KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 3/1967

Efektívnejšie využitie metódy dynamického programovania v niektorých nelineárnych časovo-optimálnych riadených sústavách

JÁN ULIČNÝ

Autor v práci dokazuje, že pri výpočte členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ ($N = 0, 1, 2, \ldots, M$) určovaných funkcionálnými rovnicami metódy dynamického programovania (2.6) a za predpokladu, že bereme do úvahy niektoré typy nelineárnych časovo-optimálnych riadených sústav, môžeme ušetriť polovicu objemu pamäti číslicového počítača a naviac, že dĺžka doby realizácie výpočtu optimálnej funkcie riadenia sa pri tom skráti na polovicu.

1. ÚVOD

S úlohou riadiť proces môžeme sa dnes stretnúť v rôznych oblastiach hospodárskej, technickej, chemickej a dokonca i spoločenskej praxe. Úlohy riadenia procesov v spomenutých oblastiach majú niektoré spoločné črty. Každý riadený proces môže byť opísaný nejakou rovnicou, alebo systémom rovníc, ktoré z matematického hľadiska charakterizujú riadenú sústavu a v nej prebiehajúci riadený proces. Procesy prebiehajúce v riadenej sústave musia obyčajne vyhovovať určitým podmienkam, ktoré vyjadrujú kvalitu toho-ktorého riadeného procesu. Býva zvykom nazývať tieto podmienky kritériom optimálnosti riadeného procesu. Potom z hľadiska kritéria optimálnosti je našou úlohou nájsť takú stratégiu, alebo riadiacu funkciu, ktorá v priebehu riadeného procesu dáva extrém určitému zvolenému funkcionálu reprezentujúcemu kritérium optimálnosti.

Jednou z metód výpočtu optimálnej riadiacej funkcie je aj metóda dynamického programovania, ktorá v podstate využíva Bellmanom sformulovaného tzv. princípu optimálnosti [1], [2], [3], [4], [7]. Metódy dynamického programovania sa tu využíva ako metódy početnej, ktorú možno zahrnúť do tzv. metód neklasického variačného počtu. Za pomoci princípu optimálnosti dajú sa zostaviť pre konkrétny riadený proces určité funkcionálne rovnice metódy dynamického programovania na základe ktorých počítame členy určitej funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$), kde $\mathbf{x}$ je n-rozmerný vektor n-rozmerného fázového priestoru X_n. Súčasne s členmi postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) počíta sa aj optimálna riadiaca funkcia $u_N(x)$, ktorá minimalizuje na každej etape $N = 0, 1, 2, \ldots$, funkcionál reprezentujúci kritérium optimálnosti v bodoch $x \in X_n$ [2], [3], [4], [5]. Výpočet členov postupnosti $\{D_N[x]\}$ a funkcií $u_N(x)$, $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ sa obyčajne prevádza na číslicových počítačoch. Je to možné z toho dôvodu, že celý výpočet sa dá previesť na jednotlivé etapy $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ na ktorých sa konkrétne prevedenie výpočtu člena postupnosti $\{D_N[x]\}$ $(N = 0, 1, 2, ..)$ v konkrétnom bode $x \in X_n$ prevádza iteračným spôsobom umožňujúcim vhodné zaprogramovanie na číslicovom počítači. V tejto práci sa nemienime zaoberať spôsobmi a metodikou prevádzania výpočtu funkcií $D_N[x]$ a $u_N(x)$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ na číslicovom počítači. Metóda výpočtu týchto funkcií je podrobne opísaná v literatúre [2], [3], [5]. V tejto práci nám pôjde viac o také problémy spojené s použitím metódy dynamického programovania v riadených, alebo v širšom slova zmysle v rozhodovacích procesoch, ako sú napr.:

a) Zníženie nároku na veľkosť objemu pamäti číslicového počítača pri výpočte členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[x]\}(N = 0, 1, 2, \ldots)$

b) Skrátenie dĺžky doby realizácie výpočtu optimálnej riadiacej funkcie, alebo optimálnej stratégie na číslicovom počítači.

