KYBERNETIKA ČÍSLO 5, ROČNÍK 3/1967

Řešení algebraických a transcendentních rovnic na analogovém počítači

JOSEF SOLDÁN

Analogových počítačů se běžně používá k řešení diferenciálních rovnic; méně běžné je jejich použití k řešení rovnic algebraických nebo transcendentních.

S problémem určit kořeny algebraických nebo transcendentních rovnic se setkáváme v různých odvětvích přírodních i technických věd i samotné kybernetiky. Tak např. hodnoty výstupních veličin regulačního systému v ustáleném stavu nebo optimální hodnoty parametrů systémů posuzované z hlediska daného kritéria jsou kořeny takových rovnic. Na řešení soustav algebraických a transcendentních rovnic vedou problémy z oblasti identifikace systémů, řešení po částech lineárních nebo oscilačních systémů, aproximace funkcí součtem daných transcendentních funkcí (např. exponenciál) a z mnoha dalších oborů.

Jednou z možných metod řešení těchto rovnic je vytvoření analogového modelu, popsaného soustavou diferenciálních rovnic přiřazených řešené soustavě. V článku odvodíme některé vlastnosti a formy tohoto přiřazení na základě Ljapunovovy teorie stabilnosti klidových bodů autonomní soustavy diferenciálních rovnic.

1. ÚVOD

Nechť je dán systém rovnic

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{1}$$

v němž f_i jsou reálně algebraické nebo transcendentní funkce reálných proměnných $x_1, \ldots, x_n$. Budeme předpokládat, že v prostoru E_n existuje bod $A = [a_1, \ldots, a_n]$, který je *izolovaným kořenem* soustavy (1), tzn. že platí:

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Naším úkolem je nalézt pomocí analogového počítače souřadnice tohoto bodu.

Je známo, že operační zesilovače a některé další prvky analogových počítačů jsou frekvenčně závislé, dále, že v obvodech vždy existují parazitní kapacity a indukčnosti a tedy, že činnost všech počítacích jednotek analogového počítače je matematicky popsána diferenciálními rovnicemi. Vytvořit obvod, který je popsán soustavou algebraických nebo transcendentních rovnic tedy nelze, a proto soustavu (1) budeme řešit pomocí tzv. „náhradní“ soustavy rovnic diferenciálních.

Předpokládejme, že autonomní soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

má partikulární integrál

$$x_1(t) = a_1, \dots, x_n(t) = a_n,$$

a_i jsou konstanty, tj. platí $F_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$. Ve fázovém prostoru $[x_1, \dots, x_n]$ představuje toto (singulární) řešení tzv. *klidový bod*, tj. bod, ke kterému se s rostoucím t sbíhají, nebo od kterého se rozbíhají trajektorie soustavy (3) [1]. Jestliže toto řešení je stabilní a jestliže existuje okolí Γ_A bodu A takové, že pro všechny trajektorie ležící v tomto okolí platí

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = a_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

(tj. všechny trajektorie z určitého okolí se k bodu A sbíhají), pak bod A se nazývá *asymptoticky stabilním klidovým bodem*. Oblast počátečních podmínek všech řešení, pro které platí vztah (4), se nazývá *spádovou oblastí* bodu A.

V technické praxi (v praxi analogového počítání) se po určité době, volíme-li počáteční podmínky ve spádové oblasti asymptoticky stabilního klidového bodu A, hodnoty $x_i(t)$ přibliží hodnotám a_i s určitou přesností a nadále podléhají již jen náhodným změnám. Z průběhu trajektorií v okolí Γ_A vyplývá, že hodnoty $x_i(t)$ zůstanou stále v určitém malém okolí hodnot a_i; poloměr tohoto okolí můžeme označit za chybu výpočtu. V takovém případě říkáme, že řešení soustavy (3) se ustálí nebo, že systém (3) přejde do *ustáleného stavu*.

Řešíme-li soustavu algebraických nebo transcendentních rovnic (1) na analogovém počítači, musí nejdříve programátor stanovit náhradní soustavu diferenciálních rovnic (3), tj. vytvořit funkce $F_i(x_1, \dots, x_n)$ tak, aby

1. $$F_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

2. každý kořen $[a_1, \dots, a_n]$ soustavy (1) byl asymptoticky stabilním klidovým bodem soustavy (3).

Pro tuto soustavu vytvořit model na analogovém počítači, zvolit počáteční podmínky ve spádové oblasti bodu A a nalézt ustálený stav příslušného řešení, tj. souřadnice bodu A.

Podmínky 1 a 2 pro funkce $F_i(x_1, \dots, x_n)$ můžeme doplnit ještě další podmínkou:

3. Platí-li $F_i(b_1, \dots, b_n) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$ a současně $f_j(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ alespoň

pro jediné j, $1 \leqq j \leqq n$, pak bod $B = [b_1, \ldots, b_n]$ není asymptoticky stabilním klidovým bodem soustavy (3) (tj. řešení se v takovém bodě „neustálí").

