu_2(E_{m,j})) =$$
$$= \frac{\operatorname{Var} f}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_1\left(\bigcup_{k=j}^{m} E_{m,k}\right) - \mu_2\left(\bigcup_{k=j}^{m} E_{m,k}\right)\right) =$$
$$= \frac{\operatorname{Var} f}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} E_{m,k}\right) - \mu_1\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} E_{m,k}\right)\right).$$

В силу предположения, что f не убывает, множество $\bigcup_{k=0}^{j-1} E_{m,k}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, представляет собой промежуток вида $(-\infty, a\rangle$ или $(-\infty, a)$. Множество $E_{m,0}$ может быть тоже пустым. Отсюда следует, что

$$\left|\mu_2\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} E_{m,k}\right) - \mu_1\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} E_{m,k}\right)\right| \leqq \sup_{x \in R} |F_1(x) - F_2(x)|,$$

так что

$$\left| \int f \, \mathrm{d}F_1 - \int f \, \mathrm{d}F_2 \right| \leqq \operatorname{Var} f \sup_{x \in R} |F_1(x) - F_2(x)| + \frac{2 \operatorname{Var} f}{m}, \quad m \in N,$$

и это доказывает лемму.

Теорема 3. *Пусть* $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— последовательность вещественных чисел,* $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— такая последовательность положительных чисел, что*

(C1) $$k\alpha_k \leqq (k+1)\,\alpha_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots$$

и $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин, удовлетворяющих следующим условиям:*

(C2) $$\sup_{k \in N \cup \{0\}} \mathsf{E}|z_k| = c_1 < \infty,$$

(C3) $$\mathsf{E}(z_k \mid z_{k+1}) = (1 - \gamma_k)\, z_{k+1} \quad \text{п. в.}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Обозначим символом F_k *функцию распределения случайной величины* z_k, $k = 0, 1, \ldots$. *Если* $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— регулярная последовательность* $\{\varepsilon_k\}$*-оптимальных процедур, то для каждого* $n \in N$ *и каждой последовательности* $(a_1, a_2, \ldots) \in \boldsymbol{A}$ *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w\left(a_k, \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i + \alpha_{k-1} z_{k-1}\right)\right) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leqq \\
\leqq 2Kc_1\left(2\alpha_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\alpha_k|\gamma_k|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k + \\
+ \frac{c_0}{n}\sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in R}\left| F_k\left(\frac{x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i}{\alpha_k}\right) - F_{k-1}\left(\frac{x - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i}{\alpha_{k-1}}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $w(a_k, \beta_k(1/(k-1)\sum_{i=1}^{k-1} a_i + \alpha_{k-1} z_{k-1}))$ случайная величина, имеющая конечное математическое ожидание. Это следует из того, что $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ является регулярной последовательностью и, следовательно, в силу (P2) $w(a_k, \beta_k(1/(k-1)\sum_{i=1}^{k-1} a_i + \alpha_{k-1} x))$ представляет собой ограниченную и измеримую в смысле Бореля функцию от x.

Пусть $(a_1, a_2, \ldots) \in \boldsymbol{A}$ и $n \in N$ фиксировано и обозначим

$$\bar{a}_0 = 0,$$

$$\bar{a}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i,$$

$$s_k = \bar{a}_k + \alpha_k z_k\,, \quad k \in N\,,$$

$$Q = \mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, \beta_k(s_k)) - \varrho(\bar{a}_n)\,,$$

$$P = \mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (w(a_k, \beta_k(s_{k-1})) - w(a_k, \beta_k(s_k)))\,.$$

Теперь мы докажем несколько вспомогательных неравенств. Согласно (P1) и (3) имеет место

$$w(s_k, \beta_k(s_k)) \leqq w(s_k, \beta_{k+1}(s_{k+1})) + \varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, согласно (2), получим

$$\begin{aligned} (31) \qquad & w(\bar{a}_k, \beta_k(s_k)) - w(\bar{a}_k, \beta_{k+1}(s_{k+1})) \leqq \\ & \leqq \alpha_k z_k(w(0, \beta_k(s_k)) - w(0, \beta_{k+1}(s_{k+1}))) - \\ & - \alpha_k z_k(w(1, \beta_k(s_k)) - w(1, \beta_{k+1}(s_{k+1}))) + \varepsilon_k\,. \end{aligned}$$

