KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 3/1967

Relace representované n-páskovými automaty

KAREL ČULÍK II

V článku jsou vyšetřovány třídy relací representované různými třídami n-páskových automatů. Je zavedena representace relace mod e n-páskovým automatem a jsou vyšetřovány třídy relací representované mod e n-páskovými automaty. Zkoumají se hlavně inkluse různých tříd relací representovaných třídami automatů a jejich uzavřenost vůči booleovským a Kleeneho operacím.

0. ÚVOD

V práci jsou vyšetřovány třídy relací representované (definované) n-páskovými automaty. Automatem se zde rozumí automat bez výstupu s vytčenou množinou koncových stavů, který je určen k tomu, aby rozeznával přijaté a nepřijaté n-tice slov nad zvolenou abecedou Σ. Uvažuje se třída automatů $\boldsymbol{D}_n$, zavedená pro $n = 2$ v [4] a [6], a její nedeterminovaná verse $\boldsymbol{N}_n$, třídy $\boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{S}_n$ a $\boldsymbol{M}_n$, zavedené v [5] a nově zavedené třídy $\boldsymbol{G}_n$ a $\boldsymbol{H}_n$.

V práci jsou vyšetřovány relace a třídy relací representované uvedenými třídami n-páskových konečných automatů. Práce navazuje na [4], [5] a [6]. Zkoumají se hlavně inkluse různých tříd relací representovaných třídami automatů a jejich uzavřenost vůči booleovským a Kleeneho operacím.

Jsou rovněž vyšetřovány relace a třídy relací representované mod e n-páskovými automaty. Definice representace mod e pro relace je analogická definici representace mod e pro jazyky v [3].

Výsledky o inklusích, rovnostech a neinklusích uvažovaných tříd relací jsou shrnuty v přehledném diagramu na obr. 5 a odvozené výsledky o uzavřenosti těchto tříd jsou spolu s výsledky známými z literatury ([4], [5], [6]) uvedeny v tabulce 5.

Uvedeme několik méně běžných pojmů a označení, resp. upřesníme význam, ve kterém je budeme používat.

Zvolme pevně nějakou abecedu Σ. Σ je konečná množina tzv. symbolů. Slovo nad abecedou Σ je sřetězení konečně mnoha symbolů z abecedy Σ. Prázdné slovo označujeme e. (Rovněž tak budeme označovat tzv. „prázdný" symbol $e \notin \Sigma$.) Jazyk nad abecedou Σ je množina slov nad abecedou Σ. n-ární relace nad abecedou Σ je množina n-tic slov nad abecedou Σ.

Množinu všech slov (včetně prázdného) nad abecedou Σ označme Σ^*. Množinu všech n-tic slov nad abecedou Σ označme $(\Sigma^*)^n$.

Jestliže p a q jsou slova nad abecedou Σ, $p = a_1 \dots a_s$, $q = b_1 \dots b_t$ ($a_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \dots, s$; $b_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \dots, t$), pak sřetězením slov p a q rozumíme slovo $a_1 \dots a_s b_1 \dots b_t$ a označujeme ho ps nebo $p \,.\, s$.

Nechť $\mathbf{u} \in (\Sigma^*)^n$, $\mathbf{v} \in (\Sigma^*)^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, potom sřetězením n-tic $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ rozumíme n-tici $\mathbf{uv} = (u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n)$. (Jako v ostatních případech sřetězení užíváme bud označení $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}$ nebo jen juxtaposici $\mathbf{uv}$.)

Množinu prvků, které mají vlastnost V, označujeme $\{x : x \text{ má vlastnost } V\}$, chceme-li zdůraznit, že je takto definována množina M, píšeme $M \underset{\text{df}}{=} \{x : x \text{ má vlastnost } V\}$.

Kleeneho operace jsou pro relace definovány takto:

Jestliže $R \subset (\Sigma^*)^n$, $S \subset (\Sigma^*)^n$, pak

$$R \cup S \underset{\text{df}}{=} \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in R \vee \mathbf{u} \in S\}\,.$$

Jestliže $R \subset (\Sigma^*)^n$, $S \subset (\Sigma^*)^n$, pak

$$RS \underset{\text{df}}{=} \{\mathbf{uv} : \mathbf{u} \in R, \mathbf{v} \in S\}\,.$$

Jestliže $R \subset (\Sigma^*)^n$, pak

$$R^* = R^0 \cup R \cup RR \cup RRR \cup \dots,$$

kde

$$R^0 = \underbrace{(e, e, \dots, e)}_{n\text{-krát}}\,.$$

Zavedeme ještě pomocnou operaci $\oplus$ vytvářející z m-tice slov nad abecedou Σ a n-tice slov nad abecedou Σ $(m + n)$-tici slov nad abecedou Σ. Nechť $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, pak $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$. k-tici tvořenou k prázdnými slovy nebo k prázdnými symboly budeme označovat e^k. Tedy

$$e^k = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{k\text{-krát}}\,.$$

Příklad 0,1.

a) $$(ab, acb) \oplus (a, bc) = (ab, acb, a, bc)\,.$$

b) $$e^k \oplus a \oplus e^p = (\underbrace{e, e, \dots, e}_{k\text{-krát}}, a, \underbrace{e, \dots, e}_{p\text{-krát}})\,.$$

Budeme-li užívat v témže výrazu operaci $\oplus$ a operaci sřetězení, pak předpokládáme, že operace $\oplus$ má vyšší prioritu.

Příklad 0,2.

$$(ab, cd) \oplus (bb, da) \,.\, (bb, aa) \oplus (cc, cb) = (abbb, cdaa, bbcc, dacb)\,.$$

Říkáme, že n-tice slov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, .., u_n)$ je počátečním úsekem n-tice slov $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, jestliže slovo u_i je počátečním úsekem slova v_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. (Každé slovo je počátečním úsekem sama sebe.)

Délkou n-tice slov rozumíme součet délek všech slov n-tice, přičemž délku prázdného slova pokládáme rovnou nule.

1. TŘÍDY n-PÁSKOVÝCH AUTOMATŮ

Uvedeme nyní definice všech tříd n-páskových automatů, které budeme v práci vyšetřovat. Nedílnou součástí definice každé ze tříd automatů je také definice n-tic slov přijatých automatem. Předpokládáme, že všechny uvažované automaty mají vstupní abecedu (jsou nad abecedou) Σ resp. $\Sigma \cup \{e\}$ a nebudeme to vždy znovu zdůrazňovat. Mluvíme-li dále o n-ticích slov přijatých automatem, předpokládáme vždy, že jde o slova nad abecedou Σ nebo nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$.

Třídu $\mathbf{D}_n$ determinovaných n-páskových automatů definujme takto: $\mathscr{A} \in \mathbf{D}_n$ je systém $\mathscr{A} = (S, \varphi, s_0, F, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, kde S je konečná množina stavů, φ přechodová funkce (jednoznačná, obecně částečná) z $S \times \Sigma$ do S, $s_0 \in S$ je počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů a $C_1, \ldots, C_n$ je rozklad množiny stavů $C_i \cap C_j = \emptyset$ pro $i \neq j$; $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$. Jestliže $s_i \in C_j$, znamená to, že automat nacházející se ve stavu s_i bere vstupní symbol z j-té vstupní pásky. Jinak pracuje jako obyčejný automat. Nechť $\mathscr{A} \in \mathbf{D}_n$ a $s_0, \ldots, s_t$ je posloupnost jeho stavů. Potom existuje jediná dvojice asociovaných posloupností celých čísel $(u_0, \ldots, u_t;$ $v_0, \ldots, v_t)$ taková, že

(i) $\quad$ je-li $s_i \in C_j$, pak $u_i = j$;

(ii) $\quad v_i$ je počet indexů $j \leqq i$ takových, že $s_j \in C_{u_i}$.

Řekneme, že n-tice slov $(x_{11} \ldots x_{1m_1}, x_{21} \ldots x_{2m_2}, \ldots, x_{n1} \ldots x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathscr{A} \in \mathbf{D}_n$, jestliže existuje (jediná) posloupnost stavů $s_0, \ldots, s_t$ a dvojice jí asociovaných posloupností celých čísel $(u_0, \ldots, u_t; v_0, \ldots, v_t)$, které splňují podmínky:

$$s_i = \varphi(s_{i-1}, x_{u_{i-1}v_{i-1}}) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, t\,, \quad (v_{i-1} \leqq m_{u_{i-1}})\,; \tag{1.1}$$

$$s_t \in F\,; \tag{1.2}$$

$$\text{jestliže} \quad u_t = j\,, \quad \text{potom} \quad v_t = m_j + 1\,. \tag{1.3}$$

Poznámka. Definici 2-páskového automatu v [4] je třeba upravit požadavkem, aby pouze jeden ze symbolů $\sigma_{h_{i-1}, l_{i-1}}$ pro $i = 1, \ldots, p$ byl koncový symbol $\ni$. Jinak by neplatily výsledky dále tam uvedené. Po této opravě je definice 2-páskového automatu v [4] pouze nepodstatně odlišná od výše uvedené (pro $n = 2$).

Třídu $\boldsymbol{N}_n$ definujme jako nedeterministickou versi třídy $\boldsymbol{D}_n$. Přechodové zobrazení φ může být víceznačné a není dán jediný počáteční stav, ale obecně množina počátečních stavů. Tedy $\mathscr{A} \in \boldsymbol{N}_n$ je systém $\mathscr{A} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, \ldots, C_n)$, kde S je konečná množina stavů, φ obecně víceznačná přechodová funkce, $S_0 \subset S$ je množina počátečních stavů, $F \subset S$ je množina koncových stavů, $C_1, \ldots, C_n$ je rozklad množiny S.

Definice přijaté n-tice slov je táž jako pro třídu $\boldsymbol{D}_n$ až na to, že požadujeme $s_0 \in S_0$ a že může existovat více posloupností stavů splňujících požadované podmínky.

Třídu $\boldsymbol{G}_n$ determinovaných automatů definujme stejně jako třídu $\boldsymbol{D}_n$, až na přijaté n-tice.

Řekneme, že n-tice slov $(x_{11} \ldots x_{1m_1}, x_{21} \ldots x_{2m_2}, \ldots, x_{xn1}, \ldots, x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathscr{B} \in \boldsymbol{G}_n$, jestliže existuje (jediná) posloupnost stavů $s_0, \ldots, s_t$ a dvojice jí asociovaných posloupností celých čísel $(u_0, \ldots, u_t; v_0, \ldots, v_t)$, které splňují podmínky:

(2.1) $$s_i = \varphi(s_{i-1}, x_{u_{i-1}}, x_{v_{i-1}}) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, t \; (v_{i-1} \leqq m_{u_{i-1}})\,;$$

(2.2) $$s_t \in F\,;$$

(2.3) $$t = m_1 + m_2 + \ldots + m_n\,.$$

Poznámka. Jestliže počáteční stav s_0 je zároveň koncovým stavem, pak automat přijímá n-tici tvořenou n prázdnými slovy (e^n).

Třídu $\boldsymbol{H}_n$ definujme jako nedeterministickou versi třídy $\boldsymbol{G}_n$. Přechodová funkce může být víceznačná. Obecně je dána množina počátečních stavů. (Mezi $\boldsymbol{H}_n$ a $\boldsymbol{G}_n$ je obdobný vztah jako mezi $\boldsymbol{N}_n$ a $\boldsymbol{D}_n$.)