Tieto otázky sú totiž obyčajne rozhodujúce či metódu dynamického programovania môžeme k rozriešeniu danej úlohy použiť, alebo nie. Je známe, že metóda dynamického programovania si kladie veľké nároky na veľkosť objemu pamäti číslicového počítača. Druhou podmienkou, ktorá kladie ohraničenie na použiteľnosť metódy dynamického programovania je dĺžka doby výpočtu optimálnej riadiacej funkcie na číslicovom počítači. Riadené sústavy vyšších rádov sú za daného stavu číslicovej techniky buď neriešiteľné touto metódou, alebo výpočet optimálnej riadiacej funkcie týchto sústav je veľmi neefektívny.

Z tohoto hľadiska je veľmi potrebné zaoberať sa otázkami zníženia spomenutých nárokov na číslicový počítač kladených sformulovanou úlohou riešenou za pomocí metódy dynamického programovania. Uveďme aspoň niektoré spôsoby, ktoré umožňujú zníženie niektorých zo spomenutých nárokov na číslicový počítač:

1. zavedenie Lagrangeových multiplikátorov;
2. polynomálna aproximácia;
3. metóda postupnej minimalizácie funkcií $D_N[x]$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$.

Polynomálnou aproximáciou napríklad znížime nároky na veľkosť objemu pamäti počítača, ale naopak dĺžku doby realizácie výpočtu optimálnej riadiacej funkcie na číslicovom počítači predĺžime. Z toho vyplýva, že zníženie objemu pamäti ide na úkor dĺžky doby výpočtu [3]. Metóda postupnej minimalizácie funkcií $D_N[x]$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ nám jedine skráti dĺžku doby realizácie výpočtu optimálnej riadiacej funkcie [5]. Zavádzaním Lagrangeových multiplikátorov v niektorých prípadoch je možné znížiť dimenziu problému dynamického programovania [2]. V práci [6] bolo poukázané na to, akým spôsobom je možné znížiť nároky na veľkosť objemu pamäti číslicového počítača aj na skrátenie dĺžky doby realizácie výpočtu optimálnej riadiacej funkcie za predpokladu, že uvažujeme procesy prebiehajúce v lineárnych sústavách s minimálnou dobou riadenia, alebo lepšie povedané v časovo-optimálnych sústavách.

V tejto práci si dokážeme, že aj pri niektorých nelineárnych typoch časovo-optimálnych riadených sústav, ktoré sa z hľadiska aplikácie často vyskytujú, môžeme previesť určité zníženie spomínaných nárokov na číslicový počítač. Nakoniec treba podotknúť, že otázkami existencie a jednoznačnosti optimálnej riadiacej funkcie sa v tejto práci zaoberať nebudeme. Budeme predpokladať, že optimálna riadenia funkcia, ktorú si v nasledujúcej časti definujeme existuje a je jediná. Tieto otázky sú samozrejme zo známych príčin veľmi dôležité a zasluhujú si väčšej pozornosti i pri numerických metódach početných. My všakuž z vyššie uvedených dôvodov budeme skúmať jedine stránku efektívnejšieho využitia metódy dynamického programovania na ktorú sa zameráme v ďalších dvoch nasledujúcich častiach.

2. ČASOVO-OPTIMÁLNE RIADENÉ SÚSTAVY

Budeme predpokladať, že riadená sústava je opísaná diferenciálnym systémom v tvare

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{2.1}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) . \tag{2.2}$$

V rovnici (2.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ je n-rozmerný vektor popisujúci stav sústavy v priestore X_n, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ je r-rozmerný vektor z dovolenej oblasti riadenia $(0 < r \leqq n)$ a $\mathbf{f}$ je n-rozmerný vektor o zložkách $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$. Skutočnosť, že vektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, ktorý nazývame riadením sústavy opísanej systémom (2.1), prináleži do dovolenej oblasti riadenia, budeme zapisovať nasledovne

$$\mathbf{u} \in L(\mathbf{u}) . \tag{2.3}$$

Ďalej budeme hovoriť, že prípustné riadenie z dovolenej oblasti riadenia $L(\mathbf{u})$ definované na intervale $0 \leqq t \leqq T$ prevádza zastupujúci bod $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ po fázovej trajektórii riadenej sústavy z polohy $\mathbf{x}(0)$ do počiatku súradnicového systému priestoru X_n ak odpovedajúce riešenie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (2.1) vyhovujúce počiatočnej podmienke $\mathbf{x}(0)$ je definované na celom intervale $0 \leqq t \leqq T$ a v čase $t = T$ prechádza bodom $\mathbf{x}(T) = 0$, tj. počiatkom súradnicového systému priestoru X_n. O dovolenej oblasti $L(\mathbf{u})$ predpokladajme, že sa dá vyjádriť v takomto tvare

$$|u_j| \leqq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) . \tag{2.4}$$