Problém stanovit funkce F_i tak, aby byly splněny podmínky 1, 2, 3 nebyl zatím obecně řešen. Bod B, který je asymptoticky stabilním klidovým bodem (3), ale není kořenem (1), nazýváme obvykle „nepravým kořenem". V praxi, pokud podmínka 3 není splněna, se tedy musíme vždy přesvědčit, zda nalezený klidový bod soustavy (3) je kořenem (1); z dalšího textu vyplyne, že při řešení na analogovém počítači a doporučené volbě funkcí F_i půjde o snadnou záležitost.

V článku se budeme zabývat metodami vytváření funkcí F_i tak, aby byly splněny podmínky 1 a 2. Budeme se přitom opírat o teorii stabilnosti podle Ljapunova, z níž v 2. odstavci uvedeme potřebné definice a věty. V 3. odstavci budeme problém řešit pro $n = 1$, zvláště se zřetelem k realizaci určitých funkcí na analogovém počítači. Ve 4. odstavci provedeme některá zobecnění pro n-rozměrný případ.

Otázkou vytvoření modelu a řešení soustavy (3) se v této práci zabývat nebudeme. Můžeme tedy říci, že problém nalézt kořen soustavy (1) převedeme na problém stanovit počáteční podmínky ve spádové oblasti příslušného klidového bodu a řešit soustavu (3).

2. ASYMPTOTICKÁ STABILNOST

Definice 1. Řešení $\bar{x}_i(t) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ systému diferenciálních rovnic (3) se nazývá *stabilní ve smyslu Ljapunova*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta(\varepsilon)$ tak, že pro libovolné řešení systému (3) $x_i(t)$, jehož počáteční podmínky vyhovují nerovnosti

(5) $$\sum_{i=1}^{n} [x_i(0) - a_i]^2 < \delta^2(\varepsilon)$$

platí

(6) $$\sum_{i=1}^{n} [x_i(t) - a_i]^2 < \varepsilon^2 \quad \text{pro} \quad t > 0 .$$

Řešení, které není stabilní, nazveme nestabilní. Řešení se nazývá *asymptoticky stabilní*, je-li stabilní a jestliže současně platí:

(7) $$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = a_i , \quad i = 1, \ldots, n ,$$

pro každé $x_i(t)$, jehož počáteční podmínky vyhovují nerovnosti (5).

Bod $A = [a_1, \ldots, a_n]$ nazveme asymptoticky stabilním klidovým bodem soustavy (3). Oblast bodů $X = [x_1(0), \ldots, x_n(0)]$, tj. počátečních podmínek všech řešení $x_i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$, pro které platí vztahy (7), nazveme spádovou oblastí bodu A.

Definice 2. Funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá *Ljapunovovou funkcí*, jestliže současně platí:

1. Je definovaná v oblasti Ω_A proměnných $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $A \in \Omega_A$,
2. Má v této oblasti spojité parciální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

3. $$V(A) = V(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$
4. $$V(X) = V(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{pro} \quad X \in \Omega_A - (A).$$

Věta 1. (Ljapunov). *Jestliže existuje alespoň jediná Ljapunovova funkce $V(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ taková, že*

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x_1, \ldots, x_n) < 0 \text{ pro } X \in \Omega_A - (A)$$

a $W(A) = 0$, pak řešení

$$x_1(t) = a_1, \ldots, x_n(t) = a_n$$

soustavy diferenciálních rovnic (3) je asymptoticky stabilní.

Věta 2. *Jestliže existuje funkce $U(x_1, \ldots, x_n)$ taková, že platí současně*

1. *$U(x_1, \ldots, x_n)$ je definovaná v oblasti Ω_A,*
2. *má v této oblasti spojité parciální derivace*

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

3. $U(A) = 0$
4. *existuje oblast Δ_A tak, že $\Delta_A \subset \Omega_A$, $A \in \bar{\Delta}_A$ (uzávěr Δ_A), a dále*

$$U(X) > 0 \quad \textit{pro} \quad X \in \Delta_A - (A),$$
$$U(X) = 0 \quad \textit{pro} \quad X \in \bar{\Delta}_A - \Delta_A \quad \textit{a pro} \quad X = A,$$

5. $$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} F_i(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \textit{pro} \quad X \in \Delta_A - (A),$$

pak řešení $x_i(t) = a_i$ soustavy diferenciálních rovnic (3) je nestabilní.

Důkazy vět 1 a 2 (formulovaných obecněji) jsou v [2] nebo v [3].

3. ŘEŠENÍ ROVNICE $f(x) = 0$

V tomto odstavci se budeme zabývat řešením rovnice

$$f(x) = 0, \tag{8}$$

kde f je reálná funkce reálné proměnné. V celém odstavci budeme předpokládat, že existuje izolovaný bod a tak, že $f(a) = 0$ a číslo $\sigma > 0$ takové, že v intervalu $(a - \sigma, a + \sigma) \equiv \Omega_a$ je funkce f spojitá se svou první a druhou derivací, a že $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ pro $x \in \Omega_a - (a)$.

Nechť dále v Ω_a je definovaná funkce $F(x)$, která je spojitá, $F(a) = 0$, $F(x) \neq 0$ v $\Omega_a - (a)$, a která vyhovuje některé z podmínek o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice.