Třídu $\boldsymbol{S}_n$ determinovaných n-páskových automatů definujme takto: $\mathscr{A} \in \boldsymbol{S}_n$ je systém $\mathscr{A} = (S, \varphi, s_0, F)$, kde S je konečná množina stavů, φ přechodová funkce (jednoznačná, obecně částečná) z $S \times \Sigma^n$ do S, $s_0 \in S$ je počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Řekneme, že n-tice slov $(x_{11} \ldots x_{1m}, x_{21} \ldots x_{2m}, \ldots, x_{n1} \ldots x_{nm})$ je přijata automatem $\mathscr{A} \in \boldsymbol{S}_n$, jestliže existuje (jediná) posloupnost stavů $s_0, \ldots, s_m$ taková, že

(3.1) $$s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,;$$

(3.2) $$s_m \in F\,.$$

Třídu $\boldsymbol{E}_n$ determinovaných n-páskových automatů definujme takto (viz [5]): $\mathscr{A} \in \boldsymbol{E}_n$ je systém $\mathscr{A} = (S, \varphi, s_0, F)$, kde S je konečná množina stavů, φ přechodová funkce (jednoznačná, obecně částečná) z $S \times (\Sigma \cup \{e\})^n$ do S, $s_0 \in S$ je počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Řekneme, že n-tice slov nad abecedou Σ resp. $\Sigma \cup \{e\}$ $(x_{11} \ldots x_{1m_1}, x_{21} \ldots x_{2m_2}, x_{n1} \ldots x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathscr{A} \in \boldsymbol{E}_n$, jestliže existuje jediná posloupnost stavů $s_0, s_1, \ldots, s_m$ taková, že

(4.1) $$s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m = \max(m_1, \ldots, m_n)\,,$$

kde

$$x_{ji} = e \quad \text{pro} \quad i > m_j ;$$

(4.2) $$s_m \in F .$$

M_n označme třídu n-páskových automatů (NDA v [5]), kde $\mathscr{A} \in \boldsymbol{M}_n$ je systém $\mathscr{A} = (S, v, s_0, F)$, kde S je konečná množina stavů; v je konečná množina $v \subset S \times (\Sigma^*)^n \times S$ (obecně víceznačná přechodová funkce definovaná ne pro jednotlivé symboly, ale obecně pro slova ze vstupní abecedy), $s_0 \in S$ počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Řekneme, že n-tice slov $\boldsymbol{u} \in (\Sigma^*)^n$ je přijata automatem $\mathscr{A} \in \boldsymbol{M}_n$, jestliže existuje posloupnost stavů $s_0, s_1, \ldots, s_t$ taková, že

(5.1) $$(s_{1-1}, \boldsymbol{u}_i, s_i) \in v \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, t ;$$

(5.2) $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_t ;$$

(5.3) $$s_t \in F .$$

Množinu n-tic slov přijatých automatem $\mathscr{A}$, neboli relaci representovanou automatem $\mathscr{A}$, označme $R(\mathscr{A})$. Je-li $\boldsymbol{K}$ třída automatů, pak $R(\boldsymbol{K})$ označme třídu relací

$$R(\boldsymbol{K}) \underset{\mathrm{df}}{=} \{R : R = R(\mathscr{A}), \mathscr{A} \in \boldsymbol{K}\} .$$

Definujeme nyní representaci relací mod e n-páskovými automaty, obdobně jako je definována representace jazyků mod e v [3]. Symbol e, tzv. prázdný symbol, hraje roli identického prvku vzhledem ke sřetězování slov nad abecedou Σ. Nejdůležitější interpretace e je taková, při níž je e považován skutečně za prázdný, to znamená, že na symboly e vyskytující se ve slovech nebereme zřetel. To je vystiženo v definici rovnosti slov mod e.

Nechť p a q jsou slova nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, tj. nechť $p = x_1 x_2 \ldots x_m$, kde $x_i \in \Sigma \cup \{e\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ $(m \geqq 1)$ a $q = y_1 y_2 \ldots y_n$, kde $y_j \in \Sigma \cup \{e\}$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 1)$. Pak píšeme $p = q$ (mod e), jestliže buď $x_i = y_j = e$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$ a všechna $j = 1, 2, \ldots, n$ nebo existují celá čísla s_j a t_j taková, že $1 \leqq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqq m$, $1 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqq n$ a $x_{s_j} = y_{t_j}$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$ a $x_h = y_r = e$ pro všechna $r \neq t_j$ a $h \neq s_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, k$. Jinak řečeno slova jsou si rovna mod e, když se rovnají po vynechání všech symbolů e.

Řekněme, že n-tice slov $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$; $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jsou si rovny resp. rovny mod e, jestliže $u_i = v_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ resp. $u_i = v_i$ (mod e) pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Píšeme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ resp. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ (mod e).

Relací (nad abecedou Σ) representovanou mod e automatem $\mathscr{A}$ (nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$) nazveme relaci

$$R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathscr{A}) \underset{\mathrm{df}}{=} \{\boldsymbol{u} : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \,(\mathrm{mod}\, e), \boldsymbol{v} \in R(\mathscr{A})\} .$$

Nechť $\mathbf{K}$ je třída automatů, potom

$$R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathbf{K}) \underset{\mathrm{df}}{=} \{R : R = R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathscr{A});\ \mathscr{A} \in \mathbf{K}\}\,.$$

2. INKLUSE, NEINKLUSE A ROVNOSTI TŘÍD RELACÍ REPRESENTOVANÝCH JEDNOTLIVÝMI TYPY n-PÁSKOVÝCH AUTOMATŮ

Dokážeme nejprve lemma, které umožní zkrátit důkaz věty 1.

Lemma 1. *Nechť $\mathscr{A} \in \mathbf{M}_n$, $\mathscr{A} = (S^{\mathscr{A}}, v^{\mathscr{A}}, s_0, F^{\mathscr{A}})$. Pak existuje automat $\mathscr{B} \in \mathbf{M}_n$, $\mathscr{B} = (S^{\mathscr{B}}, v^{\mathscr{B}}, s_0, F^{\mathscr{B}})$ takový, že $R(\mathscr{A}) = R(B)$ a $v^{\mathscr{B}}$ splňuje podmínku:*

(6) *Všechny n-tice $\boldsymbol{u} \in U_i$, kde $U_i = \{\boldsymbol{u} : (s_i, \boldsymbol{u}, s_j) \in v^{\mathscr{B}}\}$ mají pro každé $i \neq 0$ tvar $(e, e, \ldots, x, e, \ldots, e)$, $x \in \Sigma$, kde neprázdný symbol x je na témže místě (ale nemusí být týž pro všechna $\boldsymbol{u} \in U_i$). Všechny $\boldsymbol{u} \in U_0$ mají také pouze jeden neprázdný symbol, ale ten může být na kterémkoliv místě.*

Důkaz. Nejprve zvolíme automat $\mathscr{P} \in \mathbf{M}_n$, $\mathscr{P} = (S^{\mathscr{P}}, v^{\mathscr{P}}, s_0, F^{\mathscr{A}})$. Množina stavů $S^{\mathscr{P}}$ vznikne rozšířením množiny $S^{\mathscr{A}}$ tak, že pro každou trojici $(s_i, \boldsymbol{u}, s_j) \in v^{\mathscr{A}}$, kde n-tice $\boldsymbol{u}$ má délku $k \geqq 2$ (sestává z k neprázdných symbolů, $k \geqq 2$), rozšíříme množinu stavů o stavy $s_i^{u,1}, s_i^{u,2}, \ldots, s_i^{u,k-1}$; $v^{\mathscr{P}}$ volíme takto: jestliže $\boldsymbol{u} = (x_{11}x_{12} \ldots x_{1k_1}, x_{21} \ldots x_{2k_2}, \ldots, x_{n1} \ldots x_{nk_n})$, kde $\sum_{j=1}^{n} k_j = k \geqq 2$, volíme

$$\begin{gathered}
(s_i, x_{11} \oplus e^{n-1}, s_i^{u,1}) \in v^{\mathscr{P}}\,,\\
(s_i^{u,1}, x_{12} \oplus e^{n-1}, s_i^{u,2}) \in v^{\mathscr{P}}\,,\\
\vdots\\
(s_i^{u,k_1-1}, x_{1k_1} \oplus e^{n-1}, s_i^{u,k_1}) \in v^{\mathscr{P}}\,,\\
(s_i^{u,k_1}, e \oplus x_{21} \oplus e^{n-2}, s_i^{u,k_1+1}) \in v^{\mathscr{P}}\,,\\
\vdots\\
(s_i^{u,k-2}, e^{n-1} \oplus x_{nk_n-1}, s_i^{u,k-1}) \in v^{\mathscr{P}}\,,\\
(s_i^{u,k-1}, e^{n-1} \oplus x_{nk_n}, s_j) \in v^{\mathscr{P}}\,.
\end{gathered}$$

Jestliže v trojici $(s_i, \boldsymbol{u}, s_j) \in v^{\mathscr{A}}$ má n-tice $\boldsymbol{u}$ délku jedna, potom nechť $(s_i, \boldsymbol{u}, s_j) \in v^{\mathscr{P}}$.

Ukažme si, že platí $R(\mathscr{P}) = R(\mathscr{A})$.

a) Nechť $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{A})$, pak podle (5.1) – (5.3) existuje posloupnost stavů $s_0, \ldots, s_t$ automatu $\mathscr{A}$ taková, že

$$(s_{i-1}, \boldsymbol{u}_i, s_i) \in v^{\mathscr{A}} \quad \text{pro} \quad i = 1,2, \ldots, t\,; \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_t\,; \tag{7.2}$$

$$s_t \in F^{\mathscr{A}}\,. \tag{7.3}$$

Označme d_i délku n-tice u_i (součet délek slov, které ji tvoří). Potom

$$s_0, s_0^{u_1,1}, s_0^{u_1,2}, \ldots, s_0^{u_1,d_1-1}, s_1, s_1^{u_2,1}, s_1^{u_2,2}, \ldots, s_1^{u_2,d_1-1}, s_2, \ldots$$
$$\ldots, s_{t-1}, s_{t-1}^{u_{t-1},d_{t-1}-1}, s_t \tag{8}$$

je posloupnost stavů automatu $\mathscr{P}$, která splňuje podmínky (5.1)–(5.3) pro to, aby $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{P})$. Je tedy $R(\mathscr{A}) \subset R(\mathscr{P})$.

b) Nechť $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{P})$, pak existuje posloupnost $s_0, \ldots, s_q$ stavů automatu $\mathscr{P}$, která splňuje podmínky (5.1)–(5.3) pro přijetí n-tice $\boldsymbol{u}$ automatem $\mathscr{P}$. Z definice automatu $\mathscr{P}$ vyplývá, že tuto posloupnost lze vyjádřit ve tvaru (8). Vyškrtneme-li z ní všechny stavy z množiny $S^{\mathscr{P}} - S^{\mathscr{A}}$, dostaneme vybranou posloupnost, která splňuje podmínky (7.1)–(7.3) pro to, aby $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{A})$. Je tedy $R(\mathscr{P}) \subset R(\mathscr{A})$.

Nyní ukažme, jak k automatu $\mathscr{P}$ lze zvolit hledaný automat $\mathscr{B}$. Nechť $\mathscr{B} = (S^{\mathscr{B}}, v^{\mathscr{B}}, s_0, F^{\mathscr{B}})$, kde $S^{\mathscr{B}} = s_0 \cup ((S^{\mathscr{P}} - s_0) \times \{1, 2, \ldots, n\})$ a $v^{\mathscr{B}}$ volíme takto:

Jestliže $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^{\mathscr{P}}$, potom $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^{\mathscr{B}}$;

jestliže $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^{\mathscr{P}}$, $s_j \neq s_0$, potom $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, (s_j, t)) \in v^{\mathscr{B}}$ pro $t = 1,2, \ldots, n$;

jestliže $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^{\mathscr{P}}$, $s_i \neq s_0$, pak $((s_i, k), e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^{\mathscr{B}}$;

jestliže $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^{\mathscr{P}}$, $s_i \neq s_0, s_j \neq s_0$, pak $((s_i, k), e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, (s_j, t)) \in v^{\mathscr{B}}$ pro $t = 1, 2, \ldots, n$.

Nakonec volíme $F^{\mathscr{B}} \underset{\mathrm{df}}{=} \{(s_i, t) : s_i \in F^{\mathscr{P}}, t = 1, 2, \ldots, n\}$.