Časovo-optimálnu riadenú sústavu definujeme potom ako sústavu v ktorej optimálna riadiaca funkcia $\mathbf{u}^*(t)$ prevádza zastupujúci bod $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ po fázovej trajektórii z polohy $\mathbf{x}(0)$ do počiatku súradnicového systému priestoru X_n za najkratšiu možnú dobu. V terminológii vhodnej z hľadiska použitia metódy dynamického programovania si vyššie uvedený problém môžeme nasledovne definovať:

Definícia 1. Nech optimálna riadiaca funkcia $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4) minimalizuje na konci riadeného procesu kvadrát vzdialenosti zastupujúceho bodu $\mathbf{x}$ od počiatku súradnicového systému priestoru X_n a ďalej nech zastupujúci bod $\mathbf{x}$ pohybujúci sa z predom zvoleného počiatočného stavu $\mathbf{x}(0)$ po fázovej trajektórii riadenej sústavy potrebuje k dosiahnutiu minimálnej hodnoty výrazu

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i(T))^2 \tag{2.5}$$

najkratšiu možnú dobu. Potom riadená sústava je časovo-optimálnou riadenou sústavou.

Písmenom n vo výraze (2.5) je označená rozmernosť priestoru X_n, alebo (čo je samozrejmé) rád riadenej sústavy. Na základe definície 1 a princípu optimálnosti môžeme odvodiť nasledovný tvar funkcionálnych rovníc metódy dynamického programovania pre výpočet členov postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ a funkcií $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ [2], [4], [5]:

$$D_0[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leq 1} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \,, \tag{2.6a}$$

$$D_N[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leq 1} D_{N-1}[\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \quad (N = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, r) \,. \tag{2.6b}$$

Argumentom funkcie D_{N-1} v rovnici (2.6b) je pravá strana nasledovného výrazu

$$\mathbf{x}(t + \Delta) = \mathbf{x}(t) + \Delta\, \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \,, \tag{2.7}$$

čo je v podstate diferenčný tvar systému (2.1) popisujúceho riadenú sústavu. Znakom Δ v rovnici (2.7) je označený malý prírastok času [1], [2], [4], [5].

V procese minimalizácie funkcionálnych rovníc (2.6) určujeme členy funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ až do tej doby, kedy pre určité $N = M$ platí výraz

$$D_M[\mathbf{x}(0)] \leq \beta \,, \tag{2.8}$$

kde β je dostatočne malé kladné číslo volené z hľadiska presnosti výpočtu [5]. Bližšie s problematikou výpočtu členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ a funkcií $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$, $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ sa môže čitateľ oboznámiť v citovanej literatúre, kde sú prevedené aj niektoré konkrétne výpočty optimálnej riadiacej funkcie $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ [4], [5].

3. NIEKTORÉ TYPY NELINEÁRNYCH ČASOVO-OPTIMÁLNYCH RIADENÝCH SÚSTAV

Množinu všetkých bodov $\mathbf{x} \in X_n$ ktorých súradnice splňujú nerovnosti

$$-c_i \leqq x_i \leqq c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.1}$$

kde c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sú kladné čísla, budeme nazývať uzatvorenou množinou priestoru X_n a budeme ju označovať

$$S_n = \langle -c_1, c_1 \rangle \times \langle -c_2, c_2 \rangle \times \ldots \times \langle -c_n, c_n \rangle . \tag{3.2}$$