Věta 3. *Jestliže $F'(x)$ je spojitá v Ω_a a platí-li $F'(x) < 0$ v $\Omega_a - (a)$, pak bod a je asymptoticky stabilním klidovým bodem diferenciální rovnice*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)\,. \tag{9}$$

Důkaz. Funkce $F^2(x)$ je za výše uvedených předpokladů Ljapunovovou funkcí.

$$W(x) = \frac{dF^2(x)}{dt} = 2\,F(x)\,.\,F'(x)\,\frac{dx}{dt} = 2F^2(x)\,.\,F'(x) < 0$$

v $\Omega_a - (a)$. $W(a) = 0$. Na základě věty 1 platí tvrzení věty 3.

Věta 4. *Jestliže $F'(x)$ je spojitá v Ω_a a platí-li $F'(x) > 0$ v intervalu $(a, a + \delta)$ nebo v intervalu $(a - \delta, a)$, kde $\delta > 0$, pak bod a je nestabilním řešením diferenciální rovnice* (9).

Důkaz. Platí-li $F'(x) > 0$ $(a, a + \delta)$, pak podle věty 2 volíme $U = F(x)$. Z předpokladů o F plyne, že $F(x) > 0$ a $dU/dt = F'(x)\,.\,dx/dt = F(x)\,.\,F'(x) > 0$ v $(a, a + \delta)$; bod a je podle věty 2 nestabilní. Platí-li $F'(x) > 0$ v $(a - \delta, a)$, pak volíme $U = -F(x)$, $dU/dt = -F(x)\,.\,F'(x) > 0$ v $(a - \delta, a)$ a bod a je rovněž nestabilní. Věta je dokázána.

Věty 3 a 4 nám stanovují lokální podmínku pro funkci $F(x)$: aby byl klidový bod a rovnice (9) asymptoticky stabilní, musí funkce $F(x)$ vlevo i vpravo od bodu a klesat.

Z toho plyne tento

důsledek: Jestliže platí $f'(a) \neq 0$, pak právě jedna z diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,, \quad \frac{dx}{dt} = -f(x)\,,$$

má řešení $x(t) = a$ asymptoticky stabilním klidovým bodem. Jestliže však platí $f'(a) = 0$, nemusí být řešení a asymptoticky stabilní pro žádnou z těchto rovnic.

O platnosti vztahu $f'(a) \neq 0$ se nemůže programátor ve většině případů (jelikož nezná číslo a) předem přesvědčit. To snižuje praktickou hodnotu tohoto důsledku.

Věta 5 (metoda gradientu). *Nechť V je Ljapunovova funkce v Ω_a. Pak*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{10}$$

má asymptoticky stabilní klidový bod v čísle a.

Důkaz. Z definice Ljapunovovy funkce plyne, že existuje oblast Φ_a, $a \in \Phi_a$, $\Phi_a \subset \Omega_a$ taková, že $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x \neq 0$ v $\Phi_a - (a)$.

$$W(x) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2 < 0 \quad \text{pro} \quad x \in \Phi_a - (a)\,.$$

Jelikož $V(x)$ nabývá v bodě a minima, je $V'(a) = 0$ a tedy i $W(a) = 0$.

Věta 6. *Diferenciální rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -f(x)\,.\,f'(x) \tag{11}$$

má asymptoticky stabilní klidový bod v čísle a.

Důkaz plyne okamžitě z předešlé věty, volíme-li $V = \frac{1}{2}f^2$.

Větou 6 jsme vyřešili pro $n = 1$ problém, vytyčený v úvodu: všechny kořeny rovnice $f(x) = 0$ jsou asymptoticky stabilními klidovými body rovnice (11), pokud ovšem funkce f splňuje požadavky, uvedené v úvodu tohoto odstavce v nějakém okolí každého kořene.

Řešit rovnici (8) pomocí rovnice (11) není v praxi příliš výhodné. Jednak je nutno pro vytvoření součinu $f\,.\,f'$ použít násobičku, tj. jednotku, kterou v praxi analogových výpočtů pro její menší přesnost používáme jen v nevyhnutelných případech, a jednak součin $f\,.\,f'$ nabývá v blízkosti kořene relativně malých hodnot a vlivem šumů může být chyba řešení značná.

Přesnějších výsledků obvykle dosáhneme, použijeme-li některé z diferenciálních rovnic, uvedených ve větách 7 a 8. Nejprve budeme definovat funkci „technické signum f" (spojitou aproximaci funkce $\operatorname{sgn} f$), kterou lze s určitou přesností realizovat technickými prostředky na analogovém počítači. Integrál této funkce nazveme obdobně „technická absolutní hodnota f" a je opět určitou aproximací funkce $|f|$.