Zřejmě je $R(\mathscr{P}) = R(\mathscr{B})$ a automat $\mathscr{B}$ splňuje podmínku (6) požadovanou v lemmatu.

Věta 1. *Platí*

$$R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{M}_n) = R(\boldsymbol{M}_n) = R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{S}_n) = R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{H}_n) = R(\boldsymbol{H}_n) = R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{G}_n)\,.$$

Důkaz. 1. Platnost vztahu $R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{M}_n) = R(\boldsymbol{M}_n)$ je zřejmá.

2a) Automat $\mathscr{A} \in \boldsymbol{S}_n$ (nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$) můžeme uvažovat jako automat $\mathscr{A} \in \boldsymbol{M}_n$ (nad abecedou Σ), přičemž e označuje v tomto případě prázdné slovo (slovo skládající se z nula symbolů). Je tedy $R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{S}_n) \subset R(\boldsymbol{M}_n)$.

b) Nechť je dán automat $\mathscr{B} \in \boldsymbol{M}_n$; $\mathscr{B} = (S, v, s_0, F)$. Sestrojme automat $\mathscr{C} \in \boldsymbol{S}_n$; $\mathscr{C} = (S', \varphi, s_0, F)$ takto: Ke každé trojici $(s_i, \boldsymbol{u}, s_j) \in v$ zvolme n-tici slov nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$

$$\boldsymbol{v} = (x_{11} \ldots x_{1m}, x_{21} \ldots x_{2m}, \ldots, x_{n1} \ldots x_{nm}) \tag{9}$$

tak, aby $u_i = x_{i1} \ldots x_{im} \pmod{e}$, kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a aby byla splněna podmínka: jestliže trojici $(s_i, \boldsymbol{u}, s_j)$ odpovídá n-tice (9) a trojici $(s'_i, \boldsymbol{u}', s'_j) \in v$ odpovídá n-tice

(10) $$\boldsymbol{v}' = (x'_{11} \dots x_{1p}, x'_{21} \dots x'_{2p}, \dots, x'_{n1} \dots x'_{np}),$$

potom nechť pro $s_i = s'_i$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$, $s_j \neq s'_j$ je $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}'$. n-tice (9) lze zvolit požadovaným způsobem po vhodném doplnění n-tic $\boldsymbol{u}$ symboly e. Množinu stavů S' automatu $\mathscr{C}$ ($S \subset S'$) volme nyní tak, že pro každou zvolenou n-tici (9) rozšíříme množinu stavů S o $m - 1$ stavů. Nechť $P_i \in (\Sigma^*)^n$ je množina různých n-tic stejně dlouhých slov (nad $\Sigma \cup \{e\}$), jež jsou počátečními úseky některé n-tice (9) odpovídající trojici $(s_i, \boldsymbol{u}, s_j)$ (s_i, $\boldsymbol{u}$, s_j libovolné). Pak volme $S' = S \cup \{s_i^{\boldsymbol{p}} : s_i \in S, \boldsymbol{p} \in P_i\}$ a jednoznačnou přechodovou funkci φ volíme takto:

(i) Jestliže $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_i$, pak $\varphi(s_i, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_i^{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$;

(ii) jestliže $\boldsymbol{p} \in P_i$, $\boldsymbol{p} . (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_i$, pak $\varphi(s_i^{\boldsymbol{p}}, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_i^{\boldsymbol{p}} . (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $\boldsymbol{p} . (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je sřetězení n-tice $\boldsymbol{p}$ a n-tice $(x_1, \dots, x_n)$;

(iii) jestliže $\boldsymbol{p} \in P_i$ a $\boldsymbol{p} . (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je n-tice (9) odpovídající trojici (s_i, u, s_j), pak $\varphi(s_i^{\boldsymbol{p}}, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_j$.

Pro takto volený automat $\mathscr{C} \in \mathbf{S}_n$ je zřejmě $R(\mathscr{B}) = R^{\text{mod } e}(\mathscr{C})$. Tím je tedy ukázáno, že platí i obrácená inkluse $R(\mathbf{M}_n) \subset R^{\text{mod } e}(\mathbf{S}_n)$ a tedy platí $R(\mathbf{M}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{S}_n)$.

Příklad 1. Část diagramu* nějakého automatu $\mathscr{B} \in \mathbf{M}_n$ je na obr. 1a) a k ní odpovídající část diagramu příslušného automatu $\mathscr{C} \in \mathbf{S}_n$ je na obr. 1b). n-tice (9) jsou zde voleny takto:

$$(s_i, (ab, cda), s_j) \dots (abe, cda),$$
$$(s_i, (ab, c), s_l) \quad \dots (ab, ec),$$
$$(s_i, (ab, c), s_k) \quad \dots (ab, ce).$$

3a) Nechť $\mathscr{A} \in \mathbf{M}_n$, $\mathscr{A} = (S^{\mathscr{A}}, v^{\mathscr{A}}, s_0, F^{\mathscr{A}})$. Podle lemmatu 1 existuje automat $\mathscr{B} \in M_n$, který splňuje podmínku (6) z lemmatu 1 a pro který je $R(\mathscr{B}) = R(\mathscr{A})$. K takovému automatu $\mathscr{B}$ můžeme již snadno zvolit automat $\mathscr{C} \in \mathbf{H}_n$, pro který

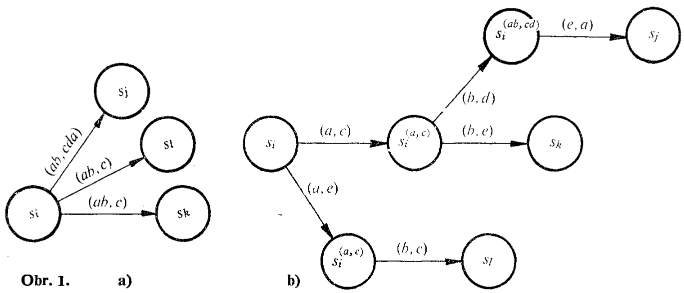
* Diagram automatu je grafické znázornění orientovaného ohodnoceného grafu (viz [1]). Uzly grafu jsou stavy automatu, z uzlu v směřuje oblouk do uzlu w a je ohodnocen k tehdy, jestliže automat je vstupem k převáděn ze stavu v do stavu w, je-li takových vstupů více, ohodnocujeme oblouk příslušnou množinou. Podle toho, o kterou třídu automatů jde, může vstupem být symbol, slovo, n-tice symbolů nebo n-tice slov. U některých tříd zavádíme ještě ohodnocení uzlů grafu, které má podle uvažované třídy význam výstupu resp. čísla pásky, ze které se bere vstup resp. čísla pásky, na které je vydáván výstup. Podrobněji u jednotlivých případů. Uzly grafu (stavy) znázorňujeme kroužkem, do kterého vepisujeme označení stavu. Patří-li stav mezi tzv. koncové stavy, znázorňujeme ho dvojitým kroužkem.

$R(\mathscr{C}) = R(\mathscr{B})$. Nechť $\mathscr{B} = (S^{\mathscr{B}}, v^{\mathscr{B}}, s_0\, F^{\mathscr{B}})$, potom $\mathscr{C} = ((S^{\mathscr{B}} \cup S_0) - s_0, \varphi, S_0, F^{\mathscr{B}}, C_1, \ldots, C_n)$, kde $S_0 \underset{\mathrm{df}}{=} \{s_j^0 : j = 1, \ldots, n\}$ a φ volíme takto:

Jestliže $s_i \in S^{\mathscr{B}} - s_0$, $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^{\mathscr{B}}$, pak $\varphi(s_i, x) = s_j$, $s_i \in C_k$;

jestliže $s_0^k \in S_0$, $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}), s_j) \in v^{\mathscr{B}}$, pak $\varphi(s_0^k, x) = s_j$, $s_0^k \in C_k$.

Zřejmě je $R(\mathscr{C}) = R(\mathscr{B})$ a tedy také $R(\mathscr{C}) = R(\mathscr{A})$ a ukázali jsme tedy, že platí $R(\boldsymbol{M}_n) \subset R(\boldsymbol{H}_n)$.



Obr. 1. a) b)

b) Nechť je dán libovolný automat $\mathscr{Q} \in \boldsymbol{H}_n$, $\mathscr{Q} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, \ldots, C_n)$. Volme $\mathscr{S} \in \boldsymbol{M}_n$, $\mathscr{S} = (S \cup s_0, v, s_0, F)$, kde v je volena takto:

Jestliže $s_i \in S_0$, potom $(s_0, e^n, s_i) \in v$;

jestliže $s_i \in S$, $x \in \Sigma$, $\varphi(s_i, x) = s_j$ a $s_i \in C_k$, potom $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v$.

Zřejmě je $R(\mathscr{Q}) = R(\mathscr{S})$, tedy $R(\boldsymbol{H}_n) \subset R(\boldsymbol{M}_n)$ a jelikož jsme již dříve dokázali opačnou inklusi, platí $R(\boldsymbol{H}_n) = R(\boldsymbol{M}_n)$.

4a) Nechť $\mathscr{A} \in \boldsymbol{G}_n$ (a tedy také $\mathscr{A} \in \boldsymbol{H}_n$), $\mathscr{A}$ je automat nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathscr{A} = (S, \varphi^{\mathscr{A}}, s_0, F, C_1, \ldots, C_n)$. Zvolme automat $\mathscr{B} \in \boldsymbol{H}_n$, $\mathscr{B}$ nad abecedou Σ; $\mathscr{B} = (S, \varphi^{\mathscr{B}}, \{s_0\}, F, C_1, \ldots, C_n)$, kde $\varphi^{\mathscr{B}}$ je zvolena takto:

jestliže existuje posloupnost stavů $s_{j_1}, \ldots, s_{j_p}$ taková, že

$$\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, x) = s_{j_1} \quad (x \in \Sigma)\,, \qquad \varphi^{\mathscr{A}}(s_{j_k}, e) = s_{j_{k+1}} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p-1\,,$$

potom

$$\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, x) = s_{j_k} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Automat $\mathscr{B}$ může být nedeterminovaný, i když byl $\mathscr{A}$ determinovaný, zřejmě však $R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathscr{A}) = R(\mathscr{B})$ a tedy

$$R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{G}_n) \subset R^{\mathrm{mod}\, e}(\boldsymbol{H}_n) \subset R(\boldsymbol{H}_n)\,. \tag{11}$$

b) Nechť je dán automat $\mathscr{C} \in \boldsymbol{H}_n$ nad abecedou Σ, $\mathscr{C} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Zvolme automat $\mathscr{D} \in \boldsymbol{G}_n$ nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathscr{D} = (S^{\mathscr{D}}, \varphi^{\mathscr{D}}, s_0, F, C_1, \ldots, C_n)$, kde $S^{\mathscr{D}}$ vznikne rozšířením množiny S takto:

Nechť $s_i \in S$ a $x_1, x_2, \ldots, x_p$ jsou všechny prvky ze Σ takové, že $\varphi(s_i, x_j)$ je víceznačné pro $j = 1, 2, \ldots, p$. Označme

(12)
$$\begin{array}{lll} s_1, s_2, \ldots, s_{j_1} & \text{všechny hodnoty} & \varphi(s_i, x_1), \\ s_{j_1+1}, s_{j_1+2}, \ldots, s_{j_2} & \text{všechny hodnoty} & \varphi(s_i, x_2), \\ \vdots & & \\ s_{j_{p-1}+1}, s_{j_{p-1}+2}, \ldots, s_{j_p} & \text{všechny hodnoty} & \varphi(s_i, x_p). \end{array}$$

Pro každé $s_i \in S$ rozšíříme množinu stavů S o nové stavy

(13)
$$s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{j_1-1}, s_i^{j_1+1}, s_i^{j_1+2}, \ldots, s_i^{j_2-1}, s_i^{j_2+1}, s_i^{j_2+2}, \ldots, s_i^{j_p-1},$$

přičemž je-li $s_i \in C_m$, pak $s_i^k \in C_m$ pro všechna k.