Predpokladajme, že z nekonečnej uzatvorenej množiny S_n je vybraná konečná podmnožina prvkov $\mathbf{x}$, ktorú tvoria deliace body určitého delenia uzatvorených intervalov (3.1). Ak v každom z intervalov (3.1) je týchto deliacich bodov (včetne hraničných) napr. 10^2 potom táto konečná podmnožina prvkov, ktorú budeme označovať ako $J_n \subset S_n$ bude mať celkový počet prvkov rovný $s_n = 10^{2n}$. Vieme [2], [4], [5], [7], že v metóde dynamického programovania musíme v každom takomto bode $\mathbf{x} \in J_n$ počítať funkcie $D_N[\mathbf{x}]$, $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ podľa rekurentných vzťahov (2.6) pre každé $N = 0, 1, 2, \ldots, M$. Nekonečnú uzatvorenú množinu bodov S_n môžeme rozdeliť na dve nekonečné uzatvorené množiny S_n^- a S_n^+ podľa toho či zo všetkých bodov $\mathbf{x} \in S_n$ patrí napr. do S_n^- len prvok $-\mathbf{x}$ a do S_n^+ len prvok $\mathbf{x}$ opačný k prvku $-\mathbf{x}$. Potom môžeme písať: $-\mathbf{x} \in S_n^-$, $\mathbf{x} \in S_n^+$ pričom $S_n^- \subset S_n$ aj $S_n^+ \subset S_n$, tj. $-\mathbf{x} \in S_n$ aj $\mathbf{x} \in S_n$. V dôsledku rozdelenia nekonečnej uzatvorenej množiny S_n na dve nekonečné uzatvorené množiny S_n^- a S_n^+ delí sa aj konečná podmnožina prvkov $J_n \subset S_n$ na dve konečné podmnožiny J_n^- a J_n^+ pričom platí: $J_n^- \subset S_n^-$ a $J_n^+ \subset S_n^+$. Potom celkový počet prvkov v konečnej podmnožine J_n^- alebo J_n^+ bude rovný: $s_n^- = s_n^+ = \frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2} \cdot 10^{2n}$.

Podstatou tejto práce bude dokázať, že pri výpočte členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$, $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ určovaných funkcionálnymi rovnicami metódy dynamického programovania (2.6) nemusíme uvažovať celú množinu S_n bodov $\mathbf{x}$, tj. všetky možné stavy $\mathbf{x} \in S_n$ riadenej sústavy, ktorých môže pri prechode z počiatočného stavu $\mathbf{x}(0) \in S_N$ do počiatku súradnicového systému priestoru X_n riadená sústava nadobúdať, ale stačí uvažovať len jednu z polovíc S_n^-, alebo S_n^+ množiny S_n. Tým samozrejme znížime nárok na objem pamäti číslicového počítača na polovicu a doba výpočtu optimálnej riadiacej funkcie sa skráti tiež na polovicu oproti pôvodnej, keby sme funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ počítali na celej množine $S_n \subset X_n$ (lepšie povedané na konečnej podmnožine J_n množiny S_n).

V ďalšom našom výklade budeme predpokladať, že systém (2.1) popisujúci nelineárnu riadenú sústavu má pravú stranu, ktorá vyhovuje nasledujúcej podmienke

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}) \tag{3.3}$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4).

Treba poznamenať, že v (3.3) ide o skrátený vektorový zápis tej skutočnosti, že každá zložka vektorovej funkcie $\mathbf{f} = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ vyhovuje tejto podmienke. Podobne aj v ďalšom výklade, ak pre všetky zložky $(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)$ nejakej vektorovej funkcie $\boldsymbol{\varphi}$ platí určitá podmienka, budeme písať, že táto podmienka platí pre funkciu $\boldsymbol{\varphi}$. Dokážme si nasledovnú vetu:

Veta 1. *Nech pre vektorovú funkciu $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ platí podmienka (3.3) pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4). Potom pre funkcionálnu postupnosť $\{\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}$ (ktorej členy sú vektory o zložkách: $F_N^1, F_N^2, \ldots$ $\ldots, F_N^n$), danú rekurentným vzťahom*

$$(3.4a) \qquad \mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}\,,$$

$$(3.4b) \qquad \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{F}_{N-1}(\xi, \mathbf{u}_{N-1}) \quad (N = 1, 2, \ldots)\,,$$

kde

$$(3.5) \qquad \xi = \mathbf{x} + \Delta\,.\,\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,,$$

platí:

$$(3.6) \qquad \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\mathbf{F}_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4).