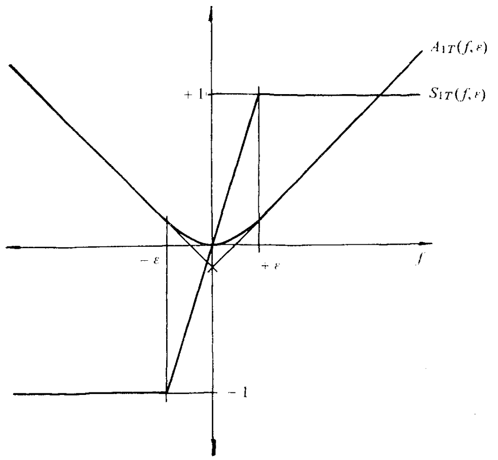
Nechť $\varepsilon > 0$ je konstanta, daná konstrukcí počítací jednotky.

Definice 3. Symbolem $S_{1T}(f, \varepsilon)$ (*technické signum f*) označme funkci proměnné f:

$$\begin{aligned} S_{1T}(f, \varepsilon) &= -1 \quad \text{pro} \quad f \in (-\infty, -\varepsilon) \equiv I^{-1}_{f,\varepsilon}\,, \\ S_{1T}(f, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} f \quad \text{pro} \quad f \in [-\varepsilon, \varepsilon] \equiv I^{0}_{f,\varepsilon}\,, \\ S_{1T}(f, \varepsilon) &= +1 \quad \text{pro} \quad f \in (\varepsilon, +\infty) \equiv I^{1}_{f,\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Definice 4. Symbolem $A_{1T}(f, \varepsilon)$ (*technická absolutní hodnota f*) označme funkci proměnné f:

$$(13) \qquad \begin{aligned} A_{1T}(f, \varepsilon) &= -f - \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{-1}\,, \\ A_{1T}(f, \varepsilon) &= \frac{1}{2\varepsilon} f^2 \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{0}\,, \\ A_{1T}(f, \varepsilon) &= f - \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{1}\,. \end{aligned}$$



Obr. 1. Graf funkcí $S_{1T}(f, \varepsilon)$ a $A_{1T}(f, \varepsilon)$.

Grafy obou funkcí jsou na obrázku 1.

Funkce $S_{1T}(f, \varepsilon)$ i $A_{1T}(f, \varepsilon)$ jsou spojitými funkcemi argumentu f. Platí

$$\frac{\mathrm{d}A_{1T}(f, \varepsilon)}{\mathrm{d}f} = S_{1T}(f, \varepsilon)\,,$$

tedy $A_{1T}(f, \varepsilon)$ má spojitou derivaci. Pro limity platí:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S_{1T}(f, \varepsilon) = \operatorname{sgn} f\,,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_{1T}(f, \varepsilon) = |f|\,.$$

Protože $f(a) = 0$, je $A_{1T}(f, \varepsilon)$ Ljapunovovou funkcí pro $x \in \Omega_a$.

$$\frac{dx}{dt} = -S_{1T}(f, \varepsilon) \,.\, f'(x) \tag{14}$$

má asymptoticky stabilní klidový bod $x(t) = a$.

Důkaz. Příslušná Ljapunovova funkce je $V(x) = A_{1T}(f, \varepsilon)$ a

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{df}\frac{df}{dx} = S_{1T}(f, \varepsilon) \,.\, f'(x) \,.$$

Funkce $V(x)$, příslušné rovnicím (11) popř. (14) se daly vyjádřit velmi jednoduše. Poněkud složitější vyjádření budou tyto funkce mít pro diferenciální rovnice, uvedené v následující větě:

Věta 8. *Nechť* $\delta > 0$. *Každá z diferenciálních rovnic*

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) \,.\, S_{1T}(f', \varepsilon) \,, \tag{15}$$

$$\frac{dx}{dt} = -S_{1T}(f, \varepsilon) \,.\, S_{1T}(f', \delta) \tag{16}$$

má asymptoticky stabilní klidový bod $x = a$.

Důkaz. K důkazu postačí, najdeme-li nebo naznačíme-li postup k nalezení funkce $V(x)$ tak, že výraz na pravé straně diferenciálních rovnic (15) resp. (16) bude roven $-V'(x)$.

1. a) Předpokládejme nejprve, že $f'(x) > \varepsilon$ nebo, že $f'(x) < -\varepsilon$ v Ω_a. V takovém případě platí $S_{1T}(f', \varepsilon) = \operatorname{sgn} f'(x)$. Příslušná Ljapunovova funkce má tvar:

$$V(x) = \operatorname{sgn} f'(x) \,.\, \int_a^x f(x) \, dx \,.$$

Platí $V(a) = 0$. Podle předpokladu nemění $f'(x)$ v Ω_a znaménko, tedy $f(x)$ buď stále klesá, nebo stále roste. Jestliže klesá, pak pro $x \in (a - \sigma, a)$ platí $f(x) > 0$, $x < a$, $\operatorname{sgn} f'(x) = -1$ a

$$V(x) = -\int_a^x f(x) \, dx = \int_x^a f(x) \, dx > 0 \,.$$

Pro $x \in (a, a + \sigma)$ platí $f(x) < 0$, $a < x$, $\operatorname{sgn} f' = -1$ a

$$V(x) = -\int_a^x f(x) \, dx = \int_a^x [-f(x)] \, dx > 0 \,.$$

Podobně, na základě vztahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ je-li $a < b, f(x) > 0$ v (a, b), dokážeme, že $V(x) > 0$ pro $x \in \Omega_a - (a)$ i v případě, že $f(x)$ roste.

b) Nechť $f'(a) = 0$. Předpokládejme, že existují v Ω_a právě dva body $x_1 < a < x_2$ tak, že $f'(x_1) = \varepsilon$, $f'(x_2) = -\varepsilon$ (tedy $f(x)$ vlevo od a roste, vpravo klesá, tj. $f(x) \leqq 0$ v Ω_a).