Nechť $S_0 = \{s_{q_1}, s_{q_2}, \ldots, s_{q_m}\}$. Za počáteční stav s_0 automatu $\mathscr{D}$ volíme stav s_{q_1}.

Přechodovou funkci $\varphi^{\mathscr{D}}$ volíme takto:

(i) Je-li $s_i \in S$, $x \in \Sigma$ a $\varphi(s_i, x)$, je dána jednoznačně, pak

$$\varphi^{\mathscr{D}}(s_i, x) = \varphi(s_i, x).$$

(ii) Nechť $s_i \in (S - S_0) \cup s_{q_m}$ a $x_1, \ldots, x_p$ jsou všechny prvky z Σ takové, že $\varphi(s_i, x_j)$ je víceznačná pro $j = 1, 2, \ldots, p$. Potom (s využitím označení (12), (13))

$$\varphi^{\mathscr{D}}(s_i, x) = s_1;\ \varphi^{\mathscr{D}}(s_i, e) = s_i^1;\ \varphi^{\mathscr{D}}(s_i^k, e) = s_i^{k+1} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, j_1 - 2,$$
$$j_1 + 1, j_1 + 2, \ldots, j_2 - 2, j_2 + 1, j_2 + 2, \ldots, j_p - 2;$$
$$\varphi^{\mathscr{D}}(s_i^k, e) = s_i^{k+2} \quad \text{pro} \quad k = j_1 - 1, j_2 - 1, j_3 - 1, \ldots, j_{p-1} - 1;$$
$$\varphi^{\mathscr{D}}(s_i^k, x_t) = s_i^{k+1} \quad \text{pro} \quad t = 1, 2, \ldots, p,$$
$$k = j_{t-1} + 1, j_{t-1} + 1, \ldots, j_t - 1$$

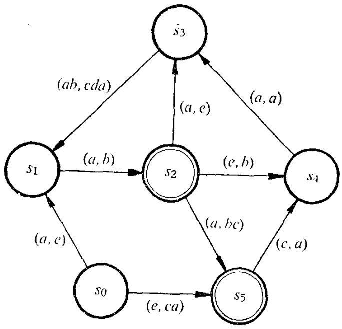
kde $j_0 = 0$.

(iii) Nechť $s_i \in S_0 - s_{q_m}$ ($s_i = s_{q_k}$ pro některé $q_k < m$) a jinak je situace táž jako v bodě (ii). Pak volíme přechodovou funkci týmž způsobem jako v (ii) a navíc ještě položíme

$$\varphi^{\mathscr{D}}(s_i^{j_p-1}, e) = s_{q_k+1}.$$

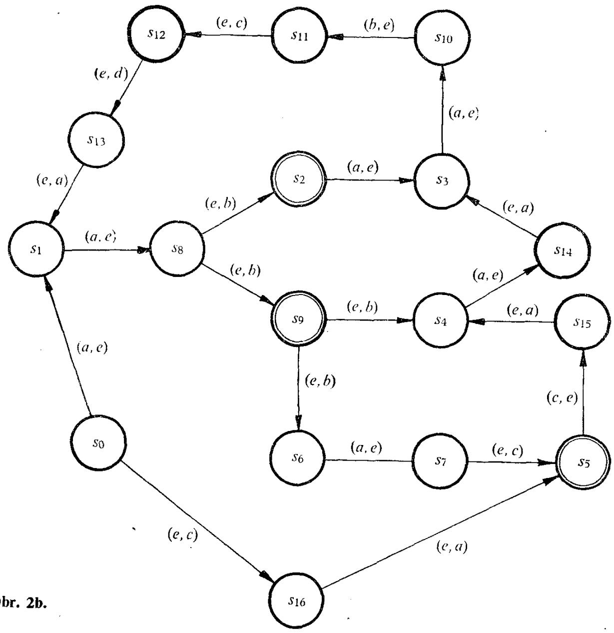
(iv) Jestliže pro $s_{q_k} \in S_0 - s_{q_m}$ a pro všechna $x \in \Sigma$ je $\varphi(s_{q_k}, x)$ dána jednoznačně, pak položme $\varphi^{\mathscr{D}}(s_{q_k}, e) = s_{q_k+1}$.

Popsaná konstrukce je na konkrétním příkladě provedena v příkladě 3 (není jednoznačná).



s_3
(ab, cda)
(a, e)
(a, a)
s_1
(a, b)
s_2
(e, b)
s_4
(a, bc)
(a, e)
(c, a)
s_0
s_5
(e, ca)

Obr. 2a.



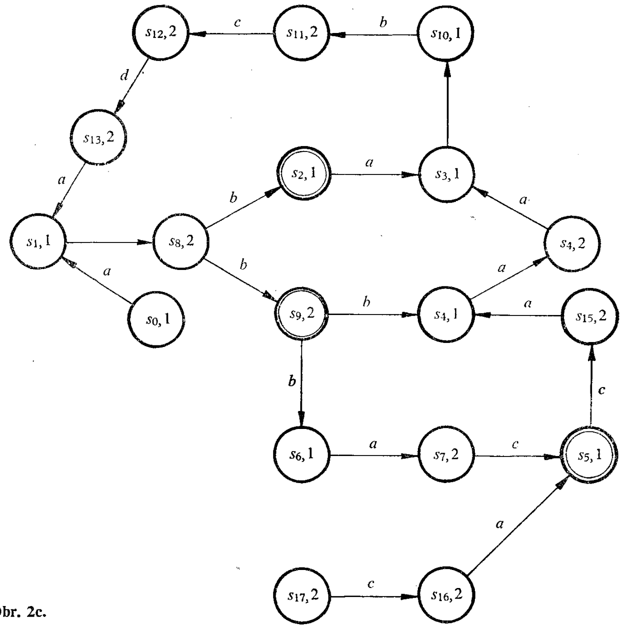
s_{12}
(e, c)
s_{11}
(b, e)
s_{10}
(e, d)
(a, e)
s_{13}
(e, a)
s_2
(a, e)
s_3
(e, b)
(e, a)
s_1
(a, e)
s_8
s_{14}
(e, b)
(a, e)
s_9
(e, b)
s_4
(e, a)
s_{15}
(a, e)
(e, b)
(c, e)
s_0
s_6
(a, e)
s_7
(e, c)
s_5
(e, c)
(e, a)
s_{16}

Obr. 2b.

Zřejmě je $R(\mathscr{C}) = R^{\mathrm{mod}\ e}(\mathscr{D})$ a tedy platí $R(\boldsymbol{H}_n) \subset R^{\mathrm{mod}\ e}(\boldsymbol{G}_n)$ a dohromady s (11) tedy platí

$$R(\boldsymbol{H}_n) = R^{\mathrm{mod}\ e}(\boldsymbol{H}_n) = R^{\mathrm{mod}\ e}(\boldsymbol{G}_n)\,.$$

Tím je plně dokázána věta 1.



Obr. 2c.

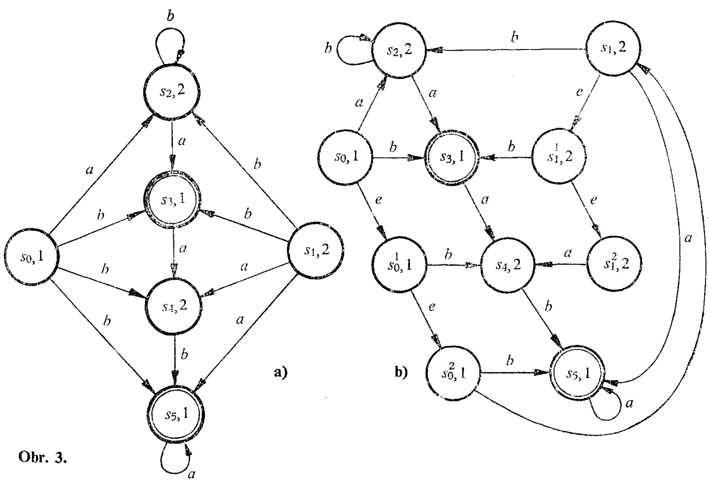
Příklad 2. Nechť je dán automat $\mathscr{A} \in \boldsymbol{M}_n$, $\mathscr{A} = (\{s_i : 0 \leqq i \leqq 5\}, \{(s_0, (a, e), s_1), (s_0, (e, ca)\, s_5), (s_1, (a, b), s_2), (s_2, (a, e), s_3), (s_2, (e, b), s_4), (s_2, (a, bc), s_5), (s_3, (ab, cda), s_1), (s_4, (a, a), s_3), (s_5, (c, a), s_4)\}, s_0, \{s_2, s_5\})$. Diagram automatu $\mathscr{A}$ je na obr. 2a.

Automat $\mathscr{B} \in \boldsymbol{M}_n$, $\mathscr{B} = (\{s_i : 0 \leqq i \leqq 16\}, \{(s_1, (a, e), s_8), (s_2, (a, e), s_3), (s_3, (a, e), s_{10}), (s_4, (a, e), s_{14}), (s_5, (c, e), s_{15}), (s_6, (a, e), s_7), (s_7, (e, c), s_5), (s_8, (e, b), s_2), (s_8, (e, b), s_9), (s_9, (e, b), s_4), (s_9, (e, b), s_6), (s_{10}, (b, e), s_{11}), (s_{11}, (e, c), s_{12}), (s_{12}, (e, d), s_{13}), (s_{13}, (e, a), s_1), (s_{14}, (e, a), s_3), (c_{15}, (e, a), s_4), (s_{16}, (e, a), s_5), s_0, \{s_2, s_5, s_9\})$, splňuje podmínku (i) z lemmatu 1 a je $R(\mathscr{A}) = R(\mathscr{B})$. Uvedený automat $\mathscr{B}$ je jednodušší než automat, který by vyšel konstrukcí podle důkazu lemmatu 1. Diagram automatu $\mathscr{B}$ je na obr. 2b.

Automat $\mathscr{C} \in \boldsymbol{H}_n$, $\mathscr{C} = (\{s_i : 0 \leqq i \leqq 17\}, \varphi, \{s_0, s_{17}\}, \{s_2, s_5, s_9\}, \{s_i : 0 \leqq i \leqq 6 \vee i = 10\}, \{s_i : 7 \leqq i \leqq 9 \vee 11 \leqq i \leqq 17\})$ dostaneme z automatu $\mathscr{B}$ konstrukcí podle důkazu věty 1 (část 3a) a platí tedy $R(\mathscr{A}) = R(\mathscr{B}) = R(\mathscr{C})$. Diagram automatu $\mathscr{C}$ je na obr. 2c.

Tabulka 1.

	a	b
s_0	$\{s_2\}$	$\{s_3, s_4, s_5\}$
s_1	$\{s_4, s_5\}$	$\{s_2, s_3\}$
s_2	$\{s_3\}$	$\{s_2\}$
s_3	$\{s_4\}$	—
s_4	—	$\{s_5\}$
s_5	$\{s_5\}$	—



Obr. 3.

Příklad 3. Nechť je dán automat $\mathscr{C} \in \boldsymbol{H}_n$, $\mathscr{C} = (\{s_i : 0 \leqq i \leqq 5\}, \varphi^{\mathscr{C}}, \{s_0, s_1\}, \{s_3, s_5\}, \{s_0, s_3, s_5\}, \{s_1, s_2, s_4\})$, kde $\varphi^{\mathscr{C}}$ je dána tabulkou 1. Diagram automatu $\mathscr{C}$ je na obr. 3a.

Konstrukcí podle důkazu věty 1 (část 4b) dostaneme automat $\mathscr{D} \in \boldsymbol{G}_n$ nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, pro který je $R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathscr{D}) = R(\mathscr{C})$.