Dôkaz. Najprv si objasníme akým spôsobom vytvárame členy funkcionálnej postupnosti $\{\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ podľa rekurentného vzťahu (3.4b). Predpokladajme, že sme práve vytvorili člen $\mathbf{F}_K(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Nasledujúci člen $(K + 1)$-vý dostaneme tak, že do vzťahu $\mathbf{F}_K(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ dosadíme za argument $\mathbf{x}$ výraz (3.5) a za premennú $\mathbf{u}$ výraz $\mathbf{u}_K$ s indexom rovným indexu člena postupnosti $\mathbf{F}_K$. O funkcii $\mathbf{u}_K$ zatiaľ predpokladajme len toľko, že je z dovolenej oblasti riadenia (2.4). Potom, keď zoberieme do úvahy aj člen (3.4a) budú prvé tri členy funkcionálnej postupnosti $\{\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ nasledovné:

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}\,,$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{F}_0(\xi, \mathbf{u}_0) = \mathbf{x} + \Delta\,\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,,$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{F}_1(\xi, \mathbf{u}_1) = \xi + \Delta\,\mathbf{f}(\xi, \mathbf{u}_1) = \mathbf{x} + \Delta\,\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \Delta\,\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\,\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u}_1),$$

$$\vdots$$

Vráťme sa teraz k dôkazu. Pre $N = 0$, tj. pre výraz (3.4a) je dôkaz trivialny. Pre ďalšie členy prevedieme dôkaz s pomocou indukcie tak, že z platnosti výrazu (3.6) pre $N = 1$ a za predpokladu, že tento vzťah platí aj pre prirodzené číslo $N = K$ dokážeme, že platí aj pre prirodzené číslo $(K + 1)$. Pre $N = 1$ máme podľa (3.4b) a (3.5)

$$(3.7) \qquad \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x} + \Delta\,\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -[-\mathbf{x} - \Delta\,\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})] = -[-\mathbf{x} + \Delta\,\mathbf{f}(-\mathbf{x}, -\mathbf{u})] = -\mathbf{F}_1(-\mathbf{x}, -\mathbf{u})$$

 pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}$ z dovolenej oblasti (2.4). (Pri dôkaze (3.7) sme použili vlastnosti (3.3)). Predpokladajme teraz, že (3.6) platí aj pre prirodzené číslo $N = K$, tj. že platí

$$\mathbf{F}_K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\mathbf{F}_K(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}) \tag{3.8}$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4). Potom podľa (3.4b), (3.5) a (3.8) platí

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{K+1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{F}_K(\mathbf{x} + \Delta\, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u}_K) = -\mathbf{F}_K(-\mathbf{x} + \Delta\, \mathbf{f}(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}), -\mathbf{u}_K) = \\ &= -\mathbf{F}_{K+1}(-\mathbf{x}, -\mathbf{u})\end{aligned} \tag{3.9}$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4), čím je veta dokázaná.

Vzhľadom na to, že pri minimalizácii funkcionálnych rovníc (2.6) riadiaca funkcia $\mathbf{u}$ na každej etape ($N = 0, 1, 2, \ldots$) závisí od polohy bodu $\mathbf{x} \in S_n$, môžeme písať, že $\mathbf{u}$ je funkciou $\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Vyplýva to aj zo skutočnosti, že pohyb zastupujúceho bodu $\mathbf{x}$ po fázovej trajektórii riadenej sústavy opísanej systémom (2.1) je ovplyvňovaný riadiacou funkciou a naopak, poloha zastupujúceho bodu $\mathbf{x}$ ovplyvňuje rozhodnutie, aká má byť funkcia $\mathbf{u}$, ak má byť fázová trajektória optimálna. Potom výraz (3.6) môžeme písať nasledovne

$$\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = -\mathbf{F}_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}(-\mathbf{x})) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.10}$$

Vyslovme si ešte nasledovnú vetu:

Veta 2. *Nech pre ľubovoľné pevne zvolené* $\mathbf{x} \in S_n$ *a pre každé* $\mathbf{u}$ *z dovolenej oblasti riadenia* (2.4) *platí výraz*

$$-\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{F}_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}(-\mathbf{x})) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

Potom pre riadiacu funkciu $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ *z dovolenej oblasti riadenia* (2.4) *platí*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(-\mathbf{x}). \tag{3.12}$$

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z dôkazu predchádzajúcej vety. Totiž ak s bodom $\mathbf{x}$ patrí do množiny S_n aj bod k nemu opačný, tj. $-\mathbf{x}$, potom ak má byť predpoklad vety 2 správny, musí sa pri zmene bodu $\mathbf{x}$ na bod k nemu opačný $-\mathbf{x}$ zmeniť aj funkcia $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ na funkciu $-\mathbf{u}(-\mathbf{x})$. Vyplýva to z toho, že funkcia $\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ je nepárnou funkciou svojích argumentov čo sme vo vete 1 dokázali.