Utvořme funkci $V(x)$ tak, aby pro $x \in (a - \sigma, x_1)$:

$$V'(x) = \operatorname{sgn} f'(x_1) \,.\, f(x)\,,$$

$$V(x) = \operatorname{sgn} f'(x_1) \,.\, \int_{x_1}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon} f^2(x_1)\,;$$

pro $x \in [x_1, x_2]$:

$$V'(x) = \frac{1}{\varepsilon} f'(x) \,.\, f(x)\,,$$

$$V(x) = \frac{1}{2\varepsilon} f^2(x)\,;$$

pro $x \in (x_2, a + \sigma)$:

$$V'(x) = \operatorname{sgn} f'(x_2) \,.\, f(x)\,,$$

$$V(x) = \operatorname{sgn} f'(x_2) \,.\, \int_{x_2}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon} f^2(x_2)\,.$$

Platí zřejmě, že funkce $V(x)$ je spojitá v Ω_a, má spojitou derivaci $S_{1T}(f', \varepsilon) \,.\, f$ a $V(a) = 0$. O platnosti vztahu $V(x) > 0$ v $\Omega_a - (a)$ se přesvědčíme stejným způsobem jako v případě a).

c) V ostatních případech (tj. např. jestliže $f'(x)$ dosahuje hodnot $\pm\varepsilon$ ve více bodech) postupujeme podobně. Zásadně můžeme říci: v bodech, pro něž $f'(x)$ leží v intervalu $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, má funkce $V(x)$ tvar $(1/2\varepsilon)\, f^2(x) + k_i$; pro x, při nichž hodnoty $f'(x)$ leží mimo interval $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, má funkce $V(x)$ tvar $\operatorname{sgn} f'(x_i) \,.\, \int_{x_i}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + c_i$. Hodnoty konstant k_i a c_i volíme tak, aby funkce $V(x)$ byla v Ω_a spojitá a aby platilo $V(a) = 0$.

2. Při důkazu vztahu (16) budeme postupovat tak, že sestrojíme příslušnou funkci $V(x)$ v jediném případě a ukážeme na něm, jak je možno postupovat při sestrojování funkcí $V(x)$ v ostatních případech. Nechť $f(a) = f'(a) = 0$, $f'(x) < 0$ v $\Omega_a - (a)$, tedy $f(x)$ v $\Omega_a - (a)$ klesá. Předpokládejme, že existují právě dva body $x_1 \in (a - \sigma, a)$, $x_4 \in (a, a + \sigma)$ tak, že $f'(x_1) = f'(x_4) = -\delta$. Dále $f(x_2) = +\varepsilon$, $f(x_3) = -\varepsilon$ a nechť platí

$$x_1 < x_2 < a < x_3 < x_4\,.$$

 Pro $x \in (a - \sigma, x_1)$:

$$V'(x) = \operatorname{sgn} f(x_1) . \operatorname{sgn} f'(x_1) ,$$

$$V(x) = \operatorname{sgn} f(x_1) \cdot \operatorname{sgn} f'(x_1) . (x - x_1) + \frac{1}{\delta} \operatorname{sgn} f(x_2) . [f(x_1) - f(x_2)] + \frac{1}{2\varepsilon\delta} f^2(x_2) ;$$

pro $x \in [x_1, x_2)$

$$V'(x) = \frac{1}{\delta} f'(x) . \operatorname{sgn} f(x_2) ,$$

$$V(x) = \frac{1}{\delta} \operatorname{sgn} f(x_2) . [f(x) - f(x_2)] + \frac{1}{2\varepsilon\delta} f^2(x_2) ;$$

pro $x \in [x_2, x_3]$

$$V'(x) = \frac{1}{\varepsilon\delta} f'(x) . f(x) ,$$

$$V(x) = \frac{1}{2\varepsilon\delta} f^2(x) ;$$

pro $x \in (x_3, x_4]$

$$V'(x) = \frac{1}{\delta} f'(x) . \operatorname{sgn} f(x_3) ,$$

$$V(x) = \frac{1}{\delta} \operatorname{sgn} f(x_3) . [f(x) - f(x_3)] + \frac{1}{2\varepsilon\delta} f^2(x_3) ;$$

pro $x \in (x_4, a + \sigma)$

$$V'(x) = \operatorname{sgn} f(x_4) . \operatorname{sgn} f'(x_4) ,$$

$$V(x) = \operatorname{sgn} f(x_4) . \operatorname{sgn} f'(x_4) . (x - x_4) + \frac{1}{\delta} \operatorname{sgn} f(x_3) . [f(x_4) - f(x_3)] + \frac{1}{2\varepsilon\delta} f^2(x_3) .$$

Snadno dokážeme, že tímto způsobem zkonstruovaná funkce $V(x)$ je Ljapunovovou funkcí.