Если b_k, $k = 1, 2, \ldots, -\, 1/k$-оптимальные процедуры такие, что существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} w(j, b_k(x)) = w_j(x)\,, \quad j = 0, 1, \quad x \in X\,,$$

то из (P1) и (3) вытекает

$$0 \leqq \varepsilon_n + w(s_n, b_k(\bar{a}_n)) - w(s_n, \beta_n(s_n))$$

и одсюда

$$\begin{aligned} & w(\bar{a}_n, \beta_n(s_n)) - \varrho(\bar{a}_n) \leqq \alpha_n z_n(w(0, \beta_n(s_n)) - w(0, b_\varepsilon(\bar{a}_n))) - \\ & - \alpha_n z_n(w(1, \beta_n(s_n)) - w(1, b_\varepsilon(\bar{a}_n))) + \varepsilon_n + w(\bar{a}_n, b_\varepsilon(\bar{a}_n)) - \varrho(\bar{a}_n)\,. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\begin{aligned} (32) \qquad & w(\bar{a}_n, \beta_n(s_n)) - \varrho(\bar{a}_n) \leqq \\ & \leqq \alpha_n z_n(w(0, \beta_n(s_n)) - w_0(\bar{a}_n)) - \alpha_n z_n(w(1, \beta_n(s_n)) - w_1(\bar{a}_n)) + \varepsilon_n\,. \end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned} Q &= \mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(k\bar{a}_k - (k-1)\,\bar{a}_{k-1}, \beta_k(s_k)) - \varrho(\bar{a}_n) = \\ &= \mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (kw(\bar{a}_k, \beta_k(s_k)) - (k-1)\,w(\bar{a}_{k-1}, \beta_k(s_k))) - \varrho(\bar{a}_n) = \\ &= \mathsf{E}\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} k(w(\bar{a}_k, \beta_k(s_k)) - w(\bar{a}_k, \beta_{k+1}(\bar{a}_{k+1}))) + \\ &\quad + n(w(\bar{a}_n, \beta_n(s_n)) - \varrho(\bar{a}_n))\Big)\,. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (31) и (32)

$$(33)\qquad Q \leqq E\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\alpha_k z_k(w(j,\beta_k(s_k)) - w(j,\beta_{k+1}(s_{k+1}))) + \right.$$

$$\left. + n\alpha_n z_n(w(j,\beta_n(s_n)) - w_j(\bar{a}_n))\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\left(\sum_{k=1}^{n}|E(k\alpha_k z_k - (k-1)\,\alpha_{k-1}z_{k-1})\,w(j,\beta_k(s_k))| + \right.$$

$$\left. + |En\alpha_n z_n w_j(\bar{a}_n)|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k\,.$$

Так как $w(j, \beta_k(s_k))$ — борелевская функция от случайной величины z_k, то согласно общеизвестным свойствам условных математических ожиданий и условию (C3) следует

$$Ez_{k-1}w(j,\beta_k(s_k)) = EE(z_{k-1}w(j,\beta_k(s_k)) \mid z_k) =$$

$$= Ew(j,\beta_k(s_k))\,E(z_{k-1} \mid z_k) = (1-\gamma_{k-1})\,Ez_k w(j,\beta_k(s_k))\,.$$

Если это тождество подставить в неравенство (33), то мы получаем

$$Q \leqq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\left(\sum_{k=1}^{n}|k\alpha_k - (k-1)\,\alpha_{k-1}(1-\gamma_{k-1})|\,|Ez_k w(j,\beta_k(s_k))| + \right.$$

$$\left. + n\alpha_n|Ez_n w_j(\bar{a}_n)|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k\,.$$

Из (1), (C1) и (C2) вытекает

$$|k\alpha_k - (k-1)\,\alpha_{k-1}(1-\gamma_{k-1})|\,|Ez_k w(j,\beta_k(s_k))| \leqq$$

$$\leqq (k\alpha_k - (k-1)\,\alpha_{k-1})\,Kc_1 + (k-1)\,\alpha_{k-1}|\gamma_{k-1}|\,Kc_1\,,$$

$$n\alpha_n|Ez_n w_j(\bar{a}_n)| \leqq n\alpha_n Kc_1\,.$$

Таким образом, имеет место следующая оценка

$$(34)\qquad Q \leqq 2Kc_1\left(2\alpha_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\alpha_k|\gamma_k|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\varepsilon_k\,.$$