$\mathscr{D} = (\{s_0, s_0^1, s_0^2, s_1, s_1^1, s_1^2, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \varphi^{\mathscr{D}}, s_0, \{s_3, s_5\}, \{s_0, s_0^1, s_0^2, s_3, s_5\}, \{s_1, s_1^1, s_1^2, s_2, s_4\})$, kde $\varphi^{\mathscr{D}}$ je dána tabulkou 2. Diagram automatu $\mathscr{D}$ je na obr. 3b.

Tabulka 2.

	a	b	e
s_0	s_2	s_3	s_0^1
s_0^1	—	s_4	s_0^2
s_0^2	—	s_5	s_1
s_1	s_5	s_2	s_1^1
s_1^1	—	s_3	s_1^2
s_1^2	s_4	—	—
s_2	s_3	s_2	—
s_3	s_4	—	—
s_4	—	s_5	—
s_5	s_5	—	—

Věta 2. *Platí*

$$R(\boldsymbol{S}_n) \subset R(\boldsymbol{E}_n) \subset R(\boldsymbol{M}_n)\,, \tag{14}$$

$$R(\boldsymbol{S}_n) \subset R(\boldsymbol{G}_n) \subset R(\boldsymbol{M}_n) \tag{15}$$

a všechny inkluse jsou vlastní.

Důkaz 1. Platnost (14) je ukázána v [5].

2. Nechť $\mathscr{A} \in \boldsymbol{S}_n$, $\mathscr{A} = (S^{\mathscr{A}}, \varphi^{\mathscr{A}}, s_0^{\mathscr{A}}, F^{\mathscr{A}})$, pak volme $\mathscr{B} \in \boldsymbol{G}_n$, $\mathscr{B} = (\boldsymbol{S}^{\mathscr{B}}, \varphi^{\mathscr{B}}, \boldsymbol{S}_0^{\mathscr{B}}, F^{\mathscr{B}}, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ takto:

Označme Ω množinu všech slov (včetně prázdného) délky nejvýše $n - 1$ nad abecedou Σ. Položme $S^{\mathscr{B}} = S^{\mathscr{A}} \times \Omega$ a jestliže $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = s_j$, potom volme

$\varphi^{\mathscr{B}}((s_i, x_1 \ldots x_k), x_{k+1}) = (s_i, x_1 \ldots x_{k+1})$ pro $k = 0, 1, \ldots, n - 2$ (pro $k = 0$ je $x_1 \ldots x_k$ prázdné slovo);

$\varphi^{\mathscr{B}}((s_i, x_1 \ldots x_{n-1}), x_n) = (s_j, e)$ (e zde označuje prázdné slovo).

Dále položme $s_0^{\mathscr{B}} = (s_0^{\mathscr{A}}, e)$; $F^{\mathscr{B}} = \{(s_i, e) : s_i \in F^{\mathscr{A}}\}$; $C_1 = \{(s_i, e) : s_i \in S^{\mathscr{A}}\}$, $C_k = \{(s_i, x_1 \ldots x_{k-1})$ pro $k = 2, 3, \ldots, n\}$.

Zřejmě je $R(\mathscr{A}) = R(\mathscr{B})$, čímž je dokázána inkluse $R(\boldsymbol{S}_n) \subset R(\boldsymbol{G}_n)$. Že tato inkluse je vlastní, ukazuje příklad $R_1 = \{a \oplus e^{n-1}\} \in R(\boldsymbol{G}_n)$, $R_1 \notin R(\boldsymbol{S}_n)$.

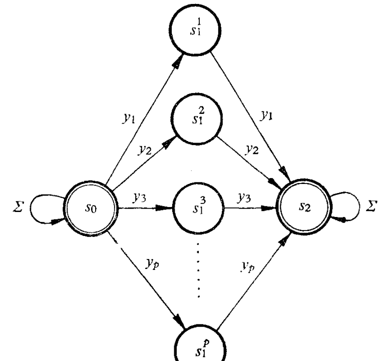
3. Nechť $\mathscr{D} \in \boldsymbol{G}_n$, pak je také $\mathscr{D} \in \boldsymbol{H}_n$ a tedy $R(\boldsymbol{G}_n) \subset R(\boldsymbol{H}_n)$, protože podle věty 1 je $R(\boldsymbol{H}_n) = R(\boldsymbol{M}_n)$ je také $R(\boldsymbol{G}_n) \subset R(\boldsymbol{M}_n)$.

Relace $R_2 = \{(\sigma\pi, \pi);\ \sigma \in \Sigma^*,\ \pi \in \Sigma^*\}$ ukazuje, že tato inkluse je vlastní pro $n = 2$ ($R_2 \in R(\boldsymbol{H}_2)$, $R_2 \notin R(\boldsymbol{G}_2)$). Sestrojme automat $\mathscr{F} \in \boldsymbol{H}_2$, pro který $R_2 = R(\mathscr{F})$.

Nechť $\Sigma = (y_1, \ldots, y_p)$; $\mathscr{F} = (\{s_0, s_1^k, s_2; k = 1, 2, \ldots, p\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_0, s_2\}, \{s_0, s_2\}, \{s_1^k : k = 1, 2, \ldots, p\})$, kde φ je víceznačná přechodová funkce zadaná takto:

$$\begin{aligned}
\varphi(s_0, y_k) &= s_0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,; \\
\varphi(s_0, y_k) &= s_1^k \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,; \\
\varphi(s_1^k, y_k) &= s_2 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,; \\
\varphi(s_2, y_k) &= s_1^k \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,.
\end{aligned}$$

Diagram automatu $\mathscr{F}$ je na obr. 4.



Obr. 4.

Ukážeme, že skutečně $R_2 = R(\mathscr{F})$.

a) Nechť $\boldsymbol{u} \in R_2$, pak $\boldsymbol{u} = (y_{i_1} \ldots y_{i_k} y_{j_1} \ldots y_{j_m}, y_{j_1} \ldots y_{j_m})$. Ukažme, že existuje posloupnost stavů automatu $\mathscr{F}$ požadovaná v definici přijaté n-tice automaty ze třídy $\boldsymbol{H}_n$. Je to posloupnost stavů

$$\underbrace{s_0, s_0, \ldots, s_0}_{i_i \text{ krát}}, s_1^{j_1}, s_2, s_1^{j_2}, s_2, s_1^{j_3}, \ldots, s_1^{j_m}, s_2\,. \tag{16}$$

b) Naopak ze zadání přechodové funkce φ vyplývá, že automat $\mathscr{F}$ může přejít do koncového stavu pouze po projití posloupnosti stavů tvaru (16), a že tedy $R(\mathscr{F})$ je tvořena právě dvojicemi tvaru $(\sigma\pi, \pi)$, kde $\sigma, \pi \in \Sigma^*$.

Ukážeme ještě, že $R_2 \notin R(\boldsymbol{G}_2)$.

Platí $(y_1, e) \in R_2$, $(y_1, y_1) \in R_2$, $(y_1 y_1, e) \in R_2$. Předpokládejme, že existuje automat $\mathscr{Z} \in \boldsymbol{G}_2$ takový, že $R_2 = R(\mathscr{Z})$, $\mathscr{Z} = (S, \varphi, s_0, F, C_1, C_2)$. Z toho, že $(y_1, y_2) \in R(\mathscr{Z})$ plyne $\varphi(s_0, y_1) \in C_2$, a z toho, že $(y_1 y_1, e) \in R(\mathscr{Z})$ plyne $\varphi(s_0, y_1) \in C_1$, což je spor, neboť $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

 Věta 3. *Platí*

$$R(\mathbf{M}_n) \supset R(\mathbf{N}_n) = R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathbf{N}_n) = R^{\mathrm{mod}\, e}(\mathbf{D}_n) \supset R(\mathbf{D}_n).$$

Obě inkluse jsou vlastní.

Důkaz 1. Nechť $\mathscr{A} \in \mathbf{N}_n$, $\mathscr{A} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, \ldots, C_n)$. Nechť $F = \{s_i : i \in M\}$ označme $F' = \{s'_i : i \in M\}$ a sestrojme automat $\mathscr{B} \in \mathbf{M}_n$, $\mathscr{B} = (S \cup F' \cup s_0, v, s_0, F \cup F')$, přičemž předpokládáme, že S, F' a $\{s_0\}$ jsou po dvou disjunktní množiny a v volíme takto:

(i) jestliže $s_j \in S_0$, potom $(s_0, e^n, s_j) \in v$;

(ii) jestliže $s_i \in C_k$, $\varphi(s_i, x) = s_j$, potom $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v$;

(iii) jestliže $s_i \in C_k$, $s_i \in F$, potom $(s_i, (y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_{k-1}}, e, y_{j_{k+1}}, \ldots, y_{j_n}), s'_i) \in v$ a $(s'_i, (y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_{k-1}}, e, y_{j_{k+1}}, \ldots, y_{j_n}), s'_i) \in v$ pro libovolná $y_{j_1}, \ldots, y_{k-1j}, y_{j_{k+1}}, \ldots, y_{j_n} \in \Sigma \cup \{e\}$.

Ukážeme, že $R(\mathscr{A}) = R(\mathscr{B})$.

a) Nechť n-tice $\mathbf{u} \in R(\mathscr{A})$, $\mathbf{u} = (x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, x_{21}, \ldots, x_{2m_2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_n})$. Potom podle definice n-tic přijatých automatem ze třídy $\mathbf{N}_n$ existuje posloupnost stavů $s_1, \ldots, s_t$ tak, že jsou splněny podmínky (1.1)–(1.3).

Nechť $Q_k = \{i : 1 \leqq i \leqq k,\ u_i = k\}$, pak označme $q_k = \max_{i \in Q_k} v_i$, kde u_i, v_i $(i = 0, 1, \ldots, t)$ je dvojice asociovaných posloupností celých čísel z definice přijatých n-tic třídy $\mathbf{N}_n$. Je-li $s_t \in C_b$, je $q_b = m_b$, $q_i \leqq m_i$ pro $i \neq b$. Z definice automatu $\mathscr{B}$ vyplývá, že n-tice $\mathbf{v} = (x_{11}, \ldots, x_{1q_1}, x_{21} \ldots, x_{2q_2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nq_n})$ je přijata automatem $\mathscr{B}$, neboť existuje definicí požadovaná posloupnost stavů, a to posloupnost $s_0, s_1, \ldots, s_t$. Dále z definice automatu $\mathscr{B}$ vyplývá, že každá n-tice, jejíž počáteční úsek je n-tice $\mathbf{v}$ (počáteční úsek se rozumí po jednotlivých slovech) a která má s $\mathbf{v}$ totéž b-té slovo, je rovněž přijata automatem $\mathscr{B}$. Zvláštní případ takové n-tice je také n-tice $\mathbf{u}$. Je tedy $R(\mathscr{A}) \subset R(\mathscr{B})$.

b) Nechť n-tice $u \in R(\mathscr{B})$. Potom podle definice přijatých n-tic automaty třídy $\mathbf{M}_n$ existuje posloupnost stavů $s_0, \ldots, s_t$ taková, že jsou splněny podmínky (5). Z konstrukce automatu $\mathscr{B}$ vyplývá, že existuje $t_1 \leqq t$ takové, že $s_i \notin F'$ pro $i \leqq t_1$ a $s_i \in F'$ pro $t_1 < i \leqq t$ a dále navíc $s_i = s_j$ pro $t_1 < i, j \leqq t$. Z definice automatu $\mathscr{B}$ k libovolnému automatu $\mathscr{A}$ pak vyplývá, že posloupnost $s_1, \ldots, s_{t_1}$ je posloupností stavů, která splňuje podmínky (1) pro to, aby n-tice u byla přijata automatem $\mathscr{A}$. Je tedy $R(\mathscr{B}) \subset R(\mathscr{A})$.

Tím je ukázána platnost prvé inkluse zleva.