Vytvorme si ďalej nasledovnú funkcionálnu postupnosť

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} [F_0^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2,$$

$$G_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} [F_1^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 ,$$

$$G_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} [F_2^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 ,$$

$$\vdots$$

Obecne pre N-tý člen postupnosti $\{G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ bude platiť vzťah

$$(3.13) \qquad G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} [F_N^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 \quad (N = 0, 1, 2, \ldots) ,$$

kde $F_N^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ sú zložky vektorovej funkcie $\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ určovanej rekurentným vzťahom (3.4). Dokážme si teraz nasledovnú vetu:

Veta 3. *Predpokladajme, že vzťahy* (3.11) *a* (3.12) *platia pre ľubovoľné pevne zvolené* $\mathbf{x} \in S_n$ *a pre každé* $\mathbf{u}$ *z dovolenej oblasti riadenia* (2.4). *Nech ďalej funkcia* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ *je práve tou funkciou, ktorá dáva na N-tej etape minimum výrazu* $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ *a pre ktorú platí podmienka* (2.4). *Potom platia aj vzťahy*

$$(3.14) \qquad \min_{|u_j| \leq 1} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \min_{|u_j| \leq 1} G_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}(-\mathbf{x}))$$

$$(N = 0, 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots, r) ,$$

$$(3.15) \qquad \mathbf{u}_N(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}_N(-\mathbf{x}) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$.

Dôkaz. Z matematickej analýzy je známe, že súčin dvoch nepárnych funkcií je funkcia párna. Potom aj

$$[F_N^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 = F_N^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \,.\, F_N^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) , \quad (N = 0, 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots, n)$$

je párnou funkciou svojích argumentov. Ďalej platí, že súčet párnych funkcií je tiež funkcia párna, tz., že funkcia $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ daná výrazom (3.13) pre každé $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ je párnou funkcou svojích argumentov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Z toho vyplýva, že ak platia výrazy (3.11) a (3.12) platí potom aj výraz

$$(3.16) \qquad G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = G_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}(-\mathbf{x})) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4). Potom ale tento výraz platí aj pre niektorú funkciu $\mathbf{u}_N(x)$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4), ktorá dáva minimum výrazu (3.16), tj. platí potom aj vzťah (3.14). Ďalej ak už platí (3.14), t.j.

$$(3.17) \qquad G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N(\mathbf{x})) = G_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}_N(-\mathbf{x})) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

musí platiť aj vzťah (3.15) pretože podľa vety 2 platí vzťah (3.11) a (3.12) pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$ a pre každé $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ z dovolenej oblasti riadenia (2.4) čiže aj pre funkciu $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$. Tým je veta dokázaná.

Tvrdenie predchádzajúcej vety použijeme pri dôkaze nasledujúcej vety.

Veta 4. *Nech každý člen funkcionálnej postupnosti* $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ *je určený rekurentným vzťahom* (2.6). *Ďalej nech sa splňujú predpoklady vety* 3 *a nech súčasne platia vzťahy* (3.14) *a* (3.15). *Potom pre ľubovoľné pevne zvolené* $\mathbf{x} \in S_n$ *platí aj nasledovný výraz*

$$D_N[\mathbf{x}] = D_N[-\mathbf{x}] \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.18}$$

Dôkaz. Členy funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, ako je to vidieť z rovníc (2.6), môžeme vytvárať aj tak, že do predchádzajúceho člena $D_K[\mathbf{x}]$ dosadíme za argument $\mathbf{x}$ funkciu $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$, potom prevedieme minimalizáciu podľa premennej $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ vyhovujúcej vzťahu (2.4) čím dostávame ďalší člen postupnosti $D_{K+1}[\mathbf{x}]$. Pre ďalšie členy funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N \geqq K + 1, K + 2, \ldots)$ by sme túto operáciu zopakovali, až by sme pre niektoré $(K = 1, 2, \ldots, N, \ldots)$ a $N = M$ splnili podmienku (2.8). Podľa tohto postupu pri určovaní funkcií $D_N[\mathbf{x}]$ $(N = 1, 2, \ldots, M)$ platia (za predpokladu, že vychádzame z výrazu (3.4a)) nasledovné vzťahy