Теперь будем оценивать P. Очевидно, что

$$E(w(a_k,\beta_k(s_{k-1})) - w(a_k,\beta_k(s_k))) =$$

$$= \int w(a_k,\beta_k(\bar{a}_{k-1} + \alpha_{k-1}z))\,\mathrm{d}F_{k-1}(z) - \int w(a_k,\beta_k(\bar{a}_k + \alpha_k z))\,\mathrm{d}F_k(z) =$$

$$= \int w(a_k,\beta_k(x))\,\mathrm{d}F_{k-1}\left(\frac{x-\bar{a}_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) - \int w(a_k,\beta_k(x))\,\mathrm{d}F_k\left(\frac{x-\bar{a}_k}{\alpha_k}\right).$$

 Отсюда, по лемме 3 и (P2) непосредственно вытекает, что

$$P \leqq c_0 \sup_{x\in R} \left| F_k\left(\frac{x-\bar{a}_k}{\alpha_k}\right) - F_{k-1}\left(\frac{x-\bar{a}_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) \right| .$$

Так как

$$\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, \beta_k(s_{k-1})) - \varrho(\bar{a}_n) = P + Q ,$$

то теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\{\delta_k\}_{k=2}^{\infty}$ *— последовательность вещественных чисел,* $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию* (C1) *в теореме* 2, *и* $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ *последовательность случайных величин, удовлетворяющих условию* (C2) *в теореме* 2 *и условию*

(C4) $$\mathsf{E}(z_{k+1} \mid z_k) = (1-\delta_{k+1})\, z_k \quad \textit{п. в.}, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Если $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— регулярная последовательность* $\{\varepsilon_k\}$*-оптимальных процедур, то для каждого* $n \in N$ *и каждой последовательности* $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbf{A}$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w\left(a_k, \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i + \alpha_{k-1}z_{k-1}\right)\right) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geqq$$

$$\geqq -2Kc_1\left(\frac{2\alpha_1}{n} + 2\alpha_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k|\delta_k|\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_{k+1} .$$

Доказательство. Фиксируем $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbf{A}$ и обозначим

$$\bar{a}_0 = 0 ,$$

$$\bar{a}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i ,$$

$$r_k = \beta_{k+1}(\bar{a}_k + \alpha_k z_k) .$$

Имеет место

(35) $$\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w(a_k, r_{k-1}) - \varrho(\bar{a}_n) =$$

$$\mathsf{E} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(w(\bar{a}_k, r_{k-1}) - w(\bar{a}_k, r_k)) +$$

$$+ \mathsf{E}(w(\bar{a}, r_n) - \varrho(\bar{a}_n)) .$$

Так как

$$w(\bar{a}_k + \alpha_k z_k, r_k) \leqq w(\bar{a}_k + \alpha_k z_k, r_{k-1}) + \varepsilon_{k+1} ,$$

то

$$w(\bar{a}_k, r_{k-1}) - w(\bar{a}_k, r_k) \geqq \alpha_k z_k(q_k - q_{k-1}) - \varepsilon_{k+1},$$

где

$$q_k = w(1, r_k) - w(0, r_k).$$

Таким образом

$$\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(w(\bar{a}_k, r_{k-1}) - w(\bar{a}_k, r_k)) \geqq$$

$$\geqq \mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\alpha z_k(q_k - q_{k-1}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}(k\alpha_k z_k - (k+1)\,\alpha_{k+1}z_{k+1})\,q_k +$$

$$+ \alpha_n \mathsf{E} z_n q_n - \frac{\alpha_1}{n}\,\mathsf{E} z_1 q_0 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_{k+1}.$$

Из (1) и условий (C1) и (C4) вытекает

$$\mathsf{E}(k\alpha_k z_k - (k+1)\,\alpha_{k+1}z_{k+1})\,q_k \geqq$$

$$\geqq (k\alpha_k - (k+1)\,\alpha_{k+1})\,2Kc_1 - (k+1)\,\alpha_{k+1}|\delta_{k+1}|\,2Kc_1,$$

$$\alpha_n \mathsf{E} z_n q_n \geqq -2\alpha_n K c_1,$$

$$-\frac{\alpha_1}{n}\,\mathsf{E} z_1 q_0 \geqq -\frac{2\alpha_1}{n}\,K c_1$$

и, следовательно,

$$\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(w(\bar{a}_k, r_{k-1}) - w(\bar{a}_k, r_k)) \geqq$$

$$\geqq -2Kc_1\left(\frac{2\alpha_1}{n} + 2\alpha_n + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k\alpha_k|\delta_k|\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_{k+1}.$$