2. Nechť $\mathscr{P} \in \mathbf{D}_n$ (a tedy také $\mathscr{P} \in \mathbf{N}_n$), $\mathscr{P} = (S, \varphi^{\mathscr{P}}, s_0, F, C_1, \ldots, C_n)$, $\mathscr{P}$ je n-páskový automat nad abecedou $\Sigma \cap \{e\}$. Sestrojme $\mathscr{Q} \in \mathbf{H}_n$ (automat nad abecedou Σ), $\mathscr{Q} = (S, \varphi^{\mathscr{Q}}, s_0, F, C_1, \ldots, C_n)$, kde $\varphi^{\mathscr{Q}}$ je definována pouze na $S \times \Sigma$ a to takto:

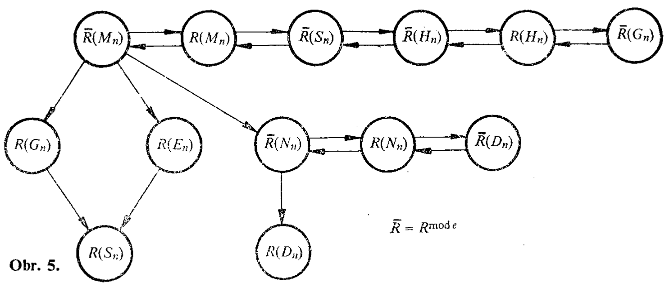
Jestliže existuje posloupnost stavů $s_{j_1}, \ldots, s_{j_p}$; $p \geqq 1$ taková, že $\varphi^{\mathscr{P}}(s_i, x) = s_{j_k}$, $(x \in \Sigma)$ a $\varphi^{\mathscr{P}}(s_{j_k}, e) = s_{j_{k+1}}$ pro $k = 1, 2, \ldots, p - 1$, potom $\varphi^{\mathscr{Q}}(s_i, x) = s_{j_k}$ pro $k = 1, 2, \ldots, p$. Zřejmě $R^{\text{mod}\, e}(\mathscr{P}) = R(\mathscr{Q})$, čímž je ukázáno, že $R^{\text{mod}\, e}(\mathbf{D}_n) \subset$ $\subset R^{\text{mod}\, e}(\mathbf{N}_n) \subset R(\mathbf{N}_n)$.

3. Důkaz rovnosti $R(\mathbf{N}_n) = R^{\text{mod}\, e}(\mathbf{N}_n)$ je zcela obdobný důkazu rovnosti $R(\mathbf{H}_n) =$ $= R^{\text{mod}\, e}(\mathbf{H}_n) = R^{\text{mod}\, e}(\mathbf{G}_n)$ z věty 1. Platnost druhé inkluse je zcela zřejmá, zbývá nám tedy ještě ukázat, že inkluse jsou vlastní.

4. Inkluse $R(\mathbf{M}_n) \supset R(\mathbf{N}_n)$ je vlastní, neboť do $R(\mathbf{N}_n)$ nepatří žádná konečná relace, viz [4], zatím co do $R(\mathbf{M}_n)$ patří všechny konečné n-členné relace.

5. Nechť $\mathscr{S} \in \mathbf{N}_2$ nad abecedou $\Sigma = (y_1, .., y_p)$, $p \geqq 1$, $\mathscr{S} = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi, \{s_0\},$ $\{s_1, s_2\}, \{s_0, s_1\}, \{s_2\})$, kde víceznačná přechodová funkce φ je dána takto: $\varphi(s_0, a) =$ $= s_1$, $\varphi(s_0, a) = s_2$, $(a \in \Sigma)$. Zřejmě $R(\mathscr{S}) = \{(a, \sigma), (\sigma, a) : a \in \Sigma, \sigma \in \Sigma^*, a$ pevné, σ libovolné$\}$.

Zřejmě neexistuje $\mathscr{T} \in \mathbf{D}_2$ takový, aby $R(\mathscr{S}) = R(\mathscr{T})$ a tedy inkluse $R(\mathbf{D}_n) \subset$ $\subset R(\mathbf{N}_n)$ je pro $n = 2$ vlastní. Zcela obdobně i pro $n > 2$.



Obr. 5.

Inkluse a rovnosti dokázané ve větách 1–3 jsou znázorněny orientovaným grafem na obr. 5. Existuje-li dráha z uzlu odpovídajícího třídě relací K_1 do uzlu odpovídajícího třídě relací K_2, potom $K_1 \supset K_2$. Ukážeme ještě, že další inkluse mezi uvažovanými třídami již neexistují.

Věta 4. *Jestliže v grafu znázorněném na obr. 5 nelze spojit dva uzly drahou, potom mezi třídami relací, které jim odpovídají, není vztah inkluse.*

Důkaz. Stačí ukázat, že existují relace:

R_1, kde $R_1 \in R(\mathbf{S}_n)$ a $R_1 \notin R(\mathbf{N}_n)$;

R_2, kde $R_2 \in R(\mathbf{D}_n)$ a $R_2 \notin R(\mathbf{G}_n)$;

R_3, kde $R_3 \in R(\mathbf{D}_n)$ a $R_3 \notin R(\mathbf{E}_n)$;

R_4, kde $R_4 \in R(\mathbf{G}_n)$ a $R_4 \notin \mathbf{G}(\mathbf{E}_n)$;

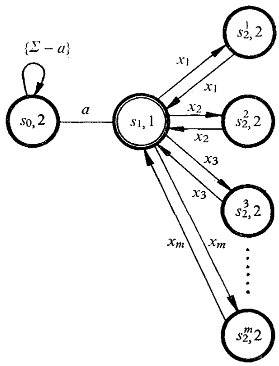
R_5, kde $R_5 \in R(\mathbf{E}_n)$ a $R_5 \notin R(\mathbf{G}_n)$.

Všechny příklady budeme uvádět pouze pro binární relace.

1. Za R_1 lze volit kteroukoliv konečnou binární relaci, neboť jak ukázal např. Ginsburg [6], nepatří žádná konečná neprázdná relace do $R(\mathbf{D}_n)$.

2. $$R_2 = \{(a^n, b^n\sigma) : n = 0, 1, \ldots; a, b \in \Sigma; \sigma \in \Sigma^*\}$$

Sestrojme automat $\mathscr{A} \in \mathbf{D}_2$, $\mathscr{A} = (\{s_0, s_1\}, \varphi, s_0, \{s_0\}, \{s_0\}, \{s_1\})$, kde $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, b) = s_0$. Zřejmě $R_2 = R(\mathscr{A})$. Ukažme, že neexistuje automat $\mathscr{B} \in G_2$, pro který $R_1 = R(\mathscr{B})$. Předpokládejme, že takový automat $\mathscr{B} = (S, \psi, s_0^{\mathscr{B}}, F, C_1, C_2)$ existuje.



Obr. 6.

Jelikož dvojice slov $(e, b) \in R_2$ musí nutně $s_0^{\mathscr{B}} \in C_2$ a $\psi(s_0^{\mathscr{B}}, b) = s_i$ pro nějaké $s_i \in S$. Z toho, že $(a, b) \in R_2$, dostáváme, že nutně $s_i \in C_1$, avšak protože $(e, ba) \in R_2$ má být $s_i \in C_2$, což je spor. R_2 má tedy požadované vlastnosti.

3. $$R_3 = \{(\pi, \sigma a \pi \varrho) : a \in \Sigma, \sigma \in (\Sigma - a)^*, \pi \in \Sigma^*, \varrho \in \Sigma^*\} .$$

Nechť $\Sigma = \{x_i : i = 1, \ldots, m\}$. Sestrojme automat $\mathscr{C} \in \mathbf{D}_2$, $\mathscr{C} = (\{s_0, s_1; s_2^i;\ i = 1, 2, \ldots, m\}, \varphi, s_0, \{s_1\}, \{s_1\}, \{s_0, s_2^i;\ i = 1, 2, \ldots, m\})$, kde $\varphi(s_0, x) = s_0$, pro $x \in \Sigma - a$, $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, x_i) = s_2^i$, $\varphi(s_2^i, s_i) = s_1$. Diagram automatu $\mathscr{C}$ je na obr. 6. Koncové stavy budeme na diagramech vyznačovat dvojitým kroužkem.

Zřejmě je $R_3 = R(\mathscr{C})$. Ze neexistuje atomat $\mathscr{D}$, $\mathscr{D} \in E_2$, $R_3 = R(\mathscr{D})$ vyplývá z toho, že automaty z této třídy berou vstupní symboly zároveň z obou pásek a takový automat by si musel „pamatovat“ vždy vstupní symboly z prvé pásky, dokud se na druhé neobjeví symbol a. Jelikož symbol a může na druhé pásce předcházet libovolně dlouhé slovo, musek by takový automat mít nekonečnou paměť (nekonečný počet stavů).

4. $$R_4 = \{(\pi, \sigma a \pi) : a \in \Sigma, \sigma \in (\Sigma - a)^*, \pi \in \Sigma^*\} .$$

Relaci R_4 reprezentuje tentýž automat jako relaci R_3, ovšem chápaný nyní jako automat ze třídy $\mathbf{G}_2$ (s příslušnou definicí přijatých n-tic). Důvody, proč $R_4 \notin R(\mathbf{E}_2)$, jsou tytéž jako pro to, že $R_3 \notin R(\mathbf{E}_2)$.

5. $$R_5 = \{(a, e), (e, b)\}\ .$$

Sestrojme automat $\mathscr{F} \in \mathbf{E}_2$; $\mathscr{F} = (\{s_0, s_1\},\ \varphi,\ s_0, \{s_1\})$, kde $\varphi(s_0, (a, e)) = s_1$, $\varphi(s_0, (e, b)) = s_1$. Zřejmě $R_5 = R(\mathscr{C})$. Že neexistuje automat $\mathscr{K}$, pro který $R(\mathscr{K}) = R_5$, vyplývá z toho, že jeho počáteční stav by musel patřit do oboru tříd rozkladu stavů, což je spor.

Tím je tedy plně dokázána věta 4.

3. UZAVŘENOST TŘÍD RELACÍ VŮČI BOOLEOVSKÝM A KLEENEHO OPERACÍM

Budeme vyšetřovat uzavřenost výše zavedených tříd relací vůči sjednocení, průniku, doplňku, sřetězení a iteraci. Budeme uvažovat jen ty případy, které dosud nebyly řešeny v literatuře, a potom je spolu se známými výsledky ([4], [5], [6]) přehledně uvedeme v tab. 5. Důkazy a protipříklady budeme uvádět (právě tak jako v literatuře) pouze pro binární relace, zřejmě je však lze lehce zobecnit.

Lemma 2. *Nechť $R \in R(\mathbf{H}_n)$ (speciálně $R \in R(\mathbf{G}_n)$). Pak množina slov M,*

$$M = \{p : p \in \Sigma^*\ ,\quad \text{existují}\quad p_i \in \Sigma^* \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\ ,$$
$$\text{tak, že}\quad (p_1, \ldots, p_{k-1}, p, p_{k+1}, \ldots, p_n) \in R\}\ ,$$

je regulárním jazykem.

Poznámka. Pro ostatní třídy automatů je obdobné tvrzení dokázáno v literatuře ([5], [6]).

Důkaz. Nechť $R = R(\mathscr{A})$, $\mathscr{A} \in \mathbf{N}_n$, $\mathscr{A} = (S, \varphi^{\mathscr{A}}, S_0, F, C_1, \ldots, C_n)$. Volme obyčejný (1-páskový) automat $\mathscr{B}$ nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathscr{B} = (S \cup \{s_0\}, \varphi^{\mathscr{B}}, s_0, F)$ ($s_0 \notin S$ kde $\varphi^{\mathscr{B}}$ (obecně víceznačná) je definována takto:

(i) jestliže $s_j \in S_0$, potom $\varphi^{\mathscr{B}}(s_0, e) = s_j$;

(ii) jestliže $x \in \Sigma$, $s_i \in C_k$, $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, x) = s_j$, potom $\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, x) = s_j$;

(iii) jestliže $x \in \Sigma$, $s_i \notin C_k$, $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, x) = s_j$, potom $\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, e) = s_j$.