$$D_0[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = \min_{|u_j| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_0^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 = \min_{|u_j| \leqq 1} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) =$$
$$= G_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

$$D_1[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leqq 1} D_0[\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))] = \min_{|u_j| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_0^i(\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})), \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))]^2 =$$
$$= \min_{|u_j| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_1^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})]^2 = \min_{|u_j| \leqq 1} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) =$$
$$= G_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1(\mathbf{x}))\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

$$D_2[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leqq 1} D_1[\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))] = \min_{|u_j| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_1^i(\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})), \mathbf{u}_1(\mathbf{x})]^2 =$$
$$= \min_{|u_j| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_2^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 = \min_{|u_j| \leqq 1} G_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) =$$
$$= G_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2(\mathbf{x}))\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

$$\vdots$$

Obecne pre N-tý člen postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 1, 2, \ldots, M)$ bude platiť

$$D_N[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leq 1} D_{N-1}[\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))] = \min_{|u_j| \leq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_{N-1}^i(\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})), \mathbf{u}_{N-1}(\mathbf{x}))]^2 =$$

$$= \min_{|u_j| \leq 1} \sum_{i=1}^{n} [F_N^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 = \min_{|u_j| \leq 1} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) =$$

$$= G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N(\mathbf{x})) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$.

Z toho vyplýva, že pre $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ platí

$$D_N[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leq 1} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Potom podľa predpokladu dokazovanej vety platí

$$D_N[\mathbf{x}] = \min_{|u_j| \leq 1} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \min_{|u_j| \leq 1} G_N(-\mathbf{x}, -\mathbf{u}(-\mathbf{x})) = D_N[-\mathbf{x}]$$

$$(N = 0, 1, 2, \ldots, M;\ j = 1, 2, \ldots, r)$$

a podľa vety 3 platí súčasne aj vzťah

$$\mathbf{u}_N(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}_N(-\mathbf{x})$$

na každej etape $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ a pre ľubovoľné pevne zvolené $\mathbf{x} \in S_n$, pričom samozrejme funkcia $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ vyhovuje podmienke (2.4). Tým je veta dokázaná.

Na základe vety 4 môžeme teraz poukázať na to podstatné čo je z hľadiska zjednodušeného výpočtu členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ nutné. Výsledok zhrnieme do nasledujúcej vety:

Veta 5. *Nech pre pravú stranu diferenciálneho systému* (2.1) *popisujúceho riadenú sústavu platí podmienka* (3.3). *Ďalej nech členy funkcionálnej postupnosti* $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ *sa určujú za pomoci rekurentných vzťahov* (2.6) *a funkcie* $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ *nech sú také funkcie z dovolenej oblasti riadenia* (2.4), *ktoré minimalizujú pravé strany týchto rekurentných vzťahov. Nech konečne do uzatvorenej množiny* $S_n \subset X_n$ *patrí s bodom* $-\mathbf{x}$ *aj bod k nemu opačný, tj. bod* $\mathbf{x}$. *Potom podľa vety* 4 *stačí pri realizácii výpočtu členov spomínanej funkcionálnej postupnosti uvažovať len polovicu množiny* S_n *a to bud* S_n^-, *alebo* S_n^+ *pričom pre funkciu* $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ *platí vzťah* (3.15).

Vetu nebudeme dokazovať, pretože jej dokaz vyplýva z dokazu vety 4.

Poznámka. Pri realizácii výpočtu členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ uvažujeme tú polovicu množiny S_n, v ktorej sa nachádza bod $\mathbf{x}(0)$, tj. počiatočný stav riadenej sústavy.

4. ZÁVER

Metódy dynamického programovania sa používa ako výpočtovej metódy v optimálnych riadených sústavách, ktoré môžeme zahrnúť do širšej triedy tzv. rozhodovacích procesov. V rozhodovacích procesoch je nutné zvoliť tú, alebo inú funkciu z určitej dovolenej oblasti, ktorá z určitého hľadiska najlepšie vyhovuje predpísaným požiadavkám na rozhodovací proces. Tak je tomu aj u časovo-optimálnych sústav, v ktorých musíme voliť v každom časovom okamžiku takú riadiacu funkciu, ktorá by zastupujúci bod previedla po fázovej trajektórii z počiatočného bodu do počiatku súradnicového systému uvažovaného priestoru. Metóda dynamického programovania, ako jedna z metód neklasického variačného počtu má mnoho výhod, ale zároveň aj nevýhod, ktoré sťažujú, alebo vôbec neumožňujú previesť výpočet optimálnej riadiacej funkcie. Takouto najväčšou nevýhodou metódy dynamického programovania je, že pre výpočet členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ na číslicovom počítači musí mať počítač veľký objem pamäti niekedy presahujúce možnosti dnešnej číslicovej techniky. Druhou nevýhodou je pomalá konvergencia členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$, čo má za následok niekedy až príliš dlhotrvajúci neefektívny výpočet funkcií $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$.