Evidentně platí: $V(a) = 0$, $V(x)$ je spojitá v Ω_a, $V'(x) = S_{1T}(f, \varepsilon)$. $S_{1T}(f', \delta)$ je spojitá v Ω_a a dále jednoduchým rozborem, podobným jako v předcházejících případech ukážeme, že $V(x) > 0$ v $\Omega_a - (a)$.

Stejným způsobem, tj. rozdělením Ω_a na intervaly, v nichž je $S_{1T}(f, \varepsilon) . S_{1T}(f', \delta)$ vyjádřena jediným analytickým výrazem, integrováním těchto výrazů a stanovením integračních konstant tak, aby $V(x)$ byla spojitá v Ω_a a aby platilo $V(a) = 0$, postupujeme také v ostatních případech. Věta 8 je dokázána.

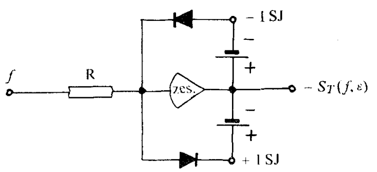
Určíme limity funkcí $V(x)$ v jednotlivých případech:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V(x) = \left[\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro (15)},$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}} V(x) = [\operatorname{sgn} f(x)]\left[\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right](x-a) \quad \text{pro (16)}.$$

Tyto funkce nemají spojitou derivaci, jinak však vyhovují ostatním podmínkám pro Ljapunovovy funkce v Ω_a. V ideální podobě jejich derivaci nelze na analogovém počítači realizovat.

Funkci $S_{1T}(f, \varepsilon)$ lze považovat za prvou aproximaci výstupní funkce diodového omezovače napětí pro vstupní veličinu f (zapojení je na obr. 2). Tuto jednotku pro



Obr. 2. Zapojení diodového omezovače napětí.

vytváření modelů diferenciálních rovnic (14), (15), (16) používáme v praxi téměř výhradně (použití diferenčních relé, vzhledem k jejich hysterezi a nezanedbatelné době překlopení vede obvykle k méně přesným výsledkům).

Pro číslo ε existuje při technické realizaci diodového omezovače určitá dolní mez, daná charakteristikou diody, frekvenčními vlastnostmi zesilovače, parazitními kapacitami a dalšími vlivy. U jednotky DON (diodový omezovač napětí) na počítači **AP3 M** je tato dolní mez obvykle menší než $2{,}5 \,.\, 10^{-4}$ strojové jednotky 100 V, tj. menší než 25 mV. Pro násobení funkcí $S_{1T}(f, \varepsilon)$ se nemusí použít násobičky, je možno použít diodového klíče [7] a dosáhnout přesnějších výsledků.

Funkce $S_{1T}(f, \varepsilon)$ nemá spojitou derivaci. Přesnější aproximaci charakteristiky diodového omezovače napětí dostaneme, položíme-li požadavek na spojitost derivace této aproximace. Obdržíme tak např. funkci:

(17)
$$S_{2T}(f, \varepsilon) = \operatorname{sgn} f \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{-1} \quad \text{a pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{1},$$
$$S_{2T}(f, \varepsilon) = -\frac{1}{2\varepsilon^3} f^3 + \frac{3}{2\varepsilon} f \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{0}.$$

Příslušná $A_{2T}(f, \varepsilon) = \int S_{2T}(f, \varepsilon)\,\mathrm{d}f + c$ je tvaru:

(18)
$$A_{2T}(f, \varepsilon) = |f| - \tfrac{3}{8}\varepsilon \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{-1}, \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{1},$$
$$A_{2T}(f, \varepsilon) = -\frac{1}{8\varepsilon^3} f^4 + \frac{3}{4\varepsilon} f^2 \quad \text{pro} \quad f \in I_{f,\varepsilon}^{0}.$$

 Funkce A_{2T} je spojitá, má spojitou 1. a 2. derivaci a platí

$$A_{2T}(0, \varepsilon) = 0 \quad \text{pro} \quad x = a\,,$$

$$A_{2T}(f, \varepsilon) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in \Omega_a - (a)\,;$$

je tedy Ljapunovovou funkcí.

Jestliže nahradíme funkce $S_{1T}(f, \varepsilon)$ resp. $S_{1T}(f, \delta)$ funkcemi $S_{2T}(f, \varepsilon)$ resp. $S_{2T}(f, \delta)$ v diferenciálních rovnicích (14), (15), (16), pak platnost věty 7 a 8 se nezmění. V důkazu budeme konstruovat příslušné funkce $V(x)$ podle stejných pravidel.

4. ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC (1)

O funkcích soustavy (1) budeme předpokládat:

1. $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ jsou reálné funkce reálných proměnných.

2. Existuje bod $A = [a_1, \ldots, a_n]$ a oblast Ω_A, $A \in \Omega_A$ v prostoru bodů $X = [x_1, \ldots, x_n]$ tak, že

a) $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, jsou spojité funkce i se svými prvními a druhými parciálními derivacemi podle všech proměnných v Ω_A,

b) $f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n$,

c) $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \quad X \in \Omega_A - (A)$,

d) Jakobián $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \quad \text{v} \quad \Omega_A - (A)$.