Так как

$$w(\bar{a}_n, r_n) - \varrho(\bar{a}_n) \geqq 0$$

то отсюда ввиду (35) непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *такая последовательность неотрицательных чисел, что*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{для всех} \quad n \in N,$$

и пусть $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *регулярная последовательность* $\{\varepsilon_k\}$-*оптимальных процедур. Если случайная величина* z_0 *имеет конечный первый абсолютный момент* *и ограниченную плотность, то простой стратегический процесс* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, *определяемый равенством*

$$b_1(\omega; a_1, a_2, \ldots) = \beta_1(z_0(\omega)),$$

$$b_k(\omega; \alpha_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots) = \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i + \frac{1}{\sqrt{(k-1)}} z_0(\omega)\right)$$

$$\text{для} \quad k = 2, 3, \ldots$$

является оптимальным относительно риска и существует такая постоянная c, *что*

$$\left| E \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w(a_k, b_k(.; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\right| \leqq \frac{c}{\sqrt{n}}$$

для всех $n \in N$ *и* $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbf{A}$.

Доказательство. Символом F обозначим функцию распределения случайной величины z_0. Покажем, прежде всего, что существует такая постоянная c_2, что

$$\text{(36)} \quad \sup_{x \in R}\left| F\left(\left(x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\sqrt{k}\right) - F\left(\left(x - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\sqrt{(k+1)}\right)\right| \leqq$$
$$\leqq c_2\left(\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{(k+1)}}\right),$$

каковы бы ни были $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbf{A}$ и $k \in N$.

В силу предположения, что $E|z_0| < \infty$, существуют такие положительные постоянные U и V, что

$$1 - F(x) \leqq \frac{U}{x}, \quad \text{если} \quad x \geqq V,$$

$$F(x) \leqq \frac{U}{|x|}, \quad \text{если} \quad x \leqq -V,$$

и, следовательно, для всех $k \in N$ и $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbf{A}$

$$1 - F\left(\left(x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\sqrt{k}\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{если} \quad x \geqq \max\{U+1, V\},$$

$$F\left(\left(x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\sqrt{k}\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{если} \quad x \leqq -\max\{U+1, V\}.$$

Таким образом,

$$\text{(37)} \quad \left| F\left(\left(x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\sqrt{k}\right) - F\left(\left(x - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\sqrt{(k+1)}\right)\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\text{если} \quad |x| \geqq \max\{U+1, V\}.$$

Ввиду того, что случайная величина z_0 имеет ограниченную плотность, существует постоянная c_3 так, что

$$|F(x) - F(y)| \leqq c_3|x - y|,$$

каковы бы ни были $x, y \in R$. Так как

$$\left|\left(x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\sqrt{k} - \left(x - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\sqrt{(k+1)}\right| \leqq$$

$$\leqq |x|\,(\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k}) + \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i(\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k})}{\sqrt{(k(k+1))}} + \frac{a_{k+1}}{\sqrt{(k+1)}} \leqq$$

$$\leqq (|x| + 1)\,(\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k}) + \frac{1}{\sqrt{(k+1)}},$$

то

$$F\left|\left(\left(x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\sqrt{k}\right) - F\left(\left(x - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\sqrt{(k+1)}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq c_3(1 + \max\{U + 1, V\})\left(\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{(k+1)}}\right), \quad \text{если}$$

$$|x| \leqq \max\{U + 1, V\}.$$

Ввиду (37) отсюда следует (36).

Определим

$$z_k = z_0,$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_0 = 1.$$

Очевидно, что

$$\mathsf{E}(z_k \mid z_{k+1}) = \mathsf{E}(z_{k+1} \mid z_k) = z_0 \quad \text{п. в.}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

так что последовательность случайных величин $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (C3) и (C4), если положить $\gamma_k = \delta_k = 0$. Имея ввиду, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqq \frac{2}{\sqrt{n}},$$

то утверждение теоремы следует из теорем 3 и 4.