Zřejmě $R^{\mathrm{mod}\ e}(\mathscr{B}) = M$ (jednočlenná relace). Z věty 3 víme, že $R^{\mathrm{mod}\ e}(\mathbf{N}_n) = R(\mathbf{N}_n)$, existuje tedy automat $\mathscr{C} \in \mathbf{N}_n$, takový, že $R^{\mathrm{mod}\ e}(\mathscr{B}) = R(\mathscr{C}) = M$. Pro $n = 1$, jak je známo z literatury [2], [6], representují však jak determinované, tak i nedeterminované automaty regulární jazyky a tedy M je regulární.

Věta 5. *Třída $R(\mathbf{N}_n)$ je uzavřená vůči sjednocení, sřetězení a iteraci, není uzavřená vůči průniku a doplňku.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{A} \in \mathbf{N}_2$, $\mathscr{B} \in \mathbf{N}_2$, $\mathscr{A} = (S^{\mathscr{A}}, \varphi^{\mathscr{A}}, S_0^{\mathscr{A}}, F^{\mathscr{A}}, C_1^{\mathscr{A}}, C_2^{\mathscr{A}})$, $\mathscr{B} = (S^{\mathscr{B}}, \varphi^{\mathscr{B}}, S_0^{\mathscr{B}}, F^{\mathscr{B}}, C_1^{\mathscr{B}}, C_2^{\mathscr{B}})$. Předpokládáme $S^{\mathscr{A}} \cap S^{\mathscr{B}} = \emptyset$.

1. Zvolme $\mathscr{C} \in \mathbf{N}_n$, $\mathscr{C} = (S^{\mathscr{A}} \cup S^{\mathscr{B}}, \varphi^{\mathscr{C}}, S_0^{\mathscr{A}} \cup S_0^{\mathscr{B}}, F^{\mathscr{A}} \cup F^{\mathscr{B}}, C_1^{\mathscr{A}} \cup C_1^{\mathscr{B}}, C_2^{\mathscr{A}} \cup C_2^{\mathscr{B}})$, kde $\varphi^{\mathscr{C}}(s_i, x) = s_j$, jestliže buď $s_i, s_j \in S^{\mathscr{A}}$, $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, x) = s_j$ nebo $s_i, s_j \in S^{\mathscr{B}}$, $\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, x) = s_j$. Zřejmě je $R(\mathscr{C}) = R(\mathscr{A}) \cup R(\mathscr{B})$, a tedy $R(\mathbf{N}_n)$ je uzavřená vůči sjednocení.

2. Nechť $F^{\mathscr{A}} = \{s_i : i \in M\}$, pak zvolme $\mathscr{D} \in \mathbf{N}_2$ (nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathscr{D} = (S^{\mathscr{A}} \cup S^{\mathscr{B}} \cup F', \varphi^{\mathscr{D}}, S_0^{\mathscr{A}}, F^{\mathscr{B}}, C_1^{\mathscr{A}} \cup C_1^{\mathscr{B}} \cup F_2', C_2^{\mathscr{A}} \cup C_2^{\mathscr{B}} \cup F_1')$, kde $F' \underset{\text{df}}{=} \{s_i', i \in M\}$, $F_1' \underset{\text{df}}{=} \{s_i' : s_i' \in F', s_i \in C_1\}$ $F_2' \underset{\text{df}}{=} \{s_i' : s_i' \in F', s_i \in C_2\}$ F' a $S^{\mathscr{A}} \cup S^{\mathscr{B}}$ jsou disjunktní, $\varphi^{\mathscr{D}}$ je definována takto:

(i) jestliže $s_i, s_j \in S^{\mathscr{A}}$, $x \in \Sigma$, potom $\varphi^{\mathscr{D}}(s_i, x) = s_j$ právě tehdy, jestliže $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, x) = s_j$;

(ii) jestliže $s_i, s_j \in S^{\mathscr{B}}$, $x \in \Sigma$, potom $\varphi^{\mathscr{D}}(s_i, x) = s_j$ právě tehdy, jestliže $\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, x) = s_j$;

(iii) jestliže $s_i \in F^{\mathscr{A}}$, $s_i' \in F'$, potom $\varphi^{\mathscr{D}}(s_i, e) = s_i'$ a $\varphi^{\mathscr{D}}(s_i', x) = s_i'$ pro každé $x \in \Sigma$;

(iv) jestliže $s_i' \in F'$ a $s_j \in S_0^{\mathscr{B}}$, potom $\varphi^{\mathscr{D}}(s_i', e) = s_j$.

Ukážeme, že $R^{\text{mod } e}(\mathscr{D}) = R(\mathscr{A}) \,.\, R(\mathscr{B})$.

a) Nechť $\boldsymbol{u} \in R^{\text{mod } e}(\mathscr{D})$, $\boldsymbol{u} = (x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2})$, pak musí, podle definice přijatých n-tic automaty třídy $\mathbf{N}_2$, existovat posloupnost stavů $s_0, \dots, s_t$ splňující podmínky $(1.1)-(1.3)$. Z konstrukce automatu $\mathscr{D}$ vyplývá, že existuje $t_1 \leqq t_2 \leqq t$ tak, že $s_0, \dots, s_{t_1} \in S^{\mathscr{A}}$, $s_{t_1+1}, s_{t_1+2}, \dots, s_{t_2} \in F'$, $s_{t_2+1}, s_{t_2+2}, \dots, s_t \in S^{\mathscr{B}}$, přičemž $s_{t_2+1} \in S_0^{\mathscr{B}}$, $s_{t_1+1} = s_{t_1+2} = \dots = s_{t_2}$.

Počáteční úsek $\boldsymbol{u}_1$ dvojice $\boldsymbol{u}$, který převádí automat $\mathscr{D}$ do stavu s_{t_2}, patří do $R(\mathscr{A})$, neboť jeho počáteční úsek $\boldsymbol{u}_2$ převádí automat $\mathscr{A}$ do koncového stavu s_{t_1} a neliší se od $\boldsymbol{u}_1$ v prvém resp. druhém slově dvojice, je-li $s_{t_1} \in C_1$ resp. $s_{t_1} \in C_2$. $\boldsymbol{u}_3$ označme dvojici slov, pro kterou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \,.\, \boldsymbol{u}_3$. Z toho, že $s_{t_2+1} \in S_0^{\mathscr{B}}$ a $F^{\mathscr{B}} = F^{\mathscr{D}}$ vyplývá, že $\boldsymbol{u}_3 \in R(\mathscr{B})$ a tedy $R^{\text{mod } e}(\mathscr{D}) \subset R(\mathscr{A}) \,.\, R(\mathscr{B})$.

b) Nechť $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{A}) \,.\, R(\mathscr{B})$. Pak existují $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ tak, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \,.\, \boldsymbol{u}_2$ a $\boldsymbol{u}_1 \in R(\mathscr{A})$, $\boldsymbol{u}_2 \in R(\mathscr{B})$. Z definice přijatých dvojic automaty třídy $\mathbf{N}_2$ vyplývá, že existuje počáteční úsek $\boldsymbol{u}_2$ dvojice $\boldsymbol{u}_1$ (lišící se nejvýše v jednom slově), který převádí automat $\mathscr{A}$ postupně do stavů $s_0, \dots, s_{t_1}$ tak, že jsou splněny podmínky $(1.1)-(1.3)$. Podobně existuje posloupnost $s_{t_2}, \dots, s_t$ stavů automatu $\mathscr{B}$, splňující podmínky $(1.1)-(1.3)$ pro $\boldsymbol{u}_3 \in R(\mathscr{B})$. k nechť je rozdíl délky dvojice $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$. Z definice automatu $\mathscr{D}$ pak vyplývá, že posloupnost stavů

$$s_0, s_1, \dots, s_{t_1}, \underbrace{s_{t_1}', \dots, s_{t_1}'}_{k+1 \text{ krát}}, s_{t_2}, \dots, s_t$$

je posloupností, která splňuje podmínky (1.1)–(1.3) nutné k tomu, aby dvojice $\boldsymbol{u}$ byla přijata automatem $\mathscr{D}$. Platí tedy $R(\mathscr{A}) \,.\, R(\mathscr{B}) \subset R^{\text{mod } e}(\mathscr{D})$.

Jelikož podle věty 1 je $R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_2) = R(\mathbf{N}_2)$, je tím ukázána uzavřenost třídy $R(\mathbf{N}_2)$ vůči sřetězení.

3. Zvolme $\mathscr{K} \in \mathbf{N}_2$, $\mathscr{K} = (S^{\mathscr{A}} \cup F', \varphi^{\mathscr{K}}, S_0^{\mathscr{A}}, F^{\mathscr{A}}, C_1^{\mathscr{A}} \cup F_2', C_2^{\mathscr{A}} \cup F_1')$, kde F', F_1', F_2' mají týž význam jako výše a $\varphi^{\mathscr{K}}$ je definována takto:

(i) jestliže $s_i, s_j \in S^{\mathscr{A}}$, $x \in \Sigma$ a $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, x) = s_j$, pak $\varphi^{\mathscr{K}}(s_i, x) = s_j$;

(ii) jestliže $s_i \in F^{\mathscr{A}}$, $s_i' \in F'$, potom $\varphi^{\mathscr{K}}(s_i, e) = s_i'$;

(iii) jestliže $s_i' \in F'$, potom $\varphi^{\mathscr{K}}(s_i', x) = s_i'$ pro libovolné $x \in \Sigma$;

(iv) jestliže $s_i' \in F'$, $s_j \in S_0^{\mathscr{A}}$, potom $\varphi^{\mathscr{K}}(s_i', e) = s_j$.

Analogicky jako v případě sřetězení se dá ukázat, že $R^{\text{mod } e}(\mathscr{K}) = R(\mathscr{A})^*$. Protože podle věty 1 je $R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_2) = R(\mathbf{N}_2)$, je tím ukázána uzavřenost třídy $R(\mathbf{N}_2)$ vůči iteraci.

4. Zvolme automaty $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \mathbf{N}_2$

$$\mathscr{L}_1 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_2\}, \{s_0, s_2\}, \{s_1\}) ;$$
$$\mathscr{L}_2 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_2\}, \{s_0\}, \{s_1, s_2\}) ;$$

kde φ je dána takto: $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, b) = s_2$.

Jejich diagramy jsou na obr. 7a,b. Zřejmě $R(\mathscr{L}_1) = \{(a, b\sigma) : a, b \in \Sigma, \sigma \in \Sigma^*\}$; $R(\mathscr{L}_2) = \{(a\sigma, b) : a, b \in \Sigma, \sigma \in \Sigma^*\}$; $R(\mathscr{L}_1) \cap R(\mathscr{L}_2) = \{(a, b)\}$, avšak do $R(\mathbf{N}_2)$ nepatří žádná konečná relace, což se ukáže stejně jako pro $R(\mathbf{D}_2)$ ([6]). Tedy $R(\mathbf{N}_2)$ není uzavřená vůči průniku.

Obr. 7. a) b)

5. Předpokládejme, že třída $R(\mathbf{N}_2)$ je uzavřená vůči doplňku. Jelikož je uzavřená vůči sjednocení, vyplývalo by z toho, že je uzavřená i vůči průniku, a to je spor. Tedy není uzavřená vůči doplňku.

Věta 6. *Třída $R(\mathbf{G}_n)$ není uzavřená vůči sjednocení, doplňku, sřetězení a iteraci.*

Důkaz. Jestliže $R \in R(\mathbf{G}_2)$, potom zřejmě nemůže současně $(a, e) \in R$ a $(e, b) \in R$, neboť v tom případě by počáteční stav s_0 musel patřit do obou tříd rozkladu stavů, což není možné.