Věta 9. *Jestliže funkce $F_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, splňují všechny předpoklady, které jsme učinili o funkcích $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, pak k tomu, aby bod A byl asymptoticky stabilním klidovým bodem soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = F_i(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, \ldots, n \tag{19}$$

stačí, aby

$$A(F, F) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(- \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) F_i F_j > 0 \quad \textit{pro} \quad X \in \Omega_A - (A)\,.$$

Důkaz. Funkce

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} F_i^2$$

je podle předpokladů o F_i Ljapunovovou funkcí v Ω_A.

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} F_i F_j < 0$$

v $\Omega_A - (A)$ a $W(a_1, \ldots, a_n) = 0$; jsou tedy splněny předpoklady Ljapunovovy věty o asymptotické stabilitě.

Věta 10. *Budiž Δ_A oblast taková, že $\Delta_A \subset \Omega_A$, $A \in \bar{\Delta}_A$. Postačující podmínkou, aby bod A byl nestabilním bodem soustavy* (19) *je, aby*

$$B(F, F) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} F_i \,.\, F_j > 0 \quad v \quad \Delta_A - (A)\,.$$

Důkaz. Utvořme (na základě věty 2) v Δ_A funkci

$$U = \sum_{i=1}^{n} F_i^2\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} F_i F_j > 0 \quad \text{v} \quad \Delta_A - (A)\,.$$

Z věty o nestabilitě plyne tvrzení věty 10.

Věty 9 a 10 jsou obdobou vět 3 a 4 z 3. odstavce. Jsou příslušně složitější; kladou požadavky na pozitivní definitnost kvadratických forem $A(F, F)$ resp. $B(F, F)$, a tedy na pozitivní definitnost symetrických matic (s obecným členem $a_{ij} = a_{ji} = -\frac{1}{2}(\partial F_i/\partial x_j + \partial F_j/\partial x_i)$ resp. $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(\partial F_i/\partial x_j + \partial F_j/\partial x_i)$) příslušných těmto formám. K tomu je nutné a stačí, aby byly splněny Sylvestrovy podmínky, tj. aby všechny hlavní minory těchto matic byly kladné v $\Omega_A - (A)$ resp. $\Delta_A - (A)$ [10]. Obecně jsou tyto podmínky složité, ve většině případů neprůhledné a programátor analogového počítače je tedy nemůže snadno využít.

Věta 11 (metoda gradientu). *Nechť V je Ljapunovova funkce v Ω_A. Pak soustava diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{20}$$

má asymptoticky stabilní klidový bod A.

Důkaz. Podle předpokladu je V Ljapunovovou funkcí. Existuje tedy oblast Φ_A, $A \in \Phi_A$, $\Phi_A \subset \Omega_A$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0 \quad \text{v} \quad \Phi_A - (A)$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 < 0 \quad \text{v} \quad \Phi_A - (A)\,.$$

Protože bod A představuje relativní minimum funkce V, platí v něm $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = 0$.

Věta 12. *Každá ze soustav diferenciálních rovnic*

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} S_{1T}(f_j, \varepsilon_j) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{22}$$

má asymptoticky stabilní klidový bod A.

Důkaz. V prvním případě je příslušná Ljapunovova funkce $V = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f_j^2$, ve druhém případě $V = \sum_{j=1}^{n} A_{1T}(f_j, \varepsilon_j)$.

Touto větou jsme vyřešili problém vytyčený v úvodu i v případě n rovnic o n neznámých. Jestliže funkce f_i budou splňovat předpoklady, které jsme uvedli v úvodu odstavce v okolí každého kořene, pak všechny kořeny soustavy (1) budou asymptoticky stabilními klidovými body soustavy diferenciálních rovnic (21) i (22).

Mohou se však vyskytnout i jiné asymptoticky stabilní klidové body, které nejsou kořenem (1). Budou to body (tzv. „nepravé kořeny"), v nichž platí současně:

$$f_i(b_1, \ldots, b_n) \neq 0 \quad \text{alespoň pro jediné } i, \quad 1 \leqq i \leqq n,$$

$$\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{X=B} = 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Obdobné tvrzení platí i pro rovnice (11), (14), (15) a (16).

Při použití metody gradientu můžeme obecně říci, že nepravý kořen se vyskytne v bodě relativního minima funkce V, jehož hodnota není rovna nule.

Hledáme-li kořeny podle věty 6, 7, 8, resp. 12, je model funkce $f(x)$, resp. funkcí $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ součástí počítací sítě. Po nalezení asymptoticky stabilního klidového bodu (tj. po „ustálení" hodnot $x_i(t)$) je tedy nutné se přesvědčit, zda jde o nulový bod funkcí f_i (prostým měřením, popřip. některou jinou jednoduchou registrační metodou); je to závěrečný krok při určení kořenu soustavy (1) na analogovém počítači.