Поучительно сопоставить эту теорему с теоремой 2. Если второй игрок действует таким образом, что в k-м шагу выбирает стратегию, которая является оптимальной (или ε_k-оптимальной, если оптимальной не существует) относительно частоты $1/(k-1)\sum_{i=1}^{k-1} a_i$ первых $k-1$ стратегий первого игрока, то этот процесс оптимален в смысле определения 2 только тогда, если функция ϱ дифференцируема в (0,1). Если ϱ не дифференцируема, то второму игроку придется частоты стратегий первого игрока подходящим образом рандомизировать и выбирать оптимальные стратегии относительно этих рандомизированных частот.

Теперь мы будем заниматься случаем, когда в k-м шагу второму игроку доступны только несмещенные оценки, $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$ в предыдущих $k-1$ играх. Если обозначить $h_i = g_i - \mathsf{E}g_i$, то при условиях следующей теоремы достаточно, чтобы второй игрок в k-м шагу применял оптимальную (или ε_k-оптимальную) стратегию относительно $1/(k-1)\sum_{i=1}^{k-1} g_i(\omega)$. Дальнейшая рандомизация не нужна.

Теорема 6. *Пусть* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *такая последовательность неотрицательных чисел, что*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{для всех} \quad n \in N$$

и пусть $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *регулярная последовательность* $\{\varepsilon_k\}$-*оптимальных процедур. Если независимые и одинакого распределенные случайные величины* $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям*

$$\mathsf{E}h_k = 0\,,$$
$$\mathsf{E}h_k^2 = \sigma^2 > 0\,,$$
$$\mathsf{E}|h_k|^3 < \infty\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то простой стратегический процесс $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, *определяемый равенством*

$$b_1(\omega; a_1, a_2, \ldots) = \beta_1(0)\,,$$
$$b_k(\omega; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots) = \beta_k\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\big(h_i(\omega) + a_i\big)\right) \quad \text{для} \quad k = 2, 3, \ldots,$$

является оптимальным относительно риска и существует такая постоянная c, *что*

$$\left|\mathsf{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w\big(a_k, b_k(.\,; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots)\big) - \varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\right| \leqq \frac{c}{\sqrt{n}}$$

для всех $n \in N$ *и* $(a_1, a_2, \ldots) \in \boldsymbol{A}$.

Доказательство. Так как случайные величины h_k, $k = 1, 2, \ldots$, независимы и одинакого распределены, то

$$\mathsf{E}(h_k \mid \sum_{i=1}^{n} h_i) = \mathsf{E}(h_1 \mid \sum_{i=1}^{n} h_i) \quad \text{п. в.}$$

для всех $n \in N$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что для каждого $n \in N$ имеет место

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = \mathsf{E}(\sum_{k=1}^{n} h_k \mid \sum_{i=1}^{n} h_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(h_k \mid \sum_{i=1}^{n} h_i) \quad \text{п. в.}$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}(h_k \mid \sum_{i=1}^{n} h_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i \quad \text{п. в.}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad n \in N$$

и, следовательно,

$$\mathsf{E}(\sum_{k=1}^{n-1} h_k \mid \sum_{i=1}^{n} h_i) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i \quad \text{п. в.}, \quad n \in N. \tag{38}$$

Зададим теперь последовательность случайных величин $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ и последовательность положительных чисел $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом

$$z_0 = 0,$$
$$z_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} h_i,$$
$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\alpha_0 = 1.$$

В силу (38)

$$\mathsf{E}(z_k \mid z_{k+1}) = \sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)} z_{k+1} \quad \text{п. в.}, \quad k \in N$$

и

$$\mathsf{E}(z_0 \mid z_1) = 0 \quad \text{п. в.}$$

С другой стороны не трудно убедиться в том, что

$$\mathsf{E}(z_{k+1} \mid z_k) = \sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)} z_k \quad \text{п. в.}, \quad k \in N.$$

Таким образом, последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяет условиям (C3) и (C4) в теоремах 3 и 4, если положить

$$\gamma_k = \delta_{k+1} = 1 - \sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)} \quad \text{для} \quad k \in N \quad \text{и} \quad \gamma_0 = 1.$$

 Но так как она удовлетворяет также условию (C2), то из теорем 3 и 4 следует

$$-2Kc_1\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{(k+1)}\left(1-\sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)}\right)\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq$$

$$\leqq E\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}w(a_k, b_k(.\,; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \ldots))-\varrho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\leqq$$

$$\leqq 2Kc_1\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}\left(1-\sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)}\right)\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}+$$

$$+\frac{c_0}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in R}\left|F_k\left(\left(x-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\sqrt{k}\right)-F_{k-1}\left(\left(x-\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)\sqrt{(k-1)}\right)\right|.$$