1. Zvolme $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \in \mathbf{G}_2$; $\mathscr{P}_1 = (\{s_0, s_1\}, \varphi^1, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_0\}, \{s_1\})$, kde φ^1 je dána takto: $\varphi^1(s_0, a) = s_1$; $\mathscr{P}_2 = (\{s_0, s_1\}, \varphi^2, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_1\}, \{s_0\})$, kde φ^2 je dána takto: $\varphi^2(s_0, b) = s_1$.

Zřejmě je $R(\mathscr{P}_1) = \{(e, e), (a, e)\}$; $R(\mathscr{P}_2) = \{(e, e), (e, b)\}$; sjednocení $R(\mathscr{P}_1) \cup \cup R(\mathscr{P}_2)$ nepatří do $R(\mathbf{G}_2)$, neboť obsahuje jak dvojici (a, e), tak (e, b) (viz výše). Tedy $R(\mathbf{G}_2)$ není uzavřená vůči sjednocení.

2. Předpokládejme, že $R(\mathbf{G}_2)$ je uzavřená vůči doplňku. Jelikož relace tvořená prázdnou množinou dvojic je representovatelná (každým automatem s prázdnou množinou koncových stavů), musel by též její doplněk, tj. množina všech dvojic slov nad abecedou Σ, být representovatelný. Do této množiny dvojic však patří dvojice (a, e) i (e, b), což je spor.

Tabulka 3.

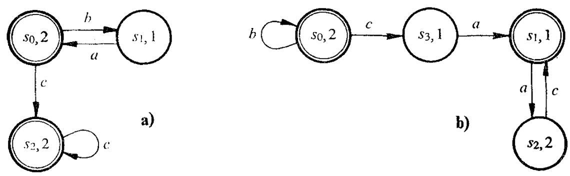
	a	b	c
s_0	—	s_1	s_2
s_1	s_0	—	—
s_2	—	—	s_2

Tabulka 4.

	a	b	c
s_0	—	s_0	s_3
s_1	s_2	—	—
s_2	—	—	s_1
s_3	s_1	—	—

3. Zvolme $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2 \in \mathbf{G}_2$;

$$\mathscr{K}_1 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi^1, s_0, \{s_0, s_2\}, \{s_1\}, \{s_0, s_2\}) ,$$
$$\mathscr{K}_2 = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \varphi^2, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_1, s_3\}, \{s_0, s_2\}) ,$$



Obr. 8.

kde φ^1 je dána na tab. 3 a φ^2 na tab. 4.

Diagramy automatů $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ jsou na obr. 8a,b.

Snadno lze nahlédnout, že

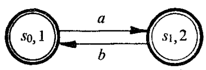
$$R(\mathscr{K}_1) = \{(a^n, b^n c^m), n = 0, 1, \ldots; m = 0, 1, \ldots\} ,$$
$$R(\mathscr{K}_2) = \{(a^n, b^m c^n), n = 0, 1, \ldots; m = 0, 1, \ldots\} ,$$

tedy

$$R(\mathscr{K}_1) \cap R(\mathscr{K}_2) = \{(a^n, b^n, c^n), n = 0, 1, 2, \ldots\} .$$

Kdyby relace $R(\mathscr{K}_1) \cap R(\mathscr{K}_2)$ byla representována nějakým automatem z $\mathbf{G}_2$, pak by podle lemmatu 2 byl $\{a^n b^n, n = 0, 1, \ldots\}$ regulární jazyk, což je zřejmě spor, a $\mathbf{G}_2$ tedy není uzavřena vůči průniku.

4. Zvolme $\mathscr{Q} \in \mathbf{G}_2$, $\mathscr{Q} = (\{s_2, s_1\}, \varphi, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_0\}, \{s_1\})$, kde $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, b) = s_0$. (Diagram na obr. 9.)



Obr. 9.

Zřejmě $R(\mathscr{Q}) = \{(a^n, b^n), (a^{n+1}, b^n), m = 0, 1, 2, \ldots\}$. Snadno zjistíme, že $R(\mathscr{Q}) . R(\mathscr{Q}) = \{(a^n, b^n), (a^{n+1}, b^n), (a^{n+2}, b^n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $R(\mathscr{Q})^* = \{(a^n, b^m), m = 0, 1, \ldots, n \geqq m\}$. Tedy do $R(\mathscr{Q}) . R(\mathscr{Q})$ i do $R(\mathscr{Q})^*$ patří jak dvojice (a, b), tak dvojice (aa, e). Kdyby existoval automat $\mathscr{S} \in \mathbf{G}_2$, $R(\mathscr{S}) = R(\mathscr{Q}) . R(\mathscr{Q})$ resp. $R(\mathscr{S}) = R(\mathscr{Q})^*$, musel by zřejmě existovat nějaký jeho stav s_i, pro který $\varphi(s_0, a) = s_i$ a $s_0 \in C_1$. Z $(a, b) \in R(\mathscr{S})$ pak vyplývá nutně $s_i \in C_2$, avšak z $(aa, e) \in R(\mathscr{S})$ vyplývá $s_i \in C_1$, což je spor, neboť $C_1 \cup C_2 = \emptyset$ a třída $R(\mathbf{G}_2)$ tedy není uzavřená vůči sřetězení ano vůči iteraci.

Věta 7. *Třída $R(\mathbf{E}_n)$ je uzavřená vůči doplňku.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{A} \in \mathbf{E}_n$, $\mathscr{A} = (S, \varphi^{\mathscr{A}}, s_0, F)$. Zvolme $\mathscr{B} = (S \cup \{s'\}, \varphi^{\mathscr{B}}, s_0, (S - F) \cup \{s'\})$, kde $\varphi^{\mathscr{B}}$ je volena takto:

(i) Jestliže pro $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\Sigma \cup \{e\})^n$ a $s_i \in S$ je definována funkce $\varphi^{\mathscr{A}}$ a je $\varphi^{\mathscr{A}}(s_i, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = s_j$, potom $\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = s_j$;

(ii) jestliže pro $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\Sigma \cup \{e\})^n$ a $s_i \in S$ funkce $\varphi^{\mathscr{A}}$ není definována, potom $\varphi^{\mathscr{B}}(s_i, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = s'$;

(iii) $\varphi(s', (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = s'$ pro každé $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\Sigma \cup \{e\})^n$. Ukažme, že $R(\mathscr{B}) = (\Sigma^*)^n - R(\mathscr{A})$. Uvažujme libovolnou n-tici $\boldsymbol{u} = (x_{11} \ldots x_{1m_1}, x_{21} \ldots \ldots x_{2m_2}, \ldots, x_{n1} \ldots x_{nm_n})$. Mohou nastat tři případy:

1. n-tice $\boldsymbol{u}$ je přijata automatem $\mathscr{A}$ a tedy existuje posloupnost stavů $s_0, s_1, \ldots, s_m$, kde $m = \max(m_1, \ldots, m_n)$ taková, že po doplnění všech slov tvořících n-tici $\boldsymbol{u}$ prázdnými symboly na délku m ($x_{ji} = e$ pro $i > m_j$) je (viz (4.1) a (4.2))

(i) $$s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2j}, \ldots, x_{ni})) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,;$$

(ii) $$s_m \in F\,;$$

2. existuje posloupnost stavů $s_0, s_1, \ldots, s_m$ splňující podmínku (i), ale $s_m \notin F$;

3. neexistuje posloupnost stavů splňující podmínku (i), to znamená, že existuje posloupnost stavů $s_0, s_1, \ldots, s_t$, $t < m$, pro kterou $s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}))$ pro $i = 1, 2, \ldots, t$ a $\varphi(s_t, (x_{1t+1}, x_{2t+1}, \ldots, x_{nt+1}))$ není definována.

V prvém případě je n-tice $\boldsymbol{u}$ přijata automatem $\mathscr{A}$, ale není přijata automatem $\mathscr{B}$, neboť ho převádí do stavu s_m, který nepatří mezi koncové stavy.

Ve druhém případě je tomu naopak, zřejmě $\boldsymbol{u} \notin R(\mathscr{A})$, ale $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{B})$.

Ve třetím případě $\boldsymbol{u} \notin R(\mathscr{A})$, avšak převádí automat $\mathscr{B}$ postupně do stavů $s_0, s_1, \ldots$ $\ldots, s_t, \underbrace{s', s', \ldots, s'}_{(m-t)\text{—krát}}$, přičemž s' je koncový stav a tedy $\boldsymbol{u} \in R(\mathscr{B})$.

Ukázali jsme tedy, že skutečně $R(\mathscr{B})$ je doplňkem $R(\mathscr{A})$ vůči všem n-ticím nad abecedou Σ.

Tabulka 5.

Třídy relací	$\cup$	$\cap$	c	.	*
$R(\boldsymbol{M}_n)$	ano	ne	ne	ano	ano
$R(\boldsymbol{N}_n)$	ano	ne	ne	ano	ano
$R(\boldsymbol{D}_n)$	ne	ne	ano	?	?
$R(\boldsymbol{G}_n)$	ne	ne	ne	ne	ne
$R(\boldsymbol{E}_n)$	ano	ano	ano	ne	ne
$R(\boldsymbol{S}_n)$	ano	ano	ne	ano	ano

Věta 8. Třída $R(\boldsymbol{S}_n)$ je uzavřena vůči sjednocení, průniku, sřetězení a iteraci, není uzavřena vůči doplňku.

Důkaz. Automaty ze třídy $\boldsymbol{S}_n$ lze chápat jako obyčejné (1-páskové) automaty, jejich vstupní symboly jsou zakódovány jako n-tice symbolů z abecedy Σ. Uzavřenost vůči všem uvedeným operacím kromě doplňku vyplývá tedy z uzavřenosti regulárních jazyků vůči těmto operacím, neboť tyto operace zachovávají podmínku, že n-tice se skládají ze stejně dlouhých slov. Naproti tomu doplněk tuto podmínku nezachovává, a tedy vůči doplňku není třída $R(\boldsymbol{S}_n)$ uzavřena.

Výsledky vět 5–8 spolu s výsledky známými z literatury ([4], [5], [6]) shrneme do přehledné tabulky 5 (c — označuje doplněk).

(Došlo dne 22. listopadu 1966.)

LITERATURA

[1] Berge C.: Theorie des graphes et ses applications. Paris 1958.
[2] Čulík Karel: Some notes on finite state languages and events represented by finite automata using labelled graphs. Časopis pro pěstování matematiky *86* (1961), 43–55.
[3] Čulík Karel, Havel Ivan: On multiple finite automata. (V tisku.)
[4] Rabin M. O., Scott D.: Finite automata and their decision problems. IBM J. of Research and Development *3* (1959), 115–125.
[5] Elgot C. C., Mezei J. E.: On finite relations defined by generalised automata. IBM J. of Research and Development *9* (1965), 47–68.
[6] Ginsburg S.: Mathematical Machine Theory. Addison-Wesley, 1962.

Relations Defined by n-tape Automata

KAREL ČULÍK II

The paper deals with classes of relations defined by n-tape automata. Output-less automata with a given set of terminal states are considered. An automaton decides whether an arbitrary n-tape of words is accepted or not and so defines an n-ary relation. A class of automata $\mathbf{D}_n$ introduced for $n = 2$ in [4] and [6] and its indeterministic version $\mathbf{N}_n$ is considered as well as classes $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{M}_n$ introduced in [5] and newly introduced classes $\mathbf{G}_n$ and $\mathbf{H}_n$.

The class of relation defined by the above classes of automaton are investigated, as well as the classes of relation defined modulo e by n-tape automata. The definition modulo e for relation is analogous to that for languages in [3].

Inclusions of various classes of relation defined by classes of automata and their closure under Boolean and Kleenean operations are examined. The results as to the inclusions, equalities and noninclusions of the classes are presented in a diagram in Fig. 5 and the results as to the closure of these classes are shown in table 5 together with the results known from references [4], [5] and [6].

RNDr Karel Čulík, CSc., Matematická laboratoř ČVUT, Horská 4, Praha 2.