V tejto práci sme dokázali, že pri výpočte členov funkcionálnej postupnosti za predpokladu, že uvažujeme časovo-optimálne sústavy, na ktoré je naložená podmienka (3.3), môžeme ušetriť polovicu objemu pamäti číslicového počítača a naviac skrátiť dĺžku doby realizácie výpočtu optimálnej riadiacej funkcie na polovicu. Túto skutočnosť môžeme zapísať nasledovne

$$D_N[-\mathbf{x}] = D_N[\mathbf{x}] \quad (N = 0, 1, 2, \ldots, M), \tag{4.1}$$

pričom platí, že

$$\mathbf{u}_N(-\mathbf{x}) = -\mathbf{u}_N(\mathbf{x}) \quad (N = 0, 1, 2, \ldots, M). \tag{4.2}$$

Z uvedeného vidíme, že ak do nekonečnej uzatvorenej množiny $S_n \subset X_n$ patrí s bodom $-\mathbf{x}$ aj bod k nemu opačný, tj. bod $\mathbf{x}$ a ak z neznalosti priebehu optimálnej trajektórie (tú pred výpočtom nepoznáme) sme boli nútení počítať členy funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ na celej množine $S_n \subset X_n$, potom podľa vzťahu (4.1), ktorý vyplýva z dôkazu prevedeného v práci, stačí keď bereme do úvahy len polovicu množiny S_n, tj. len body z množiny S_n^-, alebo z množiny S_n^+. Pri konkrétnom výpočte členov funkcionálnej postupnosti $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, M)$ uvažujeme tú polovicu množiny S_n, v ktorej sa nachádza bod $\mathbf{x}(0)$, tj. počiatočný stav riadenej sústavy.

Počiatky tejto práce sú v experimentoch, ktoré boli autorom prevádzané na UTK-SAV, ktorých časť bola obsiahnutá v práci [5]. Doposiaľ autorovi nie je známe, žeby tento problém bol riešený v našej, alebo zahraničnej literatúre.

(Došlo dňa 9. decembra 1966.)

LITERATÚRA

[1] R. E. Bellman: Dynamic Programming. Princeton 1957. (Ruský preklad Moskva 1960.)

[2] R. E. Bellman, S. E. Dreyfus: Applied Dynamic Programming. Princeton 1962. (Ruský preklad Moskva 1964.)

[3] S. M. Roberts: Dynamic Programming in Chemical Engineering and Process Control. New York 1964. (Ruský preklad Moskva 1965.)

[4] J. Uličný: Dynamická optimalizácia sústav s minimálnou dobou riadenia. Strojnícky časopis (článok v tlači).

[5] J. Uličný: Niektoré otázky dynamickej optimalizácie spojitých sústav. Kandidátska dizertačná práca, UTK-SAV, Bratislava 1965.

[6] J. Uličný: Niektoré aspekty efektívnejšieho využitia metódy dynamického programovania. Strojnícky časopis (článok v tlači).

[7] A. Ter-Manueljanc: Dynamické programování v hospodářské praxi. Ekonomicko-matematický obzor (1966), 3.

SUMMARY

On More Effective Utilization of the Method of Dynamic Programming in Nonlinear Time-Optimal Controlled Systems

JÁN ULIČNÝ

In his paper the author proves that in computing the terms of a functional sequence $\{D_N[\mathbf{x}]\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ determined by functional equations of the dynamic programming method (2.6) and provided that some types of nonlinear time-optimal controlled systems are considered, the half of the volume of a digital computer storage can be spared and, furthermore, the length of time needed to carry out the computation of othe optimal control function is abridged by one half.

Ing. Ján Uličný, CSc., Ústav technickej kybernetiky SAV, Bratislava, Dúbravská cesta.