Так как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{(k+1)}\left(1-\sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{(k+1)}-\sqrt{k})\leqq\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqq\frac{2}{\sqrt{n}}$$

то остается только оценить

$$S_n(a_1, a_2, \ldots)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in R}\left|F_k\left(\left(x-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\sqrt{k}\right)-\right.$$

$$\left.-F_{k-1}\left(\left(x-\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)\sqrt{(k-1)}\right)\right|.$$

Обозначим

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt\,,\quad x\in R\,.$$

Если применить теорему нормального приближения (см. например [3] стр. 288) к последовательности случайных величин $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, то мы получим: Существует такая числовая константа $c_3<\infty$, что для всех $k\in N$

$$\sup_{x\in R}|F_k(\sigma x)-\Phi(x)|\leqq c_3\frac{E|h_1|^3}{\sigma^3\sqrt{k}}\,. \tag{39}$$

В доказательстве теоремы 5 мы показали, что функция распределения F удовлетворяет неравенству (36), если соответствующая плотность ограничена и $\int|x|\,dF(x)<\infty$. Но этими свойствами обладает функция распределения Φ.

Так как

$$\sup_{x\in R}\left|F_k\left(\left(x-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\sqrt{k}\right)-F_{k-1}\left(\left(x-\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)\sqrt{(k-1)}\right)\right|\leqq$$
$$\leqq\sup_{x\in R}|F_k(\sigma x)-\Phi(x)|+\sup_{x\in R}|F_{k-1}(\sigma x)-\Phi(x)|+$$
$$+\sup_{x\in R}\left|\Phi\left(\left(x-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\sqrt{k}\right)-\Phi\left(\left(x-\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)\sqrt{(k-1)}\right)\right|,$$

то в силу (36) и (39) существует такая постоянная c_4, что

$$S_n(a_1, a_2, \ldots)\leqq\frac{c_4}{\sqrt{n}}$$

Таким образом, теорема доказана.

(Поступило 6 июля 1967 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Hannan: Approximation to Bayes Risk in Repeated Play. Contributions to the Theory of Games *3* (1957), 97—139.
[2] S. Jílovec, B. Šubert: Repetitive Play of a Game against Nature. Aplikace matematiky — в печати.
[3] M. Loeve: Probability Theory. 3rd ed., Van Nostrand, New York 1963.
[4] J. van Ryzin: The Sequential Compound Decision Problem with Finite $n \times m$ Loss Matrix. Ann. Math. Stat. *37* (1966), 2, 954—975.
[5] E. Samuel: Asymptotic Solutions of the Sequential Compound Decision Problem. Ann. Mat. Stat. *34* (1963), 1079—1094.

VÝTAH

Sekvenční opakování hry při neurčitosti

STANISLAV JÍLOVEC

V článku se vyšetřuje posloupnost zleva konečných strategických her dvou hráčů $G_1, G_2, G_3, \ldots$, které mají stejnou strukturu, tj. $G_1 = G_2 = G_3 = \ldots$, při čemž strategie hráčů se mohou měnit v každé hře. Hráč I může vybrat zcela libovolnou posloupnost strategií, nepředpokládá se, že volby hráče I lze popsat pravděpodobnostně. Hráč II zná v k-té hře strategie nebo nestranné odhady strategií, kterých použil hráč I v předcházejících hrách, a může této znalosti použít k volbě své strategie v k-té hře.

Postupuje-li hráč II tak, že v každé hře volí strategii, která je optimální vzhledem k vektoru relativních četností strategií použitých hráčem I v předcházejících hrách, je tento postup optimální (ve smyslu definice 2) právě tehdy, když Bayesova střední ztráta je diferencovatelnou funkcí (věta 2). Věta 3 udává třídu strategických postupů hráče II, která je optimální ve smyslu definice 2 i v případě, když Bayesova střední ztráta není diferencovatelná. Další věty jsou aplikacemi věty 3 v případě, kdy hráč II zná v každé hře strategie použité hráčem I v předcházejících hrách (věta 5) a nebo nestranné odhady těchto strategií (věta 6).

RNDr. Stanislav Jílovec, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.