5. ZÁVĚR

V článku jsme uvedli některé náhradní systémy diferenciálních rovnic pro řešení soustavy (1). Možnost řešit takový systém na analogovém počítači určitého typu záleží na jeho vybavení potřebnými počítacími jednotkami. Přesnost řešení je pak do značné míry závislá na tom, jak přesně můžeme realizovat pravé strany jednotlivých diferenciálních rovnic.

Z obou těchto hledisek je výhodné použití náhradních rovnic ve tvaru (14), (15), (16), případně (22).

Tak např. v Ústavu výpočtové techniky ČSAV a ČVUT jsme na analogovém počítači AP3M řešili úlohu: Nalézt kořeny dané soustavy tří kvadratických mnohočlenů pro tři neznámé

$$a_{i1}x^2 + a_{i2}y^2 + a_{i3}z^2 + b_{i1}xy + b_{i2}xz + b_{i3}yz + c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z + d_i = 0\,,$$
$$i = 1, 2, 3$$

v zadané oblasti (úloha byla řešena na základě požadavků ÚTIA ČSAV). Náhradní soustava byla volena ve tvaru (22) (parciální derivace jsme určili výpočtem). Pro součiny $S_{1T}(f_j, \varepsilon_j)$ s jednotlivými parciálními derivacemi jsme použili diodové klíče, pro realizaci funkcí f_i servonásobičky. Uvnitř krychle $x_N = \pm 1$, $y_N = \pm 1$, $z_N = \pm 1$ (x_N, y_N, z_N jsou analogové veličiny proměnných x, y, z, normované pro použití na počítači) jsme nalezli jediný kořen; všechny vyšetřované body krychle (včetně vrcholů) ležely ve spádové oblasti tohoto kořene. Hodnoty funkcí f_i se v klidovém bodě, měřeny na počítači, lišily od nuly v mezích ± 50 mV (tj. $5 \,.\, 10^{-4}$ strojové jednotky (SJ)). Dále byla provedena numerická kontrola dosazením nalezených hodnot souřadnic klidového bodu do funkcí f_i; maximální odchylka byla menší než $2 \,.\, 10^{-3}$ SJ (vyjádřeno v analogových veličinách). Tedy přesnost při této úloze byla srovnatelná s přesností dosahovanou na počítači AP3M při řešení jiných typů úloh.

Závěrem poznamenejme, že existují i jiné metody pro řešení soustav algebraických a transcendentních rovnic na analogovém počítači. Společným rysem většiny metod je skutečnost, že otázka nalezení kořene soustavy (1) se převede na vyhledání asymptoticky stabilního klidového bodu náhradního systému diferenciálních rovnic, který je nulovým minimem příslušné funkce V. Toho se mimo spojité gradientní metody, jimiž se zabývá tento článek, může dosáhnout kteroukoliv jinou metodou pro vyhledání minima funkce V, např. cyklickou nebo náhodnou diskretní optimalizací (viz [5], [8], [9]). Tyto metody jsou výhodnější v těch případech, kdy funkce f lze na analogovém počítači snadno realizovat, zatímco vytvoření parciálních derivací (např. pro jejich nevhodný průběh nebo složité analytické vyjádření) působí potíže.

(Došlo dne 7. října 1966.)

LITERATURA

[1] Эльсгольц Л. Э.: Качественные методы в математическом анализе. Москва 1955.

[2] Малкин И. Г.: Теория устойчивости движения. Москва 1962.

[3] Гаврилов Н. И.: Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва 1962.

[4] Рыбашов М. В.: Решения на модели методом градиента алгебраических и трансцендентных уравнений. Автоматика и телемеханика *XXII* (1961), 1, 77—88.

[5] Рыбашов М. В.: Отыскание корней систем конечных уравнений на электронной модели с использованием дифференциальных уравнений с переменной структурой. Автоматика и телемеханика *XXII* (1961), 12, 1638—1648.

[6] Borský Vl., Matyáš J.: Technika použití elektronických analogových počítačů. SNTL, Praha 1963.

[7] Moderní metody analogového počítání a programování. Výzkumná zpráva 18 LACH 501, VVZ Opočínek 1962.

[8] Moderní metody analogového počítání a programování. Výzkumná zpráva 18 LACH 502, ÚVR Opočínek 1963.

[9] Matyáš J.: Metody vyšetřování spojitých systémů a jejich optimální regulace. SNTL, Praha 1963.

[10] Gelfand I. M.: Lineární algebra. NČSAV, Praha 1953.

Solution of Algebraic and Transcendental Equations on Analogue Computer

JOSEF SOLDÁN

One of the possible ways for finding out the real roots of the systems of algebraic and transcendental equations on the analogue computer is the solution of this problem by means of the so called "spare" system of differential equations. On the basis of the Ljapunov theory of stability, the paper points to several conditions on fulfilling of which every root of the system of algebraic and transcendental equations being solved is an asymptotically stable equilibrium point of the respective spare system of differential equations. For the case of one equation as well as for the system of equations, the forms of these spare systems and of the Ljapunov function as well are derived by means of the gradient method, the special character of the realisation of same on the analogue computer is taken into consideration above all.

RNDr. Josef Soldán, Ústav výpočtové techniky ČSAV a ČVUT, Horská 3, Praha